MATEMATIKOS UŽDAVINYNAS



STOJANTIEMS Į AUKŠTĄSIAS TECHNIKOS MOKYKLAS

MATEMATIKOS UŽDAVINYNAS

STOJANTIEMS Į AUKŠTĄSIAS TECHNIKOS MOKYKLAS

Originalo redaktorius M. SKANAVIS



KAUNAS „ŠVIESA" 1992

UDK 51(076.1)
Ma615

Сборник задач по математике для поступающих во втузы
Под редакцией М. И. Сканави
Авторы: В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский, Т. Н. Маслова, И. Ф. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, Н. М. Федорова
Минск, «Вышэйшая школа», 1990

Autoriai V. Jegeriovas, V. Zaicevas, B. Kordemskis,
T. Maslova, I. Orlovskaja, R. Pozoiskis,
G. Riachovskaja, N. Fiodorova

Vertė ZITA ŠLIAVAITĖ

Lietuvos Respublikos kultūros ir švietimo ministerijos rekomenduota

Ma615 **Matematikos** uždavinynas stojantiems į aukštąsias technikos mokyklas / V. Jegeriovas, V. Zaicevas, B. Kordemskis ir kt. Orig. red. M. Skanavis.— K.: Šviesa, 1992.— 479 p.: iliustr.

ISBN 5-430-01029-4

Uždavinyną sudaro dvi dalys: „Aritmetika, algebra, geometrija“ (I dalis) ir „Algebra, geometrija (papildomi uždaviniai). Analizės pradmenys. Koordinatės ir vektoriai“ (II dalis). Visi I dalies uždaviniai suskirstyti į tris grupes atsižvelgiant į jų sudėtingumą. Uždavinynas skiriamas stojantiems į aukštąsias technikos mokyklas, jis taip pat bus naudingas mokykloms ir klasėms su sustiprintu matematikos mokymu, matematikos fakultatyvams.

UDK 51(076.1)

M $\frac{4306020500-176}{M853(10)-92}$ Prot. Nr. 1—91

ISBN 5-430-01029-4 (liet. k.)
ISBN 5-339-00482-1 (rusų k.)

PRATARMĖ

Uždavinyne pateikta informacinio pobūdžio teorinių žinių, taip pat uždavinių sprendimo pavyzdžių (jų daugiau negu 100), aiškinami sprendimo metodai. Čia vartojami tokie pat terminai ir simboliai kaip dabartiniuose mokykliniuose vadovėliuose.

Kadangi vis dažniau stojančiųjų į aukštąsias mokyklas darbai tikrinami elektroniniais įrenginiais, šiame uždavinyne rasite 28 pavyzdinius variantus po 10 uždavinių (su atsakymais), kurie padės pasitikrinti, kaip pasirengėte spręsti analogiškus variantus.

I dalies (1—13 skyriaus) uždaviniai pagal sunkumą suskirstyti į tris grupes (A, B, C).

Aišku, toks skirstymas yra sąlygiškas. Tačiau autoriai mano, jog, mokėdami spręsti A grupės uždavinius, mokiniai jau bus šiek tiek pasirengę stojamiesiems egzaminams į aukštąsias mokyklas. Jeigu jie sėkmingai sprendžia B grupės uždavinius, vadinasi, mokyklinį kursą išmoko dar geriau. Prie C grupės priskiriami sunkesni uždaviniai. Jie padeda ugdyti gebėjimą savarankiškai logiškai mąstyti, kelti matematinę kultūrą. Todėl šiuos uždavinius galima spręsti per pamokas ir fakultatyvinius užsiėmimus.

II uždavinyno dalyje pateikta papildomų algebros ir geometrijos uždavinių, kurie nesuskirstyti į grupes pagal sunkumą. Čia taip pat yra matematinės analizės pradmenų kurso uždavinių bei uždavinių, kuriuos sprendžiant taikomos koordinatės ir vektoriai.

Atsižvelgiant į vidurinės mokyklos programą, uždavinyne nagrinėjami tik realieji skaičiai: funkcijų, lygčių ir lygčių sistemų realiosios šaknys.

*V. Jegeriovas, V. Zaicevas, B. Kordemskis,
T. Maslova, I. Orlovskaja, R. Pozoiskis,
G. Riachovskaja, N. Fiodorova*

TIEMS, KURIE RENGIASI STOJAMIESIEMS EGZAMINAMS

Šis uždavinynas yra papildoma mokymo priemonė prie vadovėlio. Jame pateikta per 5000 uždavinių ir jų atsakymų. Nagrinėjami uždaviniai apima visus vidurinės mokyklos matematikos programos skyrius. Tačiau reikia žinoti, kad kai kurių uždavinių, pavyzdžiui, trigonometrinių nelygybių, integralų ir jų taikymo, dabartinėje stojamųjų egzaminų programoje nėra, taigi jų negali būti ir per stojamuosius egzaminus. Kartu su kitais neįprastais uždaviniais jie įtraukti į uždavinyną kaip papildomi pratimai norintiems išmokti taikyti matematinius metodus. Turėdami šių įgūdžių, galėsite tikėtis sėkmingų stojamųjų egzaminų ir studijų aukštojoje mokykloje. Kai kurių neįprastų ir sunkesnių uždavinių eilės numeriai pažymėti žvaigždute.

Per stojamuosius egzaminus nebus ir temos „Kombinatorika ir Niutono binomas" (5 skyrius) uždavinių. Juos galima nagrinėti per fakultatyvinius užsiėmimus mokykloje.

Pradėdami spręsti kurio nors skyriaus uždavinius, pirmiausia pabandykite savarankiškai išspręsti šiame uždavinyne pateiktus to skyriaus uždavinius. Jeigu tai pasirodys per sunku, pasistenkite išnagrinėti sprendimą: išsiaiškinti taikytų metodų teorinį pagrindą ir samprotavimų logiką.

Neskubėkite spręsti uždavinių pirmu pasitaikiusiu metodu. Pagalvokite, ar nėra geresnio, pavyzdžiui, paprastesnio, sprendimo. Sprendžiant geometrijos uždavinius, galima taikyti įvairias vektorinės algebros ir pertvarkymų formules, teoremas ir taisykles, sprendžiant algebros ir geometrijos uždavinius — trigonometrijos formules, teoremas ir taisykles, koordinačių metodą, remtis funkcijų ir išvestinių savybėmis. Svarbu, kad atsakymas būtų pagrįstas. Kitaip tariant, per egzaminą galite peržengti įvairių matematikos skyrių ribas, nes atsiskaitote už visą matematikos kursą.

Sakykime, Jums reikia rasti didžiausią galimą sumos

$$S=3\cos x+4\sin x$$

reikšmę (x — realusis skaičius).

Jeigu esate susipažinę tik su algebros metodais, spręsite taip:

$$3\cos x+4\sin x=3\left(\cos x+\frac{4}{3}\sin x\right);$$

tarkime, kad $\frac{4}{3}=\operatorname{tg}\alpha$, tada

$$S=3(\cos x+\operatorname{tg}\alpha\sin x)=$$
$$=\frac{3}{\cos\alpha}(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)=\frac{3}{\cos\alpha}\cos(\alpha-x).$$

Kadangi didžiausia $\cos(\alpha-x)$ reikšmė lygi 1, kai $x=\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, tai

$$S_{max}=\frac{3}{\cos\alpha}=3\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=3\sqrt{1+\frac{16}{9}}=5.$$

Jeigu mokate taikyti ir diferencialinio skaičiavimo metodus, galite spręsti taip:

$$S'=(3\cos x+4\sin x)'=-3\sin x+4\cos x;$$
$$-3\sin x+4\cos x=0;\ \operatorname{tg}x=\frac{4}{3};$$

iš čia, pavyzdžiui, $x=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ — funkcijos S maksimumo taškas (prisiminkite, kaip tai galima pagrįsti!). Tada

$$S_{max}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}+\frac{4\cdot\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}=\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=5.$$

Nesunku įrodyti, kad S_{max} yra didžiausia funkcijos S reikšmė atkarpoje, kurios ilgis lygus duotosios funkcijos periodui, vadinasi, ji didžiausia ir visoje skaičių tiesėje.

Pagaliau, mokėdami taikyti vektorinės algebros metodus, galite uždavinį spręsti dar vienu būdu.

Įveskime du vektorius $\bar{e}=(\cos x;\ \sin x)$ ir $\bar{a}=(3;\ 4)$; tada

$$S=3\cos x+4\sin x=\bar{a}\bar{e}=|\bar{a}|\cdot|\bar{e}|\cdot\cos\angle(\bar{a},\bar{e}),$$
$$|\bar{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5;\ |\bar{e}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1,\ S=5\cos\angle(\bar{a},\bar{e});$$

iš čia $S_{max}=5$, kai, pavyzdžiui, $\angle(\bar{a},\bar{e})=0°$; atitinkama x reikšmė lygi $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Primename, kad, sprendžiant uždavinį per egzaminą, reikia išsamiai arba glaustai formuluoti tuos matematinius teiginius (teoremas, savybes), kuriais remiatės samprotaudami, nurodyti įprastus jų pavadinimus (pavyzdžiui: „Pagal dvigubo argumento sinuso formulę", „Pagal Vieto teoremą", „Pagal trijų statmenų teoremą" ir t. t.). Kad būtų trumpiau, šiame uždavinyne tik nurodomas dvigubas atitinkamos formulės numeris (pirmasis skaitmuo reiškia skyriaus numerį, o antrasis — nurodo skyriaus formulės numerį).

Jeigu išspręsto uždavinio atsakymas nesutampa su pateiktuoju uždavinyne, vadinasi, suklydote. Tačiau uždavinyne pateiktuose atsakymuose gali pasitaikyti korektūros klaida, kurios nepastebėjo autoriai. Jūs galite (o kartais ir privalote) pasitikrinti atsakymą remdamiesi sprendžiamo uždavinio sąlyga. Įsitikinę, kad išsprendėte teisingai, imsitės spręsti dar sunkesnius uždavinius. Linkime sėkmės!

I DALIS

ARITMETIKA, ALGEBRA, GEOMETRIJA

1 SKYRIUS

ARITMETINIAI VEIKSMAI

Pavyzdys. Apskaičiuokite:

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0{,}8}-0{,}6\right):\left(\frac{\left(42\cdot 3\frac{5}{6}-3{,}3:0{,}03\right):\frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4}:0{,}625-0{,}84:0{,}8\right):0{,}03}\right)^{-1}.$$

△ Suskliaustą pirmąjį reiškinį pažymėkime raide A, o antrąjį — raide B. Apskaičiuokime reiškinio A reikšmę:

$$\boldsymbol{A}=\frac{928}{80}-0{,}6=11{,}6-0{,}6=11.$$

Raskime trupmenos B skaitiklį: 1) $42\cdot 3\frac{5}{6}=42\cdot 3+\frac{42\cdot 5}{6}=161$; 2) $3{,}3:0{,}03=110$; 3) $(161+110)\cdot 15=271\cdot 15$.

Apskaičiuokime trupmenos B vardiklį: 1) $\frac{15}{4}:\frac{5}{8}=6$; 2) $\frac{84}{80}=\frac{21}{20}$; 3) $\left(6-\frac{21}{20}\right)\cdot\frac{100}{3}=200-35=165$.

$$B=271\cdot\frac{15}{165}=\frac{271}{11}.$$

Galiausiai gauname: $A:B^{-1}=A\cdot B=11\cdot\frac{271}{11}=271$. ▲

Sprendžiant šio skyriaus uždavinius, nurodytus veiksmus reikia atlikti be skaičiuotuvo, neapvalinant skaičių, nes laikoma, jog visi pateikti skaičiai yra tikslūs.

Apskaičiuokite (**1.001—1.040**):

1.001. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}$.

1.002. $\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\frac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\frac{19}{25}$.

1.003. $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\cdot 1\frac{7}{5}\,\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$.

1.004. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43.$

1.005. $\dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}$.

1.006. $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$.

1.007. $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}$.

1.008. $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right)$.

1.009. $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90.$

1.010. $\dfrac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\frac{2}{7}$.

1.011. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\dfrac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0{,}05.$

1.012. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}$.

1.013. $\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25.$

1.014. $\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3+5\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right):2\frac{2}{3}}+\dfrac{1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}$.

1.015. $\frac{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0,625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4,5}.$

1.016. $\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2,2\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}.$

1.017. $\frac{0,128:3,2+0,86}{\frac{5}{6}\cdot 1,2+0,8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3,6}{0,505\cdot\frac{2}{5}-0,002}.$

1.018. $\frac{3\frac{1}{3}:10+0,175:0,35}{1,75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1,4}{\left(0,5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}.$

1.019. $\frac{0,125:0,25+1\frac{9}{16}:2,5}{(10-22:2,3)\cdot 0,46+1,6}+\left(\frac{17}{20}+1,9\right)\cdot 0,5.$

1.020. $\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0,6:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+3,75:1\frac{1}{2}\right):2,2.$

1.021. $\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}.$

1.022. $\frac{0,5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0,125}{\frac{1}{3}+0,4+\frac{14}{15}}+\frac{(3,75-0,625)\cdot\frac{48}{125}}{12,8\cdot 0,25}.$

1.023. $\left(26\frac{2}{3}:6,4\right)\cdot\left(19,2:3\frac{5}{9}\right)-\frac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0,5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\frac{1}{18}.$

1.024. $\frac{0,725+0,6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0,128\cdot 6\frac{1}{4}-0,0345:\frac{3}{25}}\cdot 0,25.$

1.025. $\left((520\cdot 0,43):0,26-217+2\frac{3}{7}\right)-$
$-\left(31,5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right).$

1.026. $\frac{(3,4-1,275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0,5\cdot\left(2+\frac{12,5}{5,75+\frac{1}{2}}\right).$

1.027. $\left(\frac{3,75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1,875}-\frac{2\frac{3}{4}+1,5}{2,75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}.$

1.028. $((21,85:43,7+8,5:3,4):4,5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}.$

1.029. $\left(1\frac{2}{5}+3,5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3,4:2\frac{1}{8}-0,35.$

1.030. $\frac{\left(0,3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0,07}{(13-0,416):6,05+1,92}.$

1.031. $\frac{\frac{5}{6}-\frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}}\cdot\frac{1,125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{0,59}.$

1.032. $\frac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2}:0,25}{\frac{37}{300}:0,0925}+12,5\cdot 0,64.$

1.033. $\frac{\left(\frac{5}{8}+2\frac{17}{24}\right):2,5}{\left(1,3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot 0,5.$

1.034. $\frac{((7-6,35):6,5+9,9)\cdot\frac{1}{12,8}}{\left(1,2:36+1\frac{1}{5}:0,25-1\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{4}}:0,125.$

1.035. $\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0,5.$

1.036. $\frac{3,75:1\frac{1}{2}+\left(1,5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right)\cdot\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$

1.037. $\frac{\left(\left(4,625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2,5:1,25:6,75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0,375\right):0,125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0,358-1,4796:13,7)}.$

1.038. $\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$

1.039. $\left(\frac{(3,2-1,7):0,003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0,2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1,5\right)\cdot 1,5}{\left(2,44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1,364:0,124.$

1.040. $5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right).$

Raskite proporcijos narį X **(1.041—1.045)**:

1.041. $$\frac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$$

1.042. $$\frac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{X}.$$

1.043. $$\frac{0{,}125X}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\frac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$$

1.044. $$\frac{X}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$$

1.045. $$\frac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{X}=\frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}.$$

Apskaičiuokite racionaliausiu būdu **(1.046—1.048)**:

1.046. $$\frac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}.$$

1.047. $$\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{1}{3}\sqrt{40}.$$

1.048. $$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2.$$

Apskaičiuokite:

1.049. $$\frac{2^{-2}+5^0}{(0{,}5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75.$$

1.050. $$\frac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{(3:2^3)^{-1}\cdot(1{,}5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$$

2 SKYRIUS

ALGEBRINIŲ REIŠKINIŲ TAPATIEJI PERTVARKYMAI

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

Laipsnių savybės

Su kiekviena x ir y reikšme bei teigiamomis a ir b reikšmėmis teisingos tokios lygybės:

$$a^0=1;\ (2.1)\quad a^x\cdot a^y=a^{x+y};\ (2.2)\quad a^x:a^y=a^{x-y};\ (2.3)$$
$$(a^x)^y=a^{xy};\ (2.4)\quad (ab)^x=a^xb^x;\ (2.5)$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x};\ (2.6)\quad a^{-x}=\frac{1}{a^x}.\ (2.7)$$

Daugianariai

Su kiekviena a, b ir c reikšme teisingos lygybės:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b); \quad (2.8)$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \quad (2.9)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2; \quad (2.10)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \text{ arba}$$
$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b); \quad (2.11)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \text{ arba}$$
$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b); \quad (2.12)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2); \quad (2.13)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2); \quad (2.14)$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2); \quad (2.15)$$

čia x_1, x_2 — lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys.

Aritmetinių šaknų savybės

Su kiekviena natūraliąja n ir k reikšme, didesne už 1, ir kiekviena neneigiama a ir b reikšme teisingos šios lygybės:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ (2.16)\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0);\ (2.17)$$
$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k};\ (2.18)\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[kn]{a};\ (2.19)$$
$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\ (2.20)\quad (\sqrt[n]{a})^n=a\ (a\geqslant 0);\ (2.21)$$
$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},\text{ kai } 0\leqslant a<b;\ (2.22)\quad \sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & \text{kai } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{kai } a<0;\end{cases}\ (2.23)$$
$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|;\ (2.24)\quad \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}\ (a\geqslant 0).\ (2.25)$$

1 pavyzdys. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{x^4+2x^2-3x+1}{x^2+\sqrt{3x}+1}+2\left(\sqrt[6]{27x^3}-\frac{1}{2}\right).$$

△ Trupmeną pažymėkime raide A, o suskliaustą reiškinį — raide B. Tada nurodyto reiškinio išraiška bus tokia: $A+2B$. Matome, kad reiškinių $\sqrt{3x}$ ir $\sqrt[6]{27x^3}$ leistinosios reikšmės gali būti tik didesnės už nulį arba jam lygios

($x\geqslant 0$). Su jomis trupmenos A vardiklis nelygus nuliui. Todėl ir duotojo reiškinio leistinosios reikšmės $x\geqslant 0$.

Pritaikę (2.9) formulę, trupmenos A skaitiklyje išskiriame pilnąjį kvadratą:
$$x^4+2x^2+1-3x=(x^2+1)^2-3x.$$
Kadangi $x\geqslant 0$, tai, remdamiesi (2.21) lygybe, gauname: $3x=(\sqrt{3x})^2$. Tada gautąjį reiškinį, kaip kvadratų skirtumą, pagal (2.8) formulę galima išskaidyti dauginamaisiais:
$$(x^2+1)^2-(\sqrt{3x})^2=(x^2+1-\sqrt{3x})(x^2+1+\sqrt{3x}).$$
Vadinasi,
$$A=\frac{(x^2-\sqrt{3x}+1)(x^2+\sqrt{3x}+1)}{x^2+\sqrt{3x}+1}=x^2-\sqrt{3x}+1.$$
Remdamiesi (2.20) formule, gauname: $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$. Iš čia $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Taigi $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ▲

2 pavyzdys. Suprastinkite reiškinį
$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\quad 0<a<2b.$$
△ Turime $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; čia pritaikėme (2.9), (2.10) ir (2.23) formules. Vadinasi, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Dabar randame
$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a+2b}=\frac{(2b-a)(a-2b)-8ab+2b(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.\ ▲$$

3 pavyzdys. Suprastinkite reiškinį
$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\quad x>1.$$
△ Remdamiesi (2.15) formule, išskaidykime dauginamaisiais trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje esančius kvadratinius trinarius:
$$f(x)=\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$
Kadangi $x>1$, tai pagal (2.21) sąsają $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ ir $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Vadinasi,
$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\,((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}\,((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})}.$$
Suprastinę gauname: $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ▲

4 pavyzdys. Neskaičiuodami apytikslių reikšmių, suprastinkite skaitinį reiškinį
$$A=(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}-\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}})\cdot\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$
△ Pritaikę (2.16), (2.8), (2.20) ir (2.10) formules, gauname:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}=4\sqrt[3]{\frac{12-1}{11}}=4$;

2) $$\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2}=\sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\,\frac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}}=$$
$$=\sqrt[6]{\frac{(13+4\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})}{11^2}}=\sqrt[6]{\frac{169-48}{121}}=1.$$
Galiausiai $A=4-1=3$. ▲

5 pavyzdys. Patikrinkite, ar teisinga lygybė
$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=4.$$
△ Sakykime, $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}=x$. Šios lygybės abi puses pakelkime kubu. Pritaikę (2.11) formulę, gausime:
$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})(38-\sqrt{1445})}\,x=x^3,$$ arba $x^3+3x-76=0$. Įrašę reikšmę $x=4$, įsitikiname, kad ji yra viena iš kubinės lygties šaknų: $64+12-76=0$.

Pertvarkykime kubinę lygtį: $x^3-64=3(4-x)$; $(x-4)(x^2+4x+16)+3(x-4)=0$, $(x-4)(x^2+4x+19)=0$. Tačiau dauginamasis $x^2+4x+19$ neturi realiųjų šaknų. Vadinasi, skaičius 4 yra vienintelė galima realioji x reikšmė. Tai ir įrodo, kad duotoji lygybė teisinga (nes akivaizdu, jog $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}}+\sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — realusis skaičius). ▲

6 pavyzdys. Patikrinkite, ar teisinga lygybė
$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2.$$
△ Išnagrinėkime lygybę
$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$
Suprantama, jeigu ji teisinga, tai teisinga ir duotoji lygybė. Sakykime, $a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Nesunku įsitikinti, kad $a>0$ ir $b>0$. Jeigu teisinga lygybė $a^2=b^2$, tai $a=b$. Apskaičiuojame a^2 ir b^2:
$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=$$
$$=7+4\sqrt{3};\quad b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$
Kadangi $a^2=b^2$, tai $a=b$, t. y. duotoji lygybė yra teisinga.

Suvokę, kad abu sąlygoje nurodyti pošaknio reiškiniai yra teigiamų skaičių kvadratai, šią lygtį galėsime išspręsti greičiau. Būtent: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ ir $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Tuomet duotosios lygybės kairioji pusė bus lygi $\frac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$. Taigi $2=2$. ▲

7 pavyzdys. Reiškinių $\sqrt{24-t^2}$ ir $\sqrt{8-t^2}$ skirtumas lygus 2. Kam lygi tų reiškinių suma (kintamojo t reikšmės skaičiuoti nereikia)?

△ Pagal sąlygą $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Pritaikę formulę $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, gauname: $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8$. ▲

A grupė

Suprastinkite reiškinius ir apskaičiuokite jų reikšmes, kai žinomos parametrų skaitinės reikšmės (**2.001—2.124**):

2.001. $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

2.002. $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right):\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

2.003. $\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right)$; $a>b>0$.

2.004. $\left(\frac{(a+b)^{-n/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\frac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6}$; $b=0{,}04$.

2.005. $\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\frac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}$.

2.006. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}:\frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$.

2.007. $\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$.

2.008. $\left(\left(\frac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$.

2.009. $\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}$.

2.010. $t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}$.

2.011. $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

2.012. $\frac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$.

2.013. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$.

2.014. $\frac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\frac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$.

2.015. $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$.

2.016. $\left(\frac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}$.

2.017. $\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1$.

2.018. $\left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\frac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}\cdot(5-2x^2)$; $x=\sqrt{3{,}92}$.

2.019. $\frac{(x^2-y^2)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$; $x=64$.

2.020. $\sqrt{\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}}{\sqrt{2}}}$.

2.021. $\frac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$.

2.022. $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$.

2.023. $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

2.024. $\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

2.025. $\frac{a^3-a-2b-\frac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)\cdot(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)$; $a=23$, $b=22$.

2.026. $\frac{(\sqrt[5]{a^{4/3}})^{3/2}}{(\sqrt[5]{a^4})^3}\cdot\frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$.

2.027. $\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

2.028. $\frac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\frac{a^2\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+\frac{1}{x^2-ax}$.

2.029. $\frac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\cdot\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\cdot\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}$.

2.030. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{2}}+2}-\frac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$.

2.031. $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot(a-\sqrt{a^3})^{-1}.$

2.032. $\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}+4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2}$; $a=0{,}04.$

2.033. $\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$.

2.034. $1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$.

2.035. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$.

2.036. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\frac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\times$

$\times\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\frac{3n}{p}}\right).$

2.037. $\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$.

2.038. $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right).$

2.039. $\frac{9b^{4/3}-\frac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}$; $b=4.$

2.040. $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc}$;

$a=0{,}02,\ b=-11{,}05,\ c=1{,}07.$

2.041. $\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}$.

2.042. $\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$;

$a=0{,}32,\ x=0{,}08.$

2.043. $\frac{\left(m^2-\frac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\frac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m-\frac{1}{n}\right)^{m-n}}$.

2.044. $\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$; $x>a>0.$

2.045. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2+\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}$.

2.046. $\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right).$

2.047. $\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}\cdot(b^2+b+ab+a).$

2.048. $\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$; $p=0{,}78,\ q=\frac{7}{25}$.

2.049. $\left(\frac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\frac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\frac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\frac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right).$

2.050. $\frac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

2.051. $\frac{(a^2-b^2)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{ab^2}}:\frac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}}$;

$a=4{,}91,\ b=0{,}09.$

2.052. $\left((1-x^2)^{-1/2}+1+\frac{1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}).$

2.053. $\left((1-p^2)^{-1/2}-(1+p^2)^{-1/2}\right)^2+2(1-p^4)^{-1/2}.$

2.054. $\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

2.055. $\left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right).$

2.056. $\left(\frac{4}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}$.

2.057. $\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

2.058. $\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$; $a=1\frac{33}{40}$,

$b=0{,}625,\ c=3{,}2.$

2.059. $\left(\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}$.

2.060. $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$.

2. Užsak. Nr. 1941.

2.061. $\left(x^2+2x-\frac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\frac{2x^2+x+2}{3x+1}\right);\ x=7,(3).$

2.062. $\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right).$

2.063. $\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$

2.064. $\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$

2.065. $\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}).$

2.066. $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}.$

2.067. $\frac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\frac{a}{\sqrt[3]{b}}.$

2.068. $\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}};\ a=7,4,\ b=\frac{5}{37}.$

2.069. $\frac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}.$

2.070. $\frac{(a^2-b^2)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}.$

2.071. $\frac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}.$

2.072. $\frac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}.$

2.073. $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}.$

2.074. $\frac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}.$

2.075. $\frac{(x^{2/m}-9x^{2/n})\cdot(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)(mn)}}.$

2.076. $\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2,4}(\sqrt{15}+3).$

2.077. $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1};\ a=1-\sqrt{2},\ b=1+$
$+\sqrt{2}.$

2.078. $\left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\frac{(t-3)^2+12t}{2}.$

2.079. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt[4]{\frac{m^2}{4}}.$

2.080. $\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}.$

2.081. $\left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}.$

2.082. $\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}.$

2.083. $\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right).$

2.084. $\left(\frac{2-b}{b-1}+2\cdot\frac{a-1}{a-2}\right):\left(b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right);\ a=\sqrt{2}+0,8,\ b=$
$=\sqrt{2}-0,2.$

2.085. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

2.086. $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$

2.087. $\frac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$

2.088. $(\sqrt{1-x^2}+1):\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right).$

2.089. $\frac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\cdot\frac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}-2\sqrt[3]{n}}.$

2.090. $\frac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}.$

2.091. $\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\frac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}.$

2.092. $\left(x\sqrt[8]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}.$

2.093. $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right).$

2.094. $\frac{m^{4/3}-27m^{1/3}\cdot n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}.$

2.095. $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}}.$

2.096. $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right).$

2.097. $\frac{(\sqrt{x}+2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\frac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}.$

2.098. $\frac{1-\sqrt{2t}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}.$

2.099. $\frac{(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3})}{(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right).$

2.100. $\frac{(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z})^2\cdot(1+\sqrt{z})^2}{z-2+\frac{1}{z}}-z\sqrt{z}\sqrt{\frac{4}{z}+4+z}.$

2.101. $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}.$

2.102. $\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}.$

2.103. $(\sqrt{ab}-ab(a+\sqrt{ab})^{-1}):(2((ab)^{1/2}-b)\cdot(a-b)^{-1}).$

2.104. $\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{b-\frac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a^6}-\frac{4}{b^3}}+\frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):$
$:\frac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}.$

2.105. $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}+\sqrt{1-x^2}.$

2.106. $\frac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\times$
$\times\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}};\ a=\frac{4}{3},\ b=0{,}25.$

2.107. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right);\ x=\frac{1}{a-1}.$

2.108. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\times\right.$
$\left.\times\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right);\ a=0{,}75,\ b=\frac{4}{3}.$

2.109. $\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}})^2+$
$+\left(\left(-2\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3;\ a=3\frac{4}{7},\ x=0{,}28.$

2.110. $\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right);\ c=2,\ d=\frac{1}{4}.$

2.111. $\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$

2.112. $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}}\right).$

2.113. $\frac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}(x^{1/q}+x^{1/p})}+\frac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}.$

2.114. $\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4.$

2.115. $4ab+\frac{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)a^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}-\frac{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}.$

2.116. $\left(\left(\sqrt{mn}-\frac{mn}{m+\sqrt{mn}}:\frac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-\right.$
$\left.-\left(\frac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}\right).$

2.117. $\left((a^{1/2}-b^{1/2})^{-1}(a^{3/2}-b^{3/2})-\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}\right):$
$:\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+(a(1-a^2)^{-1/2})^2}.$

2.118. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}.$

2.119. $\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}.$

2.120. $\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}.$

2.121. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}.$

2.122. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$.

2.123. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$.

2.124. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

Patikrinkite, ar teisingos šios lygybės (**2.125—2.134**):

2.125. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:\left(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)$.

2.126. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

2.127. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$.

2.128. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$.

2.129. $\frac{25\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{2}{\sqrt{2}}+2}=-1$.

2.130. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}$.

2.131. $\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$.

2.132. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

2.133. $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

2.134. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

Atlikite nurodytą keitimą ir suprastinkite rezultatą (**2.135—2.145**):

2.135. $\frac{x^3-a^{-2/3}b^{-1}(a^2+b^2)x+b^{1/2}}{b^{3/2}x^2}$; $x=a^{2/3}b^{-1/2}$.

2.136. $\frac{1-b}{\sqrt{b}}x^2-2x+\sqrt{b}$; $x=\frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$.

2.137. $\left(\frac{x+2b}{x-2b}+\frac{x+2a}{x-2a}\right):\frac{x}{2}$; $x=\frac{4ab}{a+b}$.

2.138. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$; $x=\frac{\sqrt{7}-5}{2}$.

2.139. $\frac{(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)}{23}$; $z=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2.140. $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$; $x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

2.141. $\frac{(1-y)(y+2)}{y^2(y+1)^2}$; $y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2.142. $\frac{\frac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}$; $x=\sqrt{6}$.

2.143. $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$; $a>b>0$.

2.144. $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$; $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$; $a>0,\ b>0$.

2.145. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$; $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$; $0<\frac{b}{2}<a<b$.

Panaikinkite iracionalumą trupmenos vardiklyje (**2.146—2.151**):

2.146. $\frac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$.

2.147. $\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

2.148. $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

2.149. $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

2.150. $\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

2.151. $\frac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$.

2.152. Jeigu

$$z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a},$$

tai $z^3+3bz-2a=0$. Įrodykite.

2.153. $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$. Kam lygu $\sqrt{(8-a)(5+a)}$?

2.154. $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$. Kam lygi suma $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$ (dydžio x ieškoti nereikia)?

2.155. Reiškinį $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ pertvarkykite taip, kad gautute $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

2.156. Dviejų skaičių suma ir sandauga atitinkamai lygi 11 ir 21. Apskaičiuokite tų skaičių kubų sumą.

2.157. Apskaičiuokite šių reiškinių reikšmes:

a) $\frac{z^3}{3}-z,\ z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}};$

b) $x^3+3x,\ x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$

B grupė

Suprastinkite reiškinius. Jeigu nurodytos parametrų reikšmės, apskaičiuokite tų reiškinių reikšmes (**2.158—2.284**):

2.158. $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}.$

2.159. $\left(\left(\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):(a^{1/4}+b^{1/4}).$

2.160. $\frac{(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4})^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}.$

2.161. $\frac{a^3-3a^2+4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}};\ a>1,\ a\neq\frac{2}{\sqrt{3}}.$

2.162. $\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}.$

2.163. $\left(\frac{(x+\sqrt[3]{2ax^2})(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}.$

2.164. $\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}};\ x>3.$

2.165. $\frac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}};\ t>2.$

2.166. $\frac{\frac{|b-1|}{b}+b|b-1|+2-\frac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\frac{1}{b}}}.$

2.167. $\frac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}.$

2.168. $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|.$

2.169. $(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2)\frac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}.$

2.170. $\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}.$

2.171. $\frac{\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}.$

2.172. $\left(2-\frac{1}{4a^{-1}}-\frac{4}{a}\right)\times$

$\times\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\frac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}}\right).$

2.173. $\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}.$

2.174. $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)|x-2|}.$

2.175. $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}.$

2.176. $\frac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}.$

2.177. $\frac{2x-x|x-1|+x|x|+3}{|x|+x^2}.$

2.178. $\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}.$

2.179. $\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}.$

2.180. $\frac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}.$

2.181. $\frac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}.$

2.182. $\frac{(ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2))((ax+by)^2-4abxy)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b)^2}.$

2.183. $\frac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}.$

2.184. $\frac{2|a+5|-a+\frac{25}{a}}{3a^2+10a-25}.$

2.185. $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}.$

2.186. $\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}.$

2.187. $\frac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\frac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}.$

2.188. $\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot|2x^2-x-1|}.$

2.189. $\frac{|r-1|\cdot|r|}{r^2-r+1-|r|}.$

2.190. $\left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\frac{(z+4)^2-12}{z^3-8}\quad\frac{1}{z-2}\right):\frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}.$

2.191. $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$.

2.192. $\frac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{a}+a}$.

2.193. $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$.

2.194. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

2.195. $\frac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\frac{a^4+2a^3-a-2}{1+\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}}$.

2.196. $\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\frac{|x-1|}{x-1}$.

2.197. $\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$.

2.198. $\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}};\ b>2.$

2.199. $\left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):$

$:(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n})$.

2.200. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$.

2.201. $\sqrt{\frac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot(p+\sqrt[6]{p^3q^2})^{-1/2}$.

2.202. $\frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\frac{m-4\sqrt{m-4}}{2}$.

2.203. $\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2}\cdot(2x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}$.

2.204. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$

$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

2.205. $\left(\frac{bx+4+\frac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}+\frac{(4x^2-b^2)\cdot\frac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\frac{bx}{2}$.

2.206. $\frac{\sqrt[3]{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\frac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\frac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}(x^2-2y^2)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:$

$:\frac{\sqrt[3]{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x+y}$.

2.207. $\frac{(x^2-3x+2)^{-1/2}-(x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2}+(x^2+3x+2)^{-1/2}}-1+\frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x}$.

2.208. $\frac{((\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2-(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2)^2-(16m+4n)}{4m-n}+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}$.

2.209. $\left(\frac{x-9}{x+3x^{1/2}+9}:\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}$.

2.210. $\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}$.

2.211. $(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}$.

2.212. $(x^4-7x^2+1)^{-2}\cdot\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-14\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right);$

$x=\frac{\sqrt[4]{125}}{5}$.

2.213. $\frac{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\frac{1}{x}}$.

2.214. $\frac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}$.

2.215. $\left((z-3)(z+3)^{-1}-\frac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{3}-\frac{z}{18}-\frac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}$.

2.216. $\frac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}$.

2.217. $\frac{b^{-1/6}\cdot\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\cdot\sqrt[6]{a^9b^4}}:$

$:\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right)$.

2.218. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}.$

2.219. $\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\frac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\frac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}.$

2.220. $\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}.$

2.221. $\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\,(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3})}{2+\sqrt{1-x^2}}.$

2.222. $\left(\frac{2-n}{n-1}+4\cdot\frac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\cdot\frac{m-1}{n-1}+m^2\cdot\frac{2-n}{m-2}\right);$

$m=\sqrt[4]{400},\ n=\sqrt{5}.$

2.223. $\frac{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\frac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\frac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}.$

2.224. $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|.$

2.225. $\left(x^2-6x+1+\left(\frac{\frac{x-3}{1+3x}-\frac{x-5}{1+5x}}{1+\frac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}.$

2.226. $\left(\frac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{(x+3)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}.$

2.227. $\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}.$

2.228. $\sqrt{\left(y^2+\frac{4}{y^2}\right)^2-8\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+48}.$

2.229. $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}};\ x=2.$

2.230. $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}};\ x=3.$

2.231. $\frac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\frac{1-z}{1-\sqrt{1-z}};\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2.232. $\frac{a^2-3}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}.$

2.233. $\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$

2.234. $\frac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\frac{1+\sqrt{1-x}}{x-1};\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2.235. $\frac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}};\ x=\frac{a^2+1}{2a}.$

2.236. $\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z};\ z=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$

2.237. $\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2};\ x=\frac{a^3+1}{a^3-1}.$

2.238. $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}.$

2.239. $\left(\frac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{1/2}.$

2.240. $\frac{\sqrt{\left(\frac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}.$

2.241. $\left(\frac{4-2x+x^2}{4-2x}+\frac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\frac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}\cdot(x+2).$

2.242. $\left(\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}.$

2.243. $\left(\frac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\frac{9}{x^4}\right):\frac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}.$

2.244. $\frac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:\left(1+2\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right).$

2.245. $\frac{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}+((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}-((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}.$

2.246. $\frac{(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})-y\sqrt[4]{y})(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})((\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2+\sqrt[4]{xy})}.$

2.247. $\frac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{(1-\sqrt[3]{a})((\sqrt[3]{a}+1)^2-\sqrt[3]{a})(b^{1/3}+1)}+\sqrt[3]{ab}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right).$

2.248. $\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\times$

$\times\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}.$

2.249. $\sqrt[4]{\frac{x}{32}}\cdot\frac{(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2})^2+(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2})^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x})}{2-\sqrt[4]{2x^3}}$.

2.250. $\left(\frac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{2a^2+a}}\right)^{1/2}-(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^{-1}\cdot\sqrt{a+2}$.

2.251. $\frac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2+(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}}:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y}$.

2.252. $\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b}-2a+\frac{b}{a}-\frac{c}{ab}}}$; $a=4{,}8,\ b=1{,}2$.

2.253. $(4x-1)\cdot\left(\frac{1}{8x}\cdot\left((\sqrt{8x-1}+4x)^{-1}-(\sqrt{8x-1}-4x)^{-1}\right)\right)^{1/2}$.

2.254. $\left(\frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right)$; $x=\sqrt[4]{6},\ y=\sqrt[8]{2}$.

2.255. $\frac{2(a+(a+1)+(a+2)+\ldots+2a)}{a^2+3a+2}+\frac{6(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a-b)^{0,6}(a+2)}:\left((a^{1/2}-b^{1/2})(a-b)^{-2/5}\right)^{-1}$.

2.256. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2}{(x+x^{-1}-2)a^{-1/4}}-\frac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x)^{-1/2}}$.

2.257. $\left((a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2})\cdot(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5})^{-1}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}$.

2.258. $\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab})(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab})}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:\frac{(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b})^2+(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})b^{-1/4}}$.

2.259. $\left(\sqrt[3]{\frac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\frac{8z^3-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2z}{27}-\frac{1}{6z}}\right)^{-1}$.

2.260. $\frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\frac{2q^2}{p^2-q^2}\right)(p^3-pq^2)}-2q\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}$.

2.261. $\sqrt[3]{\frac{2x^2}{9+18x+9x^2}}\cdot\sqrt{\frac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}$.

2.262. $\frac{4-\sqrt[3]{a^2}}{(2+\sqrt[3]{ab})^2-(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b})^2}$; $a=\sqrt[7]{3},\ b=\sqrt{0{,}008}$.

2.263. $\frac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}$.

2.264. $\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}$.

2.265. $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}}$; $a=1{,}21$.

2.266. $\frac{\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4b+1}{a}}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}})^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}}$; $a=2{,}25$.

2.267. $\frac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}}\cdot(xy^{-2}+y^{-3/2})}{2x^2-y^{3/2}-xy+2xy^{1/2}}$.

2.268. $\frac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x})$.

2.269. $\frac{a^{3/2}+a^{3/4}-(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2})}{\sqrt{2(a+1-\sqrt{a^2+2a})}\cdot(a^2-a^{5/4}+a^{1/2})^{-1}}$.

2.270. $\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$.

2.271. $\left(\frac{3^{3/2}+\frac{1}{8}z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\frac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\frac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}$.

2.272. $\frac{(\sqrt{q^3}:\sqrt{p}+p)^{1/4}:\sqrt[3]{(p-q)^3}}{\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}+1\right)^{1/4}}$.

2.273. $\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$.

2.274. $\frac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}$.

2.275. $x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^3y(7+4\sqrt{3})}$.

2.276. $\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\right.$

$\left.-\sqrt{a-1}(\sqrt{a}+1)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}$.

2.277. $\left(\frac{a+a^{3/4}b^{1/2}+a^{1/4}b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}b^{1/2}+b}\cdot(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})+\right.$

$\left.+\frac{3\sqrt{b}(a^{1/2}-b)}{a^{-1/4}(a^{1/4}-\sqrt{b})}\right)^{-1/3}:(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b})^{-1}$.

2.278. $\left(\sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:$

$:\sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}$.

2.279. $\frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\times$

$\times\left(\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1}}+\frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right)$; $a>b>0$.

2.280. $\frac{2a(a+2b+\sqrt{a^2+4ab})}{(a+\sqrt{a^2+4ab})(a+4b+\sqrt{a^2+4ab})}$.

2.281. $\left(\frac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}}-\frac{(a^{1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}}\right)^{-2}\cdot\frac{\frac{1}{3}a^{1/12}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$.

2.282. $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)$; $0<x<1$.

2.283. $\frac{(pq^{-1}+1)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}$.

2.284. $\sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}}$; $y=\sqrt{ab}$.

2.285. Suprastinkite reiškinį $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, po to nubraižykite funkcijos y grafiką, kai $1\leqslant x<\infty$.

2.286. Su kuria k reikšme daugianarį $x^2+2(k-9)x+(k^2+3k+4)$ galima išreikšti pilnuoju kvadratu?

2.287. Su kuriomis a ir b reikšmėmis trinarį $16x^2+144x+(a+b)$ galima išreikšti pilnuoju kvadratu? Žinoma, jog $b-a=-7$.

2.288. Patikrinkite, ar skaičius $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ yra lygties $x^3+12x-8=0$ šaknis.

2.289. Daugianarį x^8-16 išreikškite antrojo laipsnio daugianarių sandauga.

2.290. Iš lygybių $u-v=a$, $u^2-v^2=b$, $u^3-v^3=c$ eliminavę u ir v, nustatykite, kaip susiję dydžiai a, b ir c.

Patikrinkite, ar teisingos šios lygybės (**2.291—2.304**):

2.291. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

2.292. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=$

$=\sqrt{20-4\sqrt{5}}$.

2.293. $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):$

$:(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5})+\sqrt[6]{5}=\sqrt{2}$.

2.294. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$.

2.295. $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.296. $\frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{-1/3}}+\frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{-1/3}}-2\sqrt{a-1}$.

2.297. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})=1$.

2.298. $\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

2.299. $\frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$. **2.300.** $\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$.

2.301. $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1$.

2.302. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

3. Užsak. Nr. 1941.

2.303. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}$.

2.304. $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=2\sqrt{5p-q}$.

2.305. Pertvarkę kairiąją lygybių pusę, įsitikinkite, kad:

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$;

b) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$.

2.306. Skaičių 19 išreikškite natūraliųjų skaičių kubų skirtumu. Įrodykite, kad tai padaryti galima vieninteliu būdu.

2.307. Suprastinkite sumą

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

2.308. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

2.309. Jeigu $a+b=1$, tai

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{1}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

Įrodykite.

2.310. Kokios turi būti A, B ir C reikšmės, kad su visomis leistinomis x reikšmėmis būtų teisinga lygybė

$$\frac{x^2+5}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}?$$

2.311. Įrodykite, kad: a) trijų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių kubų suma dalijasi iš 9; b) skaičius p^5-p dalijasi iš 5 su kiekviena natūraliąja p reikšme; c) skaičius k^3+5k dalijasi iš 3, kai $k\in N$.

C grupė

Suprastinkite reiškinius. Jeigu nenurodytos parametrų leistinųjų reikšmių sritys, raskite jas **(2.312—2.356):**

2.312. $\left(\dfrac{\dfrac{x^3-1}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x^3+1}}{\dfrac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\right)^{-1/2}$.

2.313. $\dfrac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$. **2.314.** $|x^2-1|+x\cdot|x+1|$.

2.315. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$.

2.316. $(x+2\sqrt{2x-4})^{-1/2}+(x-2\sqrt{2x-4})^{-1/2}$.

2.317. $\left(\dfrac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\dfrac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}\right)^{1/2}:\dfrac{\sqrt{mn}}{m-2n}$.

2.318. $\left(\sqrt{x^4-a^4}-\dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

2.319. $\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\dfrac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|$.

2.320. $\sqrt{\dfrac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}$.

2.231. $\left(\dfrac{(a^{3/2}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$.

2.322. $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2$.

2.323. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{x}+\dfrac{1}{2}}$.

2.324. $\sqrt{\dfrac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|$. **2.325.** $\dfrac{n^4-2n^3+4n^2+2n-5}{n^4-3n^3+7n^2-5n}$.

2.326. $\dfrac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}$.

2.327. $\dfrac{(x-1)\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}$. **2.328.** $\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}}$.

2.329. $\dfrac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}$. **2.330.** $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}$.

2.331. $\dfrac{\sqrt{3}x^{3/2}-5x^{1/3}+5x^{4/3}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}\cdot x^{5/6}+25x^{2/3}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}$.

2.332. $\left(1-\dfrac{2}{x}-\left(\dfrac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\dfrac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right):\right.$

$$\left.:\left(\frac{16-8x}{4-2x+x^2}-\frac{16+8x}{4+2x+x^2}\right)\right)^{1/2}.$$

2.333. $\left(\left(z^2-\dfrac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+12\right)^{1/4}:(z-1)$.

2.334. $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^{3/2}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{3/2}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}}$.

2.335. $\dfrac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}$; $z=\dfrac{2a}{a^2+1}$.

2.336. $\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{3/2}+x^2)}{\sqrt{2(x+y-\sqrt{x^2+2xy})}\cdot(x^{2/3}-x^{5/6}+x)}$.

2.337. $\dfrac{\sqrt[3]{a-3+3(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2})}}{\sqrt{2^{-2}-\frac{3}{2}a^{-1}+\left(\frac{3}{2a}\right)^2:(\sqrt[3]{9}+a^{2/3}+\sqrt[3]{3a})}}$.

2.338. $\dfrac{\sqrt[3]{8x-y-6(2\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2})}\cdot(4x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+y^{2/3})}{8x\sqrt[3]{y}-y^{4/3}}$.

2.339. $\left(\dfrac{a}{3(a^2+1)^{1/2}}-(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3})^{1/2}(2a^2+3+a\cdot\sqrt{4a^2+3})^{-1/2}\right)^2$.

2.340. $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}$.

2.341. $\dfrac{\sqrt{16z^2-z^{-2}-8}}{(2z-1)(4z^3-2z^2+z)^{-1}}-(z^3-1)$.

2.342. $\dfrac{(2x+5+4\sqrt{2x-1})^{-1/2}+(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}{(2x+5+4\sqrt{2x+1})^{-1/2}-(2x+5-4\sqrt{2x+1})^{-1/2}}$.

2.343. $\dfrac{\sqrt{4(x-\sqrt{y})+yx^{-1}}\cdot\sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[6]{4y^5}}$.

2.344. $\sqrt{\frac{1}{6}((3t+\sqrt{6t-1})^{-1}+(3t-\sqrt{6t-1})^{-1})\cdot|t-1|\cdot t^{-1/2}}$.

2.345. $\sqrt[4]{(x^2+4x^{-2})^2-8(x+2x^{-1})^2+48}\cdot(x^2-2)^{-1}$.

2.346. $\left(\dfrac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{1/2}$.

2.347. $\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\dfrac{2x^2}{|2x-1|}$; $x>0$.

2.348. $\left|\dfrac{|x-2|+4}{x-2}\right|\cdot(x^2-4)$. 2.349. $\left(\dfrac{x^8+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}$.

2.350. $\dfrac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}(9x^{-1}+4x-12)}$.

2.351. $\dfrac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2$.

2.352. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{1/2}-(x-3)^{1/2}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}$.

2.353. $(3a+\sqrt{6a-1})^{-1/2}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-1/2}$.

2.354. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\frac{1}{4p^2}-1}-\frac{1}{2p}\right)^{-1}}$.

2.355. $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}$.

2.356. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$.

2.357. Jeigu su skaičiais x, y, z, m, n, p teisingos lygybės $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$ ir $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, tai su tais pačiais skaičiais bus teisinga ir lygybė $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$. Įrodykite.

2.358. Išskaidykite dauginamaisiais reiškinį $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

2.359. Išskaidykite dauginamaisiais reiškinį $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

2.360. Dviejų teigiamųjų skaičių a ir b $(a>b)$ aritmetinis vidurkis m kartų didesnis už jų geometrinį vidurkį. Įrodykite, kad $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}$.

3 SKYRIUS
TRIGONOMETRINIŲ REIŠKINIŲ TAPATIEJI PERTVARKYMAI

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

To paties argumento trigonometrinių funkcijų sąsajos

(čia ir toliau užrašas $n \in \mathbf{Z}$ reiškia, kad n yra bet kuris sveikasis skaičius)

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1; \qquad (3.1)$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.2)$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad x \neq \pi n,\quad n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x=1,\quad x \neq \frac{\pi n}{2},\quad n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.4)$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.5)$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},\quad x \neq \pi n,\quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.6)$$

Sudėties formulės

$$\sin(x+y)=\sin x \cos y+\cos x \sin y; \qquad (3.7)$$

$$\sin(x-y)=\sin x \cos y-\cos x \sin y; \qquad (3.8)$$

$$\cos(x+y)=\cos x \cos y-\sin x \sin y; \qquad (3.9)$$

$$\cos(x-y)=\cos x \cos y+\sin x \sin y; \qquad (3.10)$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x+y \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.11)$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\ x,\ y,\ x-y \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.12)$$

Dvigubojo argumento formulės

$$\sin 2x=2 \sin x \cos x; \qquad (3.13)$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x; \qquad (3.14)$$

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbf{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.15)$$

Pusės argumento formulės

(sinuso ir kosinuso funkcijų laipsnio žeminimo formulės)

$$\sin^2 \frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}, \qquad (3.16) \qquad \cos^2 \frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}; \qquad (3.17)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\ x \neq \pi+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.18)$$

Sumos keitimo sandauga formulės

$$\sin x+\sin y=2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \qquad (3.19)$$

$$\sin x-\sin y=2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \qquad (3.20)$$

$$\cos x+\cos y=2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \qquad (3.21)$$

$$\cos x-\cos y=-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \qquad (3.22)$$

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y},\ x,\ y \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.23)$$

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y},\ x,\ y \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.24)$$

Sandaugos keitimo suma formulės

$$\sin x \sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)); \qquad (3.25)$$

$$\cos x \cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)); \qquad (3.26)$$

$$\cos x \cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)). \qquad (3.27)$$

$\sin x$, $\cos x$ ir $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ sąsajos

$$\sin x=\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},\ x \neq (2n+1)\pi,\quad n \in \mathbf{Z}; \qquad (3.28)$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},\ x \neq (2n+1)\pi,\quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (3.29)$$

Redukcijos formulės

Funkcijos pavadinimas nesikeičia				Funkcijos pavadinimas keičiasi			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$			$\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$			
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
	$\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$			

1 pavyzdys. Įrodykite tapatybę

$$\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{ctg} 2\alpha+\operatorname{tg} 6\alpha+\operatorname{ctg} 6\alpha=\frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}.$$

△ Kairiajai lygybės pusei pritaikę (3.2), (3.3), (3.1) ir (3.13) formules, randame:

$$A=\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{ctg} 2\alpha+\operatorname{tg} 6\alpha+\operatorname{ctg} 6\alpha=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}+\frac{\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha}=\frac{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin^2 6\alpha+\cos^2 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}+\frac{1}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha}=\frac{2}{\sin 4\alpha}+\frac{2}{\sin 12\alpha}=\frac{2(\sin 12\alpha+\sin 4\alpha)}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}.$$

Sinusų sumą pertvarkę pagal (3.19) formulę, gauname: $A=\frac{4\sin 8\alpha\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}$.

Kadangi $\sin 8\alpha=2\sin 4\alpha\cos 4\alpha$, tai $A=\frac{8\sin 4\alpha\cos^2 4\alpha}{\sin 4\alpha\sin 12\alpha}=\frac{8\cos^2 4\alpha}{\sin 12\alpha}$. ▲

2 pavyzdys. Suprastinkite reiškinį

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4}.$$

△ Pirmiesiems dviem dauginamiesiems taikome (3.27) formulę. Gauname:

$$A=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Vėl pritaikę (3.27) formulę, randame:

$$A=\frac{1}{4}\left(-\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{3\alpha}{4}\right)+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{4}.\ ▲$$

3 pavyzdys. Išreikškite sandauga reiškinį

$$A=2\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha-1.$$

△ Pritaikę (3.14) formulę, gauname: $2\cos^2 3\alpha-1=\cos 6\alpha$. Vadinasi,

$$A=\cos 6\alpha+\sqrt{3}\sin 6\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos 6\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6\alpha\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 6\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin 6\alpha\right).$$

Suskliaustasis reiškinys — tai skirtumo kosinuso formulės (3.10) dešinioji pusė. Todėl $A=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-6\alpha\right)$. ▲

4 pavyzdys. Patikrinkite, ar $\operatorname{tg} 20°+4\sin 20°=\sqrt{3}$.

△ Pritaikę (3.2), (3.13) ir (3.19) formules, gauname:

$$A=\operatorname{tg} 20°+4\sin 20°=\frac{\sin 20°+4\sin 20°\cos 20°}{\cos 20°}=\frac{\sin 20°+2\sin 40°}{\cos 20°}=$$

$$=\frac{(\sin 20°+\sin 40°)+\sin 40°}{\cos 20°}=\frac{2\sin 30°\cos 10°+\sin 40°}{\cos 20°}=\frac{\cos 10°+\sin 40°}{\cos 20°}.$$

Pagal redukcijos formulę reiškinį $\cos 10°$ keičiame reiškiniu $\sin 80°$ ir vėl taikome (3.19) formulę:

$$A=\frac{\sin 80°+\sin 40°}{2}=\frac{2\sin 60°\cos 20°}{\cos 20°}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.\ ▲$$

5 pavyzdys. Žinoma, kad $\sin x-\cos x=1{,}4$. Apskaičiuokite $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ reikšmę.

△ Patogu taikyti (3.28) ir (3.29) formules, bet reikia prisiminti, kad jos teisingos tik tada, kai $x\neq\pi(2n+1)$, $n\in Z$. Šiuo atveju x neįgyja tokių reikšmių. Jeigu būtų $x=\pi(2n+1)$, tai $\sin(\pi(2n+1))-\cos(\pi(2n+1))=0-(-1)\neq 1{,}4$. Funkcijas $\sin x$ ir $\cos x$ išreiškę funkcija $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, duotąją lygybę užrašome taip:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=1{,}4.$$

Pažymėkime $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ raide z. Tuomet gauname lygtį $z^2-5z+6=0$; iš čia $z_1=2$, $z_2=3$. Taigi $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$ ir $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$. ▲

6 pavyzdys. Suprastinkite reiškinį

$$A=\frac{1}{2}\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha).$$

△ Pagal redukcijos formulę $\sin^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos^2 2\alpha$. Reiškinį $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha$, užrašytą kubų suma, pertvarkome pagal (2.13) formulę:

$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(\cos^2\alpha)^3+(\sin^2\alpha)^3=$$
$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha).$$

Atsižvelgę į (3.1) ir (3.13) formules, gauname: $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$. Remdamiesi gauta lygtimi, reiškinį A užrašome taip:

$$A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

Sutraukę panašiuosius narius, gauname: $A=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$ (pagal (3.14) tapatybę). Taigi $A=\frac{1}{2}\cos 4\alpha$. ▲

7 pavyzdys. Suprastinkite reiškinį

$$A=\frac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha+\cos 12\alpha}$$

ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai $\operatorname{tg} 5\alpha=\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

△ Sugrupuokime skaitiklio bei vardiklio dėmenis ir pritaikykime (3.19) bei (3.21) formules. Gausime:

$$A=\frac{(\sin 8\alpha+\sin 12\alpha)+(\sin 9\alpha+\sin 11\alpha)+\sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha+\cos 12\alpha)+(\cos 9\alpha+\cos 11\alpha)+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha+2\sin 10\alpha\cos\alpha+\sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha+2\cos 10\alpha\cos\alpha+\cos 10\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 10\alpha(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}{\cos 10\alpha(2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+1)}=\operatorname{tg} 10\alpha=\frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}$$

(pritaikėme (3.15) formulę). Dešiniąją lygybės $\operatorname{tg} 5\alpha=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ pusę padauginkime ir padalykime iš $\sin 20^\circ$; tris kartus pritaikę (3.13) formulę, gauname:

$$\operatorname{tg} 5\alpha=\frac{(\sin 20^\circ\cos 20^\circ)\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{(\sin 40^\circ\cos 40^\circ)\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin(180^\circ-20^\circ)}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Vadinasi, $A=\frac{2\operatorname{tg} 5\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 5\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{64}}=\frac{16}{63}$. ▲

8 pavyzdys. Įrodykite, kad su kiekvienu dėmenų skaičiumi k ir $\alpha\neq 2\pi n\,(n\in \mathbf{Z})$ teisingos lygybės

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \qquad (a)$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \qquad (b)$$

Šias formules patogu taikyti pertvarkant kosinusų arba sinusų sumą, kurią sudaro daug dėmenų.

△ Sakykime, $S_k(\alpha)=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos k\alpha$. Abi šios lygybės puses padauginkime iš $2\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha+\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha.$$

Pritaikykime (3.27) formulę:

$$2S_k(\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=\left(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)+$$

$$+\left(\sin\frac{7\alpha}{2}-\sin\frac{5\alpha}{2}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2}-\sin\frac{\alpha(2k-1)}{2}\right).$$

Matome, kad galima sutraukti kiekvieno suskliausto reiškinio pirmąjį narį ir sekančio suskliausto reiškinio antrąjį narį. Taigi šios lygybės dešinioji pusė lygi skirtumui $\sin\frac{\alpha(2k+1)}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$. Pertvarkę jį pagal (3.20) formulę, gauname: $2S_k(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{k\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}$. Iš čia išplaukia $S_k(\alpha)$ lygybė, t. y. (a) formulė.

Analogiškai įrodoma, kad teisinga (b) lygybė. ▲

Pastabos. 1. Vietoj šio sprendimo metodo galima taikyti matematinės indukcijos metodą.

2. Gautų formulių nereikia įsiminti, tačiau pateiktas trigonometrinių reiškinių pertvarkymo būdas gali praversti sprendžiant analogiškus uždavinius.

A grupė

Įrodykite tapatybes (**3.001—3.062**):

3.001. $(1+\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)(1-\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha.$

3.002. $\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)=1.$

3.003. $\frac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right).$

3.004. $\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}.$

3.005. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$

3.006. $\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{21\alpha}{2}.$

3.007. $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}.$

3.008. $\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}.$

3.009. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos 3\alpha+\sin 3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right).$

3.010. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$

3.011. $(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

3.012. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\alpha\right).$

3.013. $\frac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$

3.014. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5}{2}\pi-8\alpha\right)$.

3.015. $\sin 2\alpha(1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha)+\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.016. $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0$.

3.017. $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha$.

3.018. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=$
$=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$.

3.019. $\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha$.

3.020. $\frac{1+\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$.

3.021. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{14}{3}\pi\right)+\sin\left(\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)=0$.

3.022. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

3.023. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

3.024. $\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha)}=1$.

3.025. $\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$.

3.026. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=\frac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-$
$-\cos^2(\alpha+180^\circ)$.

3.027. $\frac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}$.

3.028. $\frac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

3.029. $2\left(\sin^{-1}4\alpha-\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$.

3.030. $\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17}{8}\pi-2\alpha\right)=-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

3.031. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta)$.

3.032. $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

3.033. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha$.

3.034. $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}$.

3.035. $\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

3.036. $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$.

3.037. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$.

3.038. $\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}=1$.

3.039. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=-1$.

3.040. $\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2$.

3.041. $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha$.

3.042. $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)=$
$=\sin 2\alpha$.

3.043. $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

3.044. $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$.

3.045. $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}-\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha=\sin 8\alpha$.

3.046. $\frac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha$.

3.047. $\operatorname{ctg}(45^\circ+2\alpha)=\frac{\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}$.

3.048. $\frac{(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1)(\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1)}{(\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1)(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=1$.

3.049. $\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\frac{2}{\sin 2\alpha}$.

3.050. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=$
$=\sin 2\alpha$.

3.051. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$.

3.052. $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3.053. $\sin\alpha\sin(x-\alpha)+\sin^2\left(\frac{x}{2}-\alpha\right)=\sin^2\frac{x}{2}$.

3.054. $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

3.055. $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}-2(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)-1=0$.

3.056. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

3.057. $\cos^4 x+\sin^2 y+\frac{1}{4}\sin^2 2x-1=\sin(y+x)\sin(y-x)$

3.058. $$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}-$$
$$-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sin\left(2\alpha\quad\frac{\pi}{3}\right).$$

3.059. $$\frac{\operatorname{tg}(\pi+2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}+$$
$$+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\quad 2\alpha\right).$$

3.060. $\operatorname{tg}4\alpha+\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$.

3.061. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=2\cos^{-2}\alpha$.

3.062. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

Suprastinkite reiškinius (**3.063—3.113**):

3.063. $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

3.064. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha$.

3.065. $$\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}.$$

3.066. $$\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

3.067. $\cos\alpha(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$.

3.068. $\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

3.069. $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}$.

3.070. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.071. $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)$.

3.072. $\dfrac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

3.073. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

3.074. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

3.075. $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2$.

3.076. $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

3.077. $\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11}{8}\pi+\frac{\alpha}{4}\right)$.

3.078. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.079. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

3.080. $\dfrac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$.

3.081. $\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3.082. $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

3.083. $\dfrac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$.

3.084. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}.$$

3.085. $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

3.086. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$.

3.087. $$\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3.088. $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

3.089. $\frac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\frac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}$.

3.090. $\frac{(1+\mathrm{tg}^2(\alpha-90^\circ))(\sin^{-2}(\alpha-270^\circ)-1)}{(1+\mathrm{ctg}^2(\alpha+270^\circ))\cos^{-2}(\alpha+90^\circ)}$.

3.091. $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\mathrm{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

3.092. $\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 3.093. $\frac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha-1}$.

3.094. $\frac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\mathrm{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\mathrm{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}$.

3.095. $\frac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

3.096. $\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-$

$-\frac{1}{2\,\mathrm{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.097. $\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}$.

3.098. $\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right)$.

3.099. $\frac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-4+4\sin^2\alpha}$.

3.100. $\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17}{8}\pi-\alpha\right)$.

3.101. $\mathrm{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9}{4}\pi-2\alpha\right)\right)$.

3.102. $\frac{\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha}$.

3.103. $\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}$. 3.104. $\frac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\mathrm{ctg}\,4\alpha-\mathrm{tg}\,2\alpha}$.

3.105. $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$.

3.106. $\frac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.107. $\frac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}$.

3.108. $\frac{4\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.109. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

3.110. $\frac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\cos 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

3.111. $\frac{\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}$.

3.112. $\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}$.

3.113. $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Išreikškite sandauga (**3.114—3.147**):

3.114. $\sin 4\alpha-2\cos^2 2\alpha+1$. 3.115. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+2$.

3.116. $\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha$. 3.117. $\frac{\mathrm{tg}^4\alpha-\mathrm{tg}^6\alpha}{\mathrm{ctg}^4\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

3.118. $1-3\,\mathrm{tg}^2(\alpha+270^\circ)$. 3.119. $1-3\,\mathrm{tg}^2(\alpha-180^\circ)$.

3.120. $\mathrm{tg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\mathrm{ctg}^2\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

3.121. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)$.

3.122. $\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ)$.

3.123. $\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

3.124. $3-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$. 3.125. $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

4. Užsak. Nr. 1941.

3.126. $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+3\alpha\right)$.

3.127. $1+\cos(2\alpha+270°)+\sin(2\alpha+450°)$.

3.128. $1-\cos(2\alpha-270°)+\sin(2\alpha+270°)$.

3.129. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-1$.

3.130. $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi)$.

3.131. $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)$.

3.132. $\frac{\sin\alpha-2\cos 3\alpha-\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}$.

3.133. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-1$.

3.134. $\frac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha}$.

3.135. $-\cos 5\alpha\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.

3.136. $\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\sin 6\alpha-\sin 4\alpha\sin 2\alpha$.

3.137. $\frac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}$.

3.138. $\sin 5\alpha-\sin 6\alpha-\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$.

3.139. $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha$.

3.140. $\frac{\sin 13\alpha+\sin 14\alpha+\sin 15\alpha+\sin 16\alpha}{\cos 13\alpha+\cos 14\alpha+\cos 15\alpha+\cos 16\alpha}$.

3.141. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$.

3.142. $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha$.

3.143. $\cos 5\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 12\alpha$.

3.144. $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$.

3.145. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3.146. $1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha$.

3.147. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha$.

Įrodykite, kad šios lygybės yra teisingos (**3.148—3.152**):

3.148. $(\sin 160°+\sin 40°)(\sin 140°+\sin 20°)+$
$+(\sin 50°-\sin 70°)(\sin 130°-\sin 110°)=1$.

3.149. $(\cos 34°)^{-1}+(\operatorname{tg} 56°)^{-1}=\operatorname{ctg} 28°$.

3.150. $\frac{\cos 28°\cos 56°}{\sin 2°}+\frac{\cos 2°\cos 4°}{\sin 28°}=\frac{\sqrt{3}\sin 38°}{4\sin 2°\sin 28°}$.

3.151. $1-2\sin 50°=0{,}5\cos^{-1}160°$.

3.152. $(\cos 70°+\cos 50°)(\cos 310°+\cos 290°)+$
$+(\cos 40°+\cos 160°)(\cos 320°-\cos 380°)=1$.

Apskaičiuokite (**3.153—3.166**):

3.153. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$.

3.154. $\operatorname{tg} 435°+\operatorname{tg} 375°$.

3.155. $\operatorname{tg} 255°-\operatorname{tg} 195°$.

3.156. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

3.157. $\operatorname{ctg}\frac{13}{12}\pi-\operatorname{ctg}\frac{5}{12}\pi$.

3.158. $\sin\left(2\alpha+\frac{5}{4}\pi\right)$, kai $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

3.159. $\cos\left(2\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)$, kai $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

3.160. $\frac{5}{6+7\sin 2\alpha}$, kai $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

3.161. $\frac{2}{3+4\cos 2\alpha}$, kai $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

3.162. $\sin\alpha$, kai $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$.

3.163. $\sin 2\alpha$, kai $\sin\alpha-\cos\alpha=p$.

3.164. $2-13\cos 2\alpha+\sin^{-1}2\alpha$, kai $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{5}$.

3.165. $1+5\sin 2\alpha-3\cos^{-1}2\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

3.166. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)$, kai $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+2\alpha\right)=\frac{9}{11}$.

3.167. Yra žinoma, kad $\operatorname{tg} 2\alpha=-\frac{12}{5}$. Raskite skaičių $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

3.168. A ir B — stačiojo trikampio smailieji kampai. Įrodykite, kad $\sin 2A+\sin 2B=4\sin A\sin B$.

3.169. Žinoma, kad $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{9}{19}$ ir $\operatorname{tg}\alpha=-4$. Raskite skaičių $\beta\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$.

3.170. Žinoma, kad $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Apskaičiuokite reiškinio $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ reikšmę.

3.171. Duota: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Apskaičiuokite $\alpha+\beta$.

3.172. Žinoma, kad $\sin(\alpha-90^\circ)=-\frac{2}{3}$ ir $270^\circ<\alpha<360^\circ$. Apskaičiuokite $\operatorname{ctg}2\alpha$.

3.173. Jeigu α ir β tenkina nelygybes $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ ir $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, tai $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$. Įrodykite.

3.174. Žinoma, kad $\cos(\alpha-90^\circ)=0{,}2$ ir $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Apskaičiuokite $\operatorname{tg}2\alpha$.

3.175. Jeigu α ir β tenkina nelygybes $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ ir $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{2}{3}$, tai $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$. Įrodykite.

3.176. Duota: $\operatorname{ctg}\alpha=4$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{5}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Apskaičiuokite $\alpha+\beta$.

3.177. Apskaičiuokite $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$, kai $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

3.178. Apskaičiuokite $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$, kai $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

3.179. Jeigu $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{14}$ ir α, β — smailieji kampai, tai $\alpha+\beta=60^\circ$. Įrodykite.

3.180. Įrodykite, kad reiškinys $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ jo apibrėžimo srityje yra neneigiamas.

3.181. Iš lygybių $x=\operatorname{tg}^2\alpha$, $y=\sin^2\alpha$ eliminuokite α.

3.182. Įrodykite, kad $\cos 2-\cos 8<0$.

3.183. Dydžiai α, β, γ sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad $\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\beta$.

3.184. Duota trupmena

$$\frac{5}{1+\sqrt[3]{32\cos^4 15^\circ-10-8\sqrt{3}}}.$$

Pirmiausia suprastinkite pošaknio reiškinį, po to — trupmeną.

3.185. Reiškinį $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$ išreikškite dydžiu m; čia $m=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

B grupė

Įrodykite tapatybes (**3.186—3.239**):

3.186. $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$.

3.187. $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

3.188. $\sin^{-1}2\alpha\sin^{-1}(60^\circ-2\alpha)\sin^{-1}(60^\circ+2\alpha)=4\sin^{-1}6\alpha$.

3.189. $\frac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{15}{2}\alpha$.

3.190. $$\frac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

3.191. $$\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}=\frac{1}{8}.$$

3.192. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha-2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin(4\pi+\alpha))\cos^{-1}\alpha+2\cos 2\alpha}=$$
$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

3.193. $$\frac{2\cos\left(\frac{1}{6}\pi-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

3.194. $$\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.195. $$1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.196. $$\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}=-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

3.197. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)=$
$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right).$

3.198. $\dfrac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$

3.199. $1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=$
$=4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$

3.200. $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)\times$
$\times\sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)=2.$

3.201. $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-1}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$

3.202. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)(1-\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha.$

3.203. $\dfrac{\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

3.204. $\operatorname{ctg}\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-1}(4\alpha-3\pi)=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$

3.205. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$
$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$

3.206. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$

3.207. $3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=8\cos^4 2\alpha.$

3.208. $\dfrac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

3.209. $\dfrac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$

3.210. $3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)=8\sin^4 2\alpha.$

3.211. $\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha=3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.$

3.212. $\dfrac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha}.$

3.213. $\dfrac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=-1.$

3.214. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$

3.215. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\dfrac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

3.216. $\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha+1)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=$
$=\sin 6\alpha\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{tg}6\alpha.$

3.217. $\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

3.218. $\dfrac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}\frac{15}{2}\alpha.$

3.219. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$

3.220. $\dfrac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha.$

3.221. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha.$

3.222. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha.$

3.223. $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=\cos 2\alpha.$

3.224. $\sin^2\varphi-\cos^2(\alpha-\varphi)+2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\cos^2\alpha.$

3.225. $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha.$

3.226. $\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta.$

3.227. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)\right)}=\operatorname{tg}4\alpha.$

3.228. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha.$

3.229. $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=-1.$

3.230. $\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}.$

3.231. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8}.$

3.232. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\frac{\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha)}{4}$.

3.233. $\operatorname{ctg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(150^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$.

3.234. $4\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos 6\alpha$.

3.235. $\dfrac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=1$.

3.236. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha$.

3.237. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$.

3.238. $1+\sin\left(3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos 2\alpha+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=$
$=2\sin^2\frac{5\alpha}{2}$.

3.239. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

Suprastinkite reiškinius **(3.240—3.284)**:

3.240. $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$.

3.241. $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}}$; $90^\circ<\alpha<135^\circ$.

3.242. $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

3.243. $(\cos 8\alpha\operatorname{tg}4\alpha-\sin 8\alpha)(\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha+\sin 8\alpha)$.

3.244. $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$.

3.245. $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\frac{7}{6}\pi+2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}$.

3.246. $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 10\alpha-\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}$.

3.247. $\left(1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\times$
$\times\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

3.248. $\dfrac{4\sin(\pi-2x)\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)}{1+\cos 8x}+\dfrac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}$.

3.249. $\dfrac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}=1$.

3.250. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1$.

3.251. $\dfrac{\sin(80^\circ+4\alpha)}{4\sin(20^\circ+\alpha)\sin(70^\circ-\alpha)}$.

3.252. $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$.

3.253. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}$.

3.254. $4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$.

3.255. $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha$.

3.256. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)+1}$.

3.257. $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.258. $\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)$.

3.259. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

3.260. $\dfrac{4\sin^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-1}$.

3.261. $\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.262. $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$.

3.263. $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

3.264. $\dfrac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}$.

3.265. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+\sin\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

3.266. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right)$.

3.267. $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.268. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}$.

3.269. $\dfrac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}$.

3.270. $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}$.

3.271. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1)}$.

3.272. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ir $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$.

3.273. $\cos^6\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\right.$
$\left.-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2$.

3.274. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

3.275. $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}}$, kai: a) $0<\alpha<\pi$; b) $\pi<\alpha<2\pi$.

3.276. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$.

3.277. $\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha)$.

3.278. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$,
kai: a) $90^\circ<\alpha<180^\circ$; b) $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

3.279. $\left(1+\cos\frac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{4}$.

3.280. $\dfrac{\sin^2 4\alpha+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4-\sin^2 4\alpha-4\sin^2 2\alpha}$.

3.281. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)-\sin^6\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)+\cos^6\left(\frac{7}{2}\pi-2\alpha\right)$.

3.282. $\dfrac{\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}\times$
$\times\dfrac{\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha}{\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha}$.

3.283. $\cos(270^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{tg}(240^\circ-2\alpha)(2\cos 4x-1)$.

3.284. $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

Išreikškite sandauga (**3.285—3.331**):

3.285. $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

3.286. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-2\cos^2 2\alpha$.

3.287. $3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha-8\cos^4 2\alpha$.

3.288. $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x+3$.

3.289. $\operatorname{tg}^4 x-4\operatorname{tg}^2 x+3$.

3.290. $6\sin^2 2\alpha-1-\cos 4\alpha$.

3.291. $\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$, kai $0^\circ<\alpha\leqslant 180^\circ$.

3.292. $2\cos^2 2\alpha+3\cos 4\alpha-3$.

3.293. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

3.294. $\dfrac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos 4\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}$.

3.295. $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$.

3.296. $\sin^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2 2\beta$.

3.297. $\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta$.

3.298. $2+\operatorname{ctg}\frac{5\pi+\alpha}{4}\left(1+\cos\frac{\alpha-\pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}-2\pi\right)-$
$-4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)$.

3.299. $2-\dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}$.

3.300. $2-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha$.

3.301. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)}-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$.

3.302. $\dfrac{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$.

3.303. $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$.

3.304. $1+\cos\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$.

3.305. $4\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(2\alpha-\pi)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)$.

3.306. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$,

kai: a) $0°<\alpha<90°$; b) $90°<\alpha<180°$.

3.307. $2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\dfrac{4\,\mathrm{tg}\,2\alpha(1-\mathrm{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha(1+\mathrm{tg}^2 2\alpha)^2}$.

3.308. $\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\beta-\pi)$.

3.309. $1-\cos(\pi-8\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)$.

3.310. $\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha$.

3.311. $\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+$
$+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$.

3.312. $2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1$.

3.313. $\dfrac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-1}{1+\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(6\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.314. $\dfrac{\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha+\sin\alpha-\cos 6\alpha}$.

3.315. $\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha$.

3.316. $\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)$.

3.317. $\dfrac{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}$.

3.318. $\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\,\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}$.

3.319. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha$.

3.320. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-$
$-\mathrm{tg}\,\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

3.321. $\cos^2\left(\frac{5}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi+\alpha\right)$.

3.322. $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{9}{4}\pi-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)$.

3.323. $\sin\alpha\sin^2(\alpha-270°)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)+$
$+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270°)(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)$.

3.324. $\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha$.

3.325. $\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha$.

3.326. $\cos^2\dfrac{n\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{m\alpha}{2}$.

3.327. $1+\mathrm{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

3.328. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+2\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}$.

3.329. $\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)$.

3.330. $\sin\alpha-\left(\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2$.

3.331. $\mathrm{tg}\,210°+\mathrm{ctg}\,210°+\mathrm{tg}\,220°+\mathrm{ctg}\,220°$.

Įrodykite, kad šios lygybės yra teisingos (**3.332—3.354**):

3.332. $\dfrac{\sin 24°\cos 6°-\sin 6°\sin 66°}{\sin 21°\cos 39°-\sin 39°\cos 21°}=-1$.

3.333. $\dfrac{\sin 20°\cos 10°+\cos 160°\cos 100°}{\sin 21°\cos 9°+\cos 159°\cos 99°}=1$.

3.334. $\dfrac{\cos 63°\cos 3°-\cos 87°\cos 27°}{\cos 132°\cos 72°-\cos 42°\cos 18°}=-\mathrm{tg}\,24°$.

3.335. $\dfrac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 41°-\cos 49°\cos 19°}=-1$.

3.336. $\dfrac{\cos 66°\cos 6°+\cos 84°\cos 24°}{\cos 65°\cos 5°+\cos 85°\cos 25°}=1$.

3.337. $\sin^2 70°\sin^2 50°\sin^2 10°=\dfrac{1}{64}$.

3.338. a) $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; b) $\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3.339. a) $\cos 36°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$; b) $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3.340. $\mathrm{ctg}\,10°\,\mathrm{ctg}\,50°\,\mathrm{ctg}\,70°=\mathrm{ctg}\,30°$.

3.341. $\dfrac{\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°}{\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°}=3$.

3.342. $\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=\dfrac{1}{16}$.

3.343. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

3.344. $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}$.

3.345. $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

3.346. $\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ$.

3.347. $8 \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = 1$.

3.348. $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 8$.

3.349. $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = 1$.

3.350. $\cos 70^\circ + 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \cos^2 35^\circ$.

3.351. $1 - \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) - \sin^2 \frac{3}{2}\alpha + \cos^2 \frac{3}{2}\alpha =$

$= 2\sqrt{2} \cos \frac{3}{2}\alpha \sin\left(\frac{3}{2}\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

3.352. $\dfrac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right)}{4 \sin(5\pi - 3\alpha) \cos(\alpha - 2\pi)} = \cos 2\alpha$.

3.353. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

3.354. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$.

Apskaičiuokite (**3.355—3.367**):

3.355. $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.

3.356. $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

3.357. $\cos \frac{3\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5}$.

3.358. $\dfrac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ}$.

3.359. $\dfrac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \cos 21^\circ}$.

3.360. $\dfrac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ - \cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} - \operatorname{tg} 164^\circ$.

3.361. $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.

3.362. $\dfrac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha + 1}{8 \sin \alpha + 9 \cos \alpha - 1}$, kai $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4$.

3.363. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - x\right)$, kai $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{3}{4}$.

3.364. $\sin \frac{\alpha+\beta}{2}$ ir $\cos \frac{\alpha+\beta}{2}$, kai $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$; $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$; $\frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$ ir $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

3.365. $\cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, kai $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{27}{65}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{7}{9}$; $\frac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$ ir $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.

3.366. $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, kai $\sin \alpha - \cos \alpha = n$.

3.367. $\dfrac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha}$, kai $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

A, *B* ir *C* — trikampio kampai. Įrodykite, jog šios lygybės yra teisingos (**3.368—3.374**):

3.368. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

3.369. $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$.

3.370. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

3.371. $\dfrac{\sin C}{\cos A \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$.

3.372. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4 \cos \frac{3}{2}A \cos \frac{3}{2}B \cos \frac{3}{2}C$.

3.373. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$.

3.374. $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$.

3.375. Yra žinoma, kad $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Apskaičiuokite $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

3.376. Raskite $\dfrac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha}$, kai $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$.

3.377. Apskaičiuokite reiškinio $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ reikšmę, kai $\sin \alpha + \cos \alpha = m$.

3.378. Yra žinoma, kad $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{p}{q}$. Raskite $\operatorname{ctg} \beta$.

3.379. Yra žinoma, kad $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Raskite $\sin^6\alpha+$ $+\cos^6\alpha$.

3.380. Yra žinoma, kad $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$. Raskite $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ir te $\sin 2\alpha$.

3.381. Yra žinoma, kad $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ ir skaičius α tenkina nelygybes: a) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; b) $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$. Apskaičiuokite $\cos 2\alpha$.

3.382. Yra žinoma, kad $2\operatorname{tg}^2\alpha-7\operatorname{tg}\alpha+3=0$ ir skaičius α tenkina nelygybes: a) $\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}$; b) $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Apskaičiuokite $\sin 2\alpha$.

3.383. Yra žinoma, kad $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}$. Raskite $\operatorname{tg}\beta$.

3.384. Įrodykite, kad reiškinys

$$\frac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}$$

nepriklauso nuo α; čia $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{12}$.

3.385. Įrodykite, kad $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, kai $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

3.386. Įrodykite, kad reiškinys $\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+$ $+\cos\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)$ nepriklauso nuo α, kai $\alpha\neq\frac{\pi}{8}(4n+3)$.

3.387. Įrodykite, kad reiškinys

$$\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$$

nepriklauso nuo α, kai $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}$.

3.388. Įrodykite, kad reiškinys $\sin(250°+\alpha)\cos(200°-\alpha)-$ $-\cos 240°\cos(220°-2\alpha)$ nepriklauso nuo α.

3.389. Įrodykite, kad reiškinys $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha+\varphi)-$ $-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)$ nepriklauso nei nuo α, nei nuo φ.

3.390. Išveskite formulę $\cos(n+1)\alpha=2\cos\alpha\cos n\alpha-$ $-\cos(n-1)\alpha$; čia n — bet kuris realusis skaičius. Remdamiesi šia formule, $\cos 3\alpha$ ir $\cos 4\alpha$ išreikškite kintamojo $\cos\alpha$ daugianariais.

3.391. Įrodykite, kad $4\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\alpha\neq\pi n$; $\alpha\neq(2n+1)\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$.

3.392. Duota: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$; $\alpha+\beta\neq2\pi n$, $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\beta}{2}\neq\frac{\pi k}{2}$ $(n\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{Z})$. Raskite $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

3.393. Įrodykite, kad funkcija $f(\alpha)=\frac{p\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+$ $+\frac{p\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ yra pastovi, kai p — pastovus.

3.394. Duota funkcija $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$. Apskaičiuokite $f(\alpha)$, kai $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$.

3.395. Jeigu $\alpha+\beta=60°$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$, tai $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\leqslant\frac{1}{3}$. Įrodykite.

C grupė

Įrodykite tapatybes **(3.396—3.409):**

3.396. $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

3.397. $\operatorname{ctg}(270°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150°-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha$.

3.398. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}$.

3.399. $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=-2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.400. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\times$ $\times\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$.

3.401. $\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos^3 4\alpha$.

3.402. $8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

3.403. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.

3.404. $\frac{8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1}{8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1}=-\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3.405. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}$.

5. Užsak. Nr. 1941.

3.406. $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 4\alpha - \ldots - 2^n \operatorname{tg} 2^n\alpha = 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1}\alpha$; čia n — bet kuris natūralusis sveikasis skaičius arba nulis.

3.407. $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha = \dfrac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$; $n \in N$.

3.408. $\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha = \dfrac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha} + \dfrac{n}{2}$; $n \in N$.

3.409. $\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha}$; $n \in N$.

Suprastinkite reiškinius **(3.410—3.412):**

3.410. $\sin^3 2\alpha \cos 6\alpha + \cos^3 2\alpha \sin 6\alpha$.

3.411. $3 \sin \alpha \cos 3\alpha + 9 \sin \alpha \cos \alpha - \sin 3\alpha \cos 3\alpha - 3 \sin 3\alpha \cos \alpha$.

3.412. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 1$.

Išreikškite sandauga **(3.413—3.415):**

3.413. $\sin^3 \alpha \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \sin 3\alpha$.

3.414. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos^{-2}\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin^{-2}\alpha - 1}\right) + \operatorname{ctg} 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$.

3.415. $\cos 22\alpha + 3 \cos 18\alpha + 3 \cos 14\alpha + \cos 10\alpha$.

Įrodykite, kad šios lygybės yra teisingos **(3.416—3.440):**

3.416. $\cos \dfrac{\pi}{33} \cos \dfrac{2\pi}{33} \cos \dfrac{4\pi}{33} \cos \dfrac{8\pi}{33} \cos \dfrac{16\pi}{33} = \dfrac{1}{32}$.

3.417. $3 \sin \dfrac{2\pi}{17} + \sin \dfrac{4\pi}{17} - \sin \dfrac{6\pi}{17} - \dfrac{1}{2} \sin \dfrac{8\pi}{17} = 8 \sin^3 \dfrac{2\pi}{17} \cos^2 \dfrac{\pi}{17}$.

3.418. $\cos \dfrac{2\pi}{31} \cos \dfrac{4\pi}{31} \cos \dfrac{8\pi}{31} \cos \dfrac{16\pi}{31} \cos \dfrac{32\pi}{31} = \dfrac{1}{32}$.

3.419. $\operatorname{tg} 20^\circ \cos^{-1} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \cos^{-1} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \cos^{-1} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ \cos^{-1} 80^\circ = 48$.

3.420. $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{3}{256}$.

3.421. $\cos \dfrac{\pi}{15} \cos \dfrac{2\pi}{15} \cos \dfrac{3\pi}{15} \ldots \cos \dfrac{12\pi}{15} \cos \dfrac{13\pi}{15} \cos \dfrac{14\pi}{15} = -\dfrac{1}{2^{14}}$.

3.422. $\cos \dfrac{\pi}{15} \cos \dfrac{2\pi}{15} \cos \dfrac{3\pi}{15} \cos \dfrac{4\pi}{15} \cos \dfrac{5\pi}{15} \cos \dfrac{6\pi}{15} \cos \dfrac{7\pi}{15} = \dfrac{1}{2^7}$.

3.423. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = 0{,}5 \sin 25^\circ \sin^{-1} 5^\circ$.

3.424. $\operatorname{ctg} 80^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ = 1$.

3.425. $\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ = \sqrt{3}$.

3.426. $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ$.

3.427. $\cos 50^\circ + 8 \cos 200^\circ \cos 220^\circ \cos 80^\circ = 2 \sin^2 65^\circ$.

3.428. $\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \dfrac{1}{4}$.

3.429. $\sin^2\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$.

3.430. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg} \dfrac{1}{2} - \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$.

3.431. $\sin\left(2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{15}{17}\right) = \dfrac{7}{5}$.

3.432. $\sin\left(2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{15}{17}\right) = \dfrac{1}{5}$.

3.433. $\cos(2 \operatorname{arctg} 2) - \sin(4 \operatorname{arctg} 3) = \dfrac{9}{25}$.

3.434. $\arccos \dfrac{36}{85} - \arccos \dfrac{15}{17} = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{4}{5}$.

3.435. $\dfrac{\pi}{2} + \arccos \dfrac{36}{85} = \arccos \dfrac{15}{17} + \arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

3.436. $\cos(2 \operatorname{arcctg} 7) = \sin(4 \operatorname{arcctg} 3)$.

3.437. $\cos \dfrac{11\pi}{5} - \cos \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$.

3.438. $\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ = \dfrac{1}{16}$.

3.439. $\operatorname{tg} 830^\circ + \operatorname{tg} 770^\circ + \operatorname{tg} 740^\circ = \operatorname{tg} 470^\circ \operatorname{tg} 410^\circ \operatorname{tg} 380^\circ$.

3.440. $\operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 54^\circ + \operatorname{tg} 54^\circ \operatorname{tg} 12^\circ = 1$.

Apskaičiuokite **(3.441—3.462):**

3.441. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{11}{4}\pi + \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{2b}{a}\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{11}{4}\pi - \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{2b}{a}\right)$.

3.442. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{2a}{b}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{2a}{b}\right)$.

3.443. $\operatorname{ctg} \dfrac{5\pi}{4} - 2 \sin^2\left(\dfrac{5}{2}\pi + \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$.

3.444. $\cos^6\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{3}{5}\right) - \cos^6\left(\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{4}{5}\right)$.

3.445. $\dfrac{1}{4} - \cos^4\left(\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{4}{5}\right)$.

3.446. $\dfrac{1}{4} - \cos^4\left(\dfrac{3}{2}\pi - \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{3}{5}\right)$.

3.447. $\arccos(\cos(2 \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

3.448. $\arcsin(\cos(2 \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

3.449. $\operatorname{tg}\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \arccos \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$; čia $a < 0$.

3.450. $\cos^6\left(\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{3}{5}\right) + \cos^6\left(\dfrac{7\pi}{2} - \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{4}{5}\right)$.

3.451. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

3.452. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{1}{4} \arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$.

3.453. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5}{4}\pi + \dfrac{1}{4} \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$.

3.454. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg} \dfrac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

3.455. $\mathrm{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

3.456. $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\,\mathrm{arctg}(-2)\right)$.

3.457. $\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.458. $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-3\,\mathrm{arcctg}(-2)\right)$.

3.459. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\,\mathrm{arcctg}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.460. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\,\mathrm{arctg}(-2)\right)$.

3.461. $\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)$.

3.462. $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\,\mathrm{arctg}(-2)\right)$.

3.463. $\sin x-\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$. Apskaičiuokite $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$.

3.464. Įrodykite: kai $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin\gamma=\frac{3}{\sqrt{11}}$ (α, β ir γ — smailieji teigiami kampai), tai $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

3.465. $\mathrm{tg}\,\alpha=m$. Raskite $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\times$ $\times\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right)$.

3.466. $\cos 2\alpha=m$. Raskite $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

3.467. Raskite $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, kai $\cos 2\alpha=m$.

3.468. Raskite reiškinio $\frac{\sin 4\alpha+\sin 10\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha}$ reikšmę, kai $\sin\alpha-\cos\alpha=m$.

3.469. $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5}$ ir $0<x<\frac{\pi}{2}$. Apskaičiuokite $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

3.470. Sakykime, A, B ir C — trikampio kampai. Įrodykite, kad $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2$.

3.471. Jeigu $\cos 2\alpha=\cos 2\beta\cos 2\gamma$, tai $1+\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)\,\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\sin^{-2}\gamma$. Įrodykite.

3.472. Sakykime, A, B ir C — trikampio kampai. Įrodykite, kad

$$\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$$
$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C;$$

čia n — sveikasis skaičius.

3.473. Sakykime, A, B ir C — trikampio kampai. Įrodykite, kad

$$\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC;$$

čia n — sveikasis skaičius.

3.474. Įrodykite, kad lygybė $(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x=1$ teisinga su visomis reikšmėmis $\varphi\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ tada ir tik tada, kai $x=2$.

3.475. Įrodykite, kad reiškinys $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)+2\sin^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi$ nepriklauso nuo φ.

3.476. Raskite didžiausią reiškinio $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-4\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-4\alpha\right)$ reikšmę intervale $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{8}$.

3.477. Raskite mažiausią reiškinio $\frac{\mathrm{ctg}\,2\alpha-\mathrm{tg}\,2\alpha}{1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)}$ reikšmę intervale $0<\alpha<\frac{\pi}{8}$.

3.478. Įrodykite tokį teiginį: trikampio ABC vienas iš kampų lygus 60° tada ir tik tada, kai lygybė $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0$ yra teisinga.

3.479. Įrodykite tokį teiginį: trikampio ABC vienas iš kampų lygus 36° arba 108° tada, kai lygybė $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$ teisinga.

3.480. Įrodykite teiginį: trikampio ABC vienas iš kampų lygus 36° arba 108° tik tada, kai lygybė $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0$ yra teisinga.

3.481. Raskite mažiausią reiškinio $\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ reikšmę, kai $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

3.482. Raskite didžiausią reiškinio $\frac{\cos 2\alpha+1}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$ reikšmę, kai $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3.483. Jeigu $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta=1$, tai $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$ ir $\cos 2\alpha=-\cos 2\beta$. Įrodykite.

3.484. Žinoma, kad $\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\frac{4}{3}$ ir $0<x<\frac{\pi}{2}$. Apskaičiuokite $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

3.485. Raskite didžiausią reiškinio $\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}$ reikšmę, kai $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

3.486. Raskite didžiausią reiškinio $\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ reikšmę, kai $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

3.487. Žinodami, kad $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\frac{3}{5}$, apskaičiuokite $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}$.

3.488. Jeigu skaičiai α, β ir γ tenkina lygybę $(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)$, tai kiekviena šios lygybės pusė lygi $|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|$. Įrodykite.

3.489. Įrodykite, kad su skaičiais $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{4}\right)$ yra teisinga lygybė

$$1-\mathrm{tg}\,\varphi+\mathrm{tg}^2\varphi-\mathrm{tg}^3\varphi+\ldots=\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}.$$

3.490. Raskite mažiausią reiškinio $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ reikšmę, kai $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

3.491. Raskite mažiausią reiškinio $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ reikšmę, kai $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

3.492. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+$ $+x)$ yra pastovi, kai α — pastovus.

3.493. Apskaičiuokite sumą $1+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha+...+\cos 4n\alpha$.

3.494. Jeigu $x=\operatorname{tg} 5°$, $y=\operatorname{tg} 20°$ ir $z=\operatorname{tg} 65°$, tai $xy+yz+zx=1$. Įrodykite.

3.495. Įrodykite, kad $\operatorname{tg} 142°30'+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ — sveikasis skaičius.

3.496. Sakykime, A, B, C — trikampio kampai. **Įrodykite, kad** $8\sin\frac{A}{2}\times$ $\times\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1$.

3.497. Jeigu $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z=\pi$, tai $x+y+z=xyz$. Įrodykite.

3.498. Jeigu $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} z=\frac{\pi}{2}$, tai $xy+yz+zx=1$. **Įrodykite.**

3.499. Sakykime, A, B, C — trikampio kampai. Įrodykite, kad $8\cos A\cos B\times$ $\times\cos C\leqslant 1$.

3.500. Sakykime, A, B, C — trikampio kampai. Remdamiesi nelygybe $\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$, įrodykite, kad $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leqslant\frac{9}{4}$.

4 SKYRIUS
PROGRESIJOS

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

1°. Aritmetinė progresija (a_1 — pirmasis narys; d — skirtumas; n — narių skaičius; a_n — n-tasis narys; S_n — pirmųjų n narių suma):

$$a_n=a_1+d(n-1); \quad (4.1)$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n; \quad (4.2)$$

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},\ k=2,\ 3,\ ...,\ n-1; \quad (4.3)$$

$$a_k+a_m=a_p+a_q,\ \text{čia}\ k+m=p+q. \quad (4.4)$$

2°. Geometrinė progresija (b_1 — pirmasis narys; q — vardiklis ($q\neq 0$); n — narių skaičius; b_n — n-tasis narys ($b_n\neq 0$); S_n — pirmųjų n narių suma):

$$b_n=b_1q^{n-1}; \quad (4.5)$$

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\ (q\neq 1); \quad (4.6)$$

$$b_k^2=b_{k-1}b_{k+1},\ k=2,\ 3,\ ...,\ n-1; \quad (4.7)$$

$$b_kb_m=b_pb_q;\ \text{čia}\ k+m=p+q. \quad (4.8)$$

Jeigu $|q|<1$, tai suma S_n, kai n neaprėžtai didėja ($n\to\infty$), artėja prie skaičiaus $\frac{b_1}{1-q}$. Tas skaičius vadinamas begalinės geometrinės progresijos suma ir žymimas raide S:

$$S=\frac{b_1}{1-q}. \quad (4.9)$$

1 pavyzdys. Didėjančios aritmetinės progresijos pirmųjų trijų narių suma lygi 21. Jeigu iš pirmųjų dviejų narių atimtume po 1, o prie trečiojo nario pridėtume 2, tai gautume tris skaičius, kurie sudarytų geometrinę progresiją. Raskite pirmųjų aštuonių geometrinės progresijos narių sumą.

△ Pagal (4.2) formulę $S_3=\frac{2a_1+2d}{2}\cdot 3=21$, arba $a_1+d=7$. Pagal sąlygą $a-1$, a_1+d-1, a_1+2d+2 — trys vienas po kito einantys geometrinės progresijos nariai. Pritaikę (4.7) formulę, gauname: $(a_1+d-1)^2=(a_1+2d+2)(a_1-1)$. Vietoj a_1 įrašę $7-d$ ir atskliautę, gauname kvadratinę lygtį: $d^2+3d-18=0$, t. y. $d_1=3$, $d_2=-6$. Sąlygą tenkina tik reikšmė $d_1=3$; tada $a_1=4$. Apskaičiuojame $b_1=a_1-1=3$, $b_2=a_1+d-1=6$; vadinasi, $q=2$. Pagaliau, remdamiesi (4.6) formule, gauname:

$$S_8=\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=765. \ ▲$$

2 pavyzdys. Aritmetinės progresijos bet kurio skaičiaus pirmųjų narių suma lygi to skaičiaus keturgubam kvadratui. Apskaičiuokite pirmųjų šešių tos progresijos narių sumą.

△ Atsižvelgdami į uždavinio sąlygą ir (4.2) formulę, gauname:

$$\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=4n^2, \text{ arba } 2a_1-d=(8-d)n.$$

Ši lygybė turi būti teisinga su tam tikromis a_1 ir d reikšmėmis bei visomis n reikšmėmis. Taip bus tada, kai $d=8$. Vadinasi, $a_1=4$. Taigi

$$S_6=\frac{2a_1+5d}{2}\cdot 6=144. \blacktriangle$$

3 pavyzdys. Skaičių sekos $\{u_n\}$ pirmųjų n **narių suma** išreiškiama formule $S_n=n^2+2n$ su bet kuria n reikšme. Raskite **devintąjį šios sekos narį** ir įrodykite, kad $\{u_n\}$ yra aritmetinė progresija.

△ Sekos n-tąjį narį pažymėkite raide u_n. Tada $S_n=u_1+u_2+...+u_n$; $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$, arba $u_{n+1}=S_{n+1}-S_n$. Vadinasi, $u_9=S_9-S_8=9^2+18-8^2-16=19$. Išnagrinėkime bet kurių dviejų gretimų sekos **narių skirtumą**:

$$u_{n+1}-u_n=(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=$$
$$=(n+1)^2+2(n+1)-2n^2-4n+(n-1)^2+2(n-1)=2.$$

Tai reiškia, kad $\{u_n\}$ yra aritmetinė progresija, kurios skirtumas $d=2$. ▲

4 pavyzdys. Išspręskite lygtį $1+2x+4x^2+...+(2x)^n+...=3{,}4-1{,}2x$, kai $|x|<0{,}5$.

△ Kairioji lygties pusė lygi begalinės geometrinės progresijos sumai, be to, $b_1=1$ ir $|q|=|2x|<1$, nes $|x|<0{,}5$. Pritaikę (4.9) formulę, gauname:

$$1+2x+4x^2+...=\frac{1}{1-2x},$$

arba

$$\frac{1}{1-2x}=3{,}4-1{,}2x;\quad (3{,}4-1{,}2x)(1-2x)=1;\quad 2{,}4x^2-8x+2{,}4=0;\quad 3x^2-10x+3=0;$$

iš čia $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$. Sąlygą tenkina tik šaknis $x=\frac{1}{3}$. ▲

A grupė

4.001. Už šulinio apatinio gelžbetoninio rentinio pagaminimą ir įleidimą sumokėta 26 rb, o už kiekvieną virš jo esantį — 2 rb mažiau. Be to, baigus darbą, darbininkams sumokėta dar 40 rb. Vieno rentinio pagaminimas ir įleidimas kainavo vidutiniškai $22\frac{4}{9}$ rb. Kiek rentinių buvo įleista?

4.002. Aritmetinės progresijos pirmojo ir penktojo nario suma lygi $\frac{5}{3}$, o trečiojo ir ketvirtojo nario sandauga lygi $\frac{65}{72}$. Apskaičiuokite pirmųjų septyniolikos šios progresijos narių sumą.

4.003. Per varžybas šaulys turėjo iššauti 25 kartus. Už kiekvieną netaiklų šūvį jam skiriami baudos taškai: už pirmąjį — vienas, už kiekvieną tolesnį — $\frac{1}{2}$ taško mažiau. Kiek kartų pataikė į taikinį šaulys, gavęs 7 baudos taškus?

4.004. Duota aritmetinė progresija, kurios $a_1+a_3+a_5=-12$ ir $a_1a_3a_5=80$. Raskite pirmuosius tris tos progresijos narius a_1, a_2 ir a_3.

4.005. Aritmetinės progresijos visų narių suma lygi 112. Antrojo nario ir progresijos skirtumo sandauga lygi 30, o trečiojo ir penktojo nario suma 32. Apskaičiuokite, kiek yra aritmetinės progresijos narių. Parašykite pirmuosius tris jos narius.

4.006. Kopdamas į kalną, turistas per pirmąją valandą pakilo 800 m, o per kiekvieną tolesnę — 25 m mažiau negu per ankstesnę valandą. Per kiek valandų jis įkopė į 5700 m aukščio kalną?

4.007. Aritmetinės progresijos devintąjį narį padalijus iš antrojo, gaunamas dalmuo 5, o padalijus tryliktąjį iš šeštojo — dalmuo 2 ir liekana 5. Raskite progresijos pirmąjį narį ir skirtumą.

4.008. Raskite keturis skaičius, sudarančius geometrinę progresiją, kurios kraštinių narių suma lygi -49, o vidurinių narių suma 14.

4.009. Begalinės geometrinės progresijos, kurios vardiklis $|q|<1$, suma lygi $\frac{8}{5}$, o antrasis narys lygus $-\frac{1}{2}$. Raskite trečiąjį tos progresijos narį.

4.010. Begalinės geometrinės progresijos, kurios vardiklis $|q|<1$, suma lygi 6, o pirmųjų penkių narių suma lygi $\frac{93}{16}$. Raskite pirmuosius tris tos progresijos narius.

4.011. Trijų skaičių, sudarančių geometrinę progresiją, suma lygi 2, o tų pačių skaičių kvadratų suma lygi $\frac{14}{9}$. Raskite tuos skaičius.

4.012. Aritmetinės progresijos trečiojo ir devintojo nario suma lygi 8. Apskaičiuokite pirmųjų vienuolikos tos progresijos narių sumą.

4.013. Didėjančios aritmetinės progresijos pirmųjų trijų narių suma lygi 15. Jeigu iš pirmųjų dviejų tos progresijos narių atimsime po 1, o prie trečiojo nario pridėsime 1, tai gauti trys skaičiai sudarys geometrinę progresiją. Raskite pirmųjų dešimties aritmetinės progresijos narių sumą.

4.014. Aritmetinės progresijos suma S_n išreiškiama formule $S_n=4n^2-3n$; čia n — bet kuris skaičius. Raskite pirmuosius tris tos progresijos narius.

4.015. Apskaičiuokite: $(1+3^2+5^2+...+(2n-1)^2+...+199^2)-$ $-(2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2+...+200^2)$.

4.016. Raskite keturis skaičius, sudarančius geometrinę progresiją, kurios antrasis narys mažesnis už pirmąjį 35 vienetais, o trečiasis didesnis už ketvirtąjį 560 vienetų.

4.017. Raskite keturis skaičius, sudarančius geometrinę progresiją, kurios trečiasis narys didesnis už pirmąjį 9 vienetais, o antrasis didesnis už ketvirtąjį 18 vienetų.

4.018. Geometrinės progresijos vardiklis lygus $\frac{1}{3}$, ketvirtasis narys lygus $\frac{1}{54}$, o visų narių suma lygi $\frac{121}{162}$. Raskite progresijos narių skaičių.

4.019. Raskite geometrinės progresijos pirmąjį narį ir vardiklį, kai žinoma, kad $a_4-a_2=-\frac{45}{32}$ ir $a_6-a_4=-\frac{45}{512}$.

4.020. Raskite pirmąjį ir penktąjį geometrinės progresijos narį, kai žinoma, kad jos vardiklis lygus 3, o pirmųjų šešių narių suma 1820.

4.021. Aritmetinei progresijai būdinga tokia savybė: su kiekviena n reikšme progresijos pirmųjų n narių suma lygi $5n^2$. Raskite tos progresijos skirtumą ir pirmuosius tris jos narius.

4.022. Geometrinės progresijos pirmųjų trijų narių sandauga 1728, o jų suma 63. Raskite tos progresijos pirmąjį narį ir vardiklį.

4.023. Išspręskite lygtis:

a) $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6}$; čia $|x|<1$;

b) $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}$; čia $|x|<1$.

4.024. Aritmetinės progresijos pirmasis narys 429, o jos skirtumas lygus -22. Kiek reikia tos progresijos narių, kad jų suma būtų lygi 3069?

4.025. Begalinės geometrinės progresijos, kurios vardiklis $|q|<1$, suma lygi 16, o tos pačios progresijos narių kvadratų suma 153,6. Raskite progresijos ketvirtąjį narį ir vardiklį.

4.026. Raskite natūraliuosius skaičius, sudarančius aritmetinę progresiją, kurios pirmųjų trijų ir keturių narių sandauga lygi atitinkamai 6 ir 24.

4.027. Aritmetinės progresijos trečiojo ir devintojo nario suma 6, o jų sandauga $\frac{135}{16}$. Apskaičiuokite pirmųjų penkiolikos tos progresijos narių sumą.

4.028. Baigtinės geometrinės progresijos pirmasis, antrasis ir paskutinysis narys atitinkamai lygūs 3, 12 ir 3072. Raskite tos progresijos narių skaičių.

4.029. Apskaičiuokite visų teigiamų lyginių dviženklių skaičių, kurie be liekanos dalijasi iš 3, sumą.

4.030. Begalinės geometrinės progresijos ($|q|<1$) kiekvienas narys keturis kartus didesnis už visų tolesnių jos narių sumą. Apskaičiuokite progresijos vardiklį q.

4.031. Iškilojo daugiakampio kampai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas 5°. Mažiausias to daugiakampio kampas lygus 120°. Kiek kraštinių turi daugiakampis?

4.032. Aritmetinės progresijos trečiojo ir šeštojo nario sandauga lygi 406. Devintąjį jos narį padalijus iš ketvirtojo, gaunamas dalmuo 2 ir liekana 6. Raskite pirmąjį progresijos narį ir skirtumą.

4.033. Begalinės geometrinės progresijos nariai yra teigiamieji skaičiai, o vardiklis $|q|<1$. Pirmųjų trijų tos progresijos narių suma lygi 10,5, o progresijos suma 12. Parašykite progresiją.

4.034. Aritmetinės progresijos bet kurio skaičiaus narių suma lygi trigubam to skaičiaus kvadratui. Raskite pirmuosius tris progresijos narius.

4.035. Aritmetinės progresijos tryliktąjį narį padalijus iš trečiojo, gaunamas dalmuo 3, o padalijus aštuonioliktąjį narį iš septintojo — dalmuo 2 ir liekana 8. Raskite progresijos skirtumą ir pirmąjį narį.

B grupė

4.036. Geometrinės progresijos pirmųjų trijų narių suma 21, o jų kvadratų suma 189. Raskite tos progresijos pirmąjį narį ir vardiklį.

4.037. Įrodykite, kad aritmetinės progresijos kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus dviejų narių, vienodai nutolusių nuo jo, aritmetiniam vidurkiui.

4.038. Yra žinoma, kad aritmetinės progresijos nariai a_{2n} ir a_{2m} tokie, kad $\frac{a_{2n}}{a_{2m}}=-1$. Ar kuris nors tos progresijos narys lygus nuliui? Jeigu taip, tai koks to nario numeris?

4.039. Duotos dvi aritmetinės progresijos. Pirmosios progresijos pirmasis ir penktasis narys atitinkamai lygūs 7 ir -5. Antrosios progresijos pirmasis narys lygus 0, o paskutinis $\frac{7}{2}$. Abiejų progresijų tretieji nariai yra lygūs. Apskaičiuokite antrosios progresijos narių sumą.

4.040. Trys skaičiai sudaro geometrinę progresiją. Jeigu iš trečiojo nario atimsime 4, tai skaičiai sudarys aritmetinę progresiją. Jei iš gautos aritmetinės progresijos antrojo ir trečiojo nario atimsime po 1, tai vėl gausime geometrinę progresiją. Raskite tuos skaičius.

4.041. Raskite lygties $(3+6+9+\ldots+3(n-1))+(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2})=137$ sveikąjį teigiamąjį skaičių n.

4.042. Apskaičiuokite visų lyginių triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 3, sumą.

4.043. Begalinės geometrinės progresijos, kurios vardiklis $|q|<1$, suma lygi 4, o jos narių kubų suma 192. Raskite progresijos pirmąjį narį ir vardiklį.

4.044. Raskite keturis skaičius, kurių pirmieji trys sudaro geometrinę progresiją, o paskutiniai trys — aritmetinę progresiją. Kraštinių skaičių suma 21, o vidurinių suma 18.

4.045. Geometrinės progresijos pirmųjų trijų narių suma lygi 91. Jeigu prie šių skaičių pridėsime atitinkamai 25, 27 ir 1, tai gausime tris skaičius, kurie sudarys aritmetinę progresiją. Raskite geometrinės progresijos septintąjį narį.

4.046. Trys skaičiai sudaro geometrinę progresiją. Jeigu antrąjį skaičių padidinsime 2 vienetais, progresija virs aritmetine, o jeigu po to paskutinį skaičių padidinsime 9 vienetais, progresija vėl bus geometrinė. Raskite tuos skaičius.

4.047. Raskite tris skaičius, sudarančius geometrinę progresiją, kai žinoma, kad jų sandauga lygi 64, o aritmetinis vidurkis $\frac{14}{3}$.

4.048. Įrodykite, kad geometrinės progresijos kiekvienas narys, pradedant antruoju, lygus narių, vienodai nutolusių nuo jo, geometriniam vidurkiui.

4.049. Begalinės geometrinės progresijos vardiklis $|q|<1$, antrasis narys 4, o narių kvadratų sumos ir narių sumos santykis lygus $\frac{16}{3}$. Apskaičiuokite pirmųjų septynių tos progresijos narių sumą.

4.050. Apskaičiuokite visų triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 7, sumą.

4.051. Apskaičiuokite sumą:

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

4.052. Duotos dvi begalinės geometrinės progresijos, kurių vardiklis $|q|<1$ ir kurios skiriasi viena nuo kitos tik vardiklių ženklu. Jų sumos atitinkamai lygios S_1 ir S_2. Raskite sumą begalinės geometrinės progresijos, sudarytos iš bet kurios duotų progresijų narių kvadratų.

4.053. Sakykime, a_1, a_2, ..., a_n — vienas po kito einantys geometrinės progresijos nariai, S_n — pirmųjų n jos narių suma. Įrodykite, kad

$$S_n=a_1a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

4.054. Jeigu skaičiai a, b ir c sudaro aritmetinę progresiją, tai skaičiai a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 ir b^2+bc+c^2, parašyti nurodyta tvarka, taip pat sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite.

4.055. Begalinės geometrinės progresijos, kurios vardiklis $|q|<1$, pirmasis narys lygus 1, o suma lygi S. Iš tos progresijos narių kvadratų sudaryta nauja begalinė geometrinė progresija. Raskite jos sumą.

4.056. Didėjančios geometrinės progresijos pirmasis narys lygus $7-3\sqrt{5}$, o kiekvienas jos narys, pradedant antruoju, lygus dviejų gretimų jo narių skirtumui. Raskite šios progresijos penktąjį narį.

4.057. Aritmetinės progresijos pirmųjų m narių suma lygi pirmųjų n narių sumai ($m\neq n$). Įrodykite, kad šiuo atveju pirmųjų $m+n$ jos narių suma lygi nuliui.

4.058. L, M, N — atitinkamai l-tasis, m-tasis, n-tasis geometrinės progresijos narys. Įrodykite, kad $L^{m-n}M^{n-l}N^{l-m}=1$.

4.059. Skaičiai a, b, c, kurių vienas yra skaičiaus 7 kartotinis, sudaro aritmetinę progresiją. Jos skirtumas lygus 7. Įrodykite, kad skaičius abc dalijasi iš 294.

4.060. Įrodykite, kad su bet kuria n reikšme teisinga lygybė $S_{2n}=S_n+\frac{1}{3}S_{3n}$ (S_k — pirmųjų k aritmetinės progresijos narių suma).

4.061. Išspręskite lygtį

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3;$$

čia x — sveikasis teigiamas skaičius.

4.062. Skaičių 180 išskaidykite keturių dėmenų suma. Tie dėmenys turi sudaryti geometrinę progresiją, kurios trečiasis narys didesnis už pirmąjį 36 vienetais.

4.063. Duotos dvi geometrinės progresijos, turinčios vienodą skaičių narių. Pirmos progresijos pirmasis narys ir vardiklis atitinkamai lygūs 20 ir $\frac{3}{4}$, o antros progresijos — 4 ir $\frac{2}{3}$. Jeigu sudauginsime progresijų narius, kurių vienodas numeris, tai visų sandaugų suma bus lygi 158,75. Kiek narių turi šios progresijos?

4.064. Trys skaičiai, kurių trečiasis lygus 12, sudaro geometrinę progresiją. Jeigu vietoj 12 paimsime 9, tai trys skaičiai sudarys aritmetinę progresiją. Raskite tuos skaičius.

4.065. Žinomas baigtinės geometrinės progresijos pirmasis narys a, paskutinis narys b ir visų jos narių suma S. Apskaičiuokite šios progresijos visų narių kvadratų sumą.

4.066. Geometrinės progresijos, kurią sudaro $2n$ teigiamųjų narių, pirmojo ir paskutinio nario sandauga lygi 1000. Raskite visų progresijos narių dešimtainių logaritmų sumą.

4.067. Trijų skaičių suma lygi $\frac{11}{18}$, o jiems atvirkštinių skaičių, sudarančių aritmetinę progresiją, suma lygi 18. Raskite tuos skaičius.

4.068. Aritmetinės progresijos skirtumas nelygus nuliui. Skaičiai, lygūs šios progresijos pirmojo ir antrojo nario, antrojo ir trečiojo nario, trečiojo ir pirmojo nario sandaugai, nurodyta tvarka sudaro geometrinę progresiją. Raskite jos vardiklį.

C grupė

4.069. Raskite triženklį skaičių, kurio skaitmenys sudaro geometrinę progresiją. Iš šio skaičiaus atėmus 792, gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, tačiau atvirkščia tvarka. Jeigu iš skaitmens, žyminčio šimtų skaičių, atimsime 4, o kitus ieškomo skaičiaus skaitmenis paliksime nepakeistus, tai gausime skaičių, kurio skaitmenys sudaro aritmetinę progresiją.

4.070. Su bet kuria n reikšme skaičių sekos pirmųjų n narių suma išreiškiama formule $S_n=2n^2+3n$. Raskite dešimtąjį šios sekos narį ir įrodykite, kad ta seka yra aritmetinė progresija.

4.071. Raskite aritmetinės progresijos a_1, a_2, a_3, ... pirmųjų devyniolikos narių sumą, kai žinoma, kad $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$.

4.072. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs didėjančios geometrinės progresijos trims vienas po kito einantiems nariams. Tos progresijos vardiklį palyginkite su skaičiumi 2.

4.073. Geometrinės progresijos pirmieji trys nariai, kurių suma lygi $\frac{148}{9}$, kartu yra pirmasis, ketvirtasis ir aštuntasis tam tikros aritmetinės progresijos nariai. Apskaičiuokite pirmųjų keturių geometrinės progresijos narių sumą.

4.074. Skaičiai a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

4.075. Skaičių sekos 1, 8, 22, 43, ... dviejų gretimų narių (paskutinio ir priešpaskutinio) skirtumai sudaro aritmetinę progresiją 7, 14, 21, ... Koks yra sekos nario, lygaus 35 351, numeris?

4.076. Įrodykite tokį teiginį: trys skaičiai $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ sudaro aritmetinę progresiją tada ir tik tada, kai skaičiai a^2, b^2 ir c^2 taip pat sudaro aritmetinę progresiją.

4.077. Keturių skaičių, sudarančių geometrinę progresiją, suma lygi —40, o jų kvadratų suma 3280. Parašykite šią progresiją.

4.078. Duotos dvi progresijos: geometrinė progresija, kurios nariai a_n teigiami (vardiklis lygus q), ir didėjanti aritmetinė progresija, kurios nariai b_n (skirtumas lygus d). Remdamiesi sąlyga $\log_x a_n - b_n = \log_x a_1 - b_1$, raskite x. Ar visada egzistuoja sprendinys?

4.079. Raskite sumą $1+2\cdot3+3\cdot7+...+n(2^n-1)$.

4.080. Raskite sumą $1\cdot3+3\cdot9+5\cdot27+...+(2n-1)\cdot3^n$.

4.081. Raskite geometrinės progresijos pirmųjų n narių sandaugą, kai žinoma jų suma S ir jų atvirkštinių dydžių suma σ.

4.082. Lygties $x^4-10x^2+a=0$ šaknys sudaro aritmetinę progresiją. Raskite a.

4.083. Įrodykite tokį teiginį: kad trys skaičiai x, y ir z nurodyta tvarka sudarytų geometrinę progresiją, būtina ir pakanka, jog būtų teisinga lygybė $(x^2+y^2)(y^2+z^2)=(xy+yz)^2$.

4.084. Tinklinio varžybose dalyvavo n komandų. Kiekviena jų su kitomis žaidė po vieną kartą. Rungtynes laimėjusi komanda gavo 1 tašką, o pralaimėjusi taškų nepelnė; lygiųjų tinklinyje nebūna. Pasibaigus varžyboms, paaiškėjo, kad komandų surinkti taškai sudaro aritmetinę progresiją. Kiek taškų pelnė komanda, užėmusi paskutinę vietą?

4.085. Į 60° kampą įbrėžti 5 apskritimai taip, kad kiekvienas tolesnis apskritimas, pradedant antruoju, liečia ankstesnįjį. Kiek kartų visų penkių skritulių plotų suma didesnė už mažiausio skritulio plotą?

5 SKYRIUS
KOMBINATORIKA IR NIUTONO BINOMAS

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

Kėlinių iš n elementų skaičius randamas pagal formulę

$$P_n=1\cdot2...(n-1)n=n!. \quad (5.1)$$

Derinių iš n elementų po m skaičius randamas pagal formulę

$$C_n^m \frac{n!}{m!(n-m)!}; \; C_n^0=1. \quad (5.2)$$

Derinių savybės:

$$C_n^m=C_n^{n-m}; \quad (5.3)$$

$$C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}. \quad (5.4)$$

Gretinių iš n elementų po m skaičius randamas pagal formulę

$$A_n^m=P_m\cdot C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}. \quad (5.5)$$

Niutono binomo formulė yra tokia:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n, \quad (5.6)$$

arba

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+...+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+...+b^n;$$

čia n — natūralusis skaičius, o $C_n^ka^{n-k}b^k=T_{k+1}$ yra $(k+1)$-asis binomo eilutės narys $(k=0, 1, 2, ..., n)$.

Binominių koeficientų suma lygi 2^n:

$$C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n. \quad (5.7)$$

1 pavyzdys. Tam tikros ESM komanda užrašoma aštuonių skaitinių ženklų — nulių ir vienetų — rinkiniu. Koks gali būti didžiausias įvairių komandų skaičius?

△ Kadangi kiekvienas rinkinio elementas gali įgyti dvi reikšmes (0 arba 1), tai didžiausias įvairių komandų skaičius yra $\underbrace{2\cdot2...2}_{8\ \text{kartus}}=2^8=256$. Galima samprotauti kitaip: išnagrinėti visus dvejetainius skaičius nuo 00000000 iki $11111111_2=255_{10}$. ▲

2 pavyzdys. $(1+x)^n$ skleidinio ketvirtasis narys lygus 0,96. Raskite x ir n reikšmes, kai binominių koeficientų suma lygi 1024.

△ Kadangi binominių koeficientų suma lygi 2^n, o $1024=2^{10}$, tai $n=10$. Ketvirtasis skleidinio narys $T_4=C_n^3x^3=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}x^3=120x^3$. Pagal sąlygą $120x^3=0,96$; iš čia $x^3=0,008$, t. y. $x=0,2$. ▲

3 pavyzdys. Su kuriomis x ir y reikšmėmis galima lygybė $C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1 : 3 : 24$?

△ Pritaikę (5.2) ir (5.5) formules, gauname:

$$\frac{y!}{x!(y-x)!} : \frac{(y+2)!}{x!(y-x+2)!}=\frac{1}{3}; \; C_y^x : (x!\cdot C_y^x)=1:24.$$

Iš antrosios lygties $x!=24$, t. y. $x=4$ (nes $24=1\cdot2\cdot3\cdot4$); iš pirmosios lygties randame:

$$\frac{(y-x+1)(y-x+2)}{(y+1)(y+2)}=\frac{1}{3}.$$

Kadangi $x=4$, tai $y^2-9y+8=0$; iš čia $y=1$ ir $y=8$; $y=1$ netenkina sąlygos $(y>x=4)$. Taigi $x=4$, $y=8$. ▲

A grupė

Išspręskite lygtis (**5.001—5.005**):

5.001. a) $A_x^2\cdot C_x^{x-1}=48$; b) $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x$.

5.002. a) $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^3=7(x-1)$; b) $\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}=\frac{24}{23}$.

5.003. a) $A_x^3+C_x^{x-2}=14x$; b) $A_x^3-2C_x^4=3A_x^2$.

5.004. a) $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}}=336$; b) $A_x^{x-3}=xP_{x-2}$.

5.005. a) $\frac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}P_3}=210$; b) $A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}=\frac{30}{7}P_x$.

5.006. Įrodykite, kad su kiekviena k reikšme suma $C_{n+k}^2+C_{n+k+1}^2$ yra tikslusis kvadratas.

5.007. Įrodykite tapatybes:

a) $P_n=(n-1)(P_{n-1}+P_{n-2})$; b) $C_n^k\cdot C_{n-k}^{m-k}=C_m^k\cdot C_n^m$.

5.008. $\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ skleidinio binominių koeficientų suma lygi 64. Raskite dėmenį, kuriame nėra kintamojo x.

5.009. $\left(ax+x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ skleidinio nelyginių binominių koeficientų suma lygi 512. Raskite dėmenį, kuriame nėra kintamojo x.

5.010. Su kuriomis x reikšmėmis $(5+2x)^{16}$ skleidinio ketvirtasis dėmuo didesnis už kiekvieną gretimą dėmenį?

5.011. Koks yra didžiausias $(a+b)^n$ skleidinio koeficientas, jeigu visų koeficientų suma lygi 4096?

5.012. $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ skleidinyje yra narys, turintis ab. Raskite tą narį.

5.013. $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ skleidinio antrojo ir trečiojo dėmens koeficientų suma lygi 25,5. Užrašykite narį, kuriame nėra kintamojo x.

5.014. Su kuria x reiksme $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ skleidinio ketvirtasis dėmuo 20 kartų didesnis už m, kai ketvirtojo dėmens ir antrojo dėmens binominių koeficientų santykis lygus 5 : 1?

5.015. Apskaičiuokite A_n^2, kai $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ skleidinio penktasis dėmuo nepriklauso nuo x.

5.016. Kuriuo natūraliuoju laipsniu reikia pakelti binomą $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$, kad skleidinio ketvirtojo ir trečiojo dėmens santykis būtų lygus $3\sqrt{2}$?

5.017. Vienos dienos tvarkaraštyje numatytos 5 pamokos. Kiek galima sudaryti tokių tvarkaraščių pasirenkant 5 pamokas iš 11 dėstomų dalykų?

5.018. Komisiją sudaro pirmininkas, jo pavaduotojas ir dar penki žmonės. Keliais būdais komisijos nariai gali pasiskirstyti pareigomis?

5.019. Keliais būdais galima išrinkti 3 budėtojus iš 20 žmonių grupės?

5.020. Kiek skirtingų akordų galima gauti paspaudus 10 pasirinktų pianino klavišų, jeigu kiekvieną akordą gali sudaryti nuo trijų iki dešimties garsų?

5.021. Vazoje pamerkta 10 raudonų ir 4 balti gvazdikai. Keliais būdais galima išimti iš vazos tris žiedus?

5.022. Tramvajaus maršrutų numeriai kartais žymimi dviem spalvotais žibintais. Kiek skirtingų maršrutų galima pažymėti, jeigu yra aštuonių spalvų žibintai?

5.023. Čempionatas, kuriame dalyvauja 16 komandų, vyksta dviem turais (t. y. kiekviena komanda žaidžia su bet kuria kita po du kartus). Kiek rungtynių reikia surengti?

5.024. Spyna atrakinama tik tada, kai iš penkių skaitmenų surenkamas tam tikras triženklis numeris. Bandant atrakinti, atsitiktinai renkami trys skaičiai. Numerį atspėti pavyko tik paskutinį kartą. Kiek kartų nesėkmingai bandyta atrakinti spyną?

5.025. Iš 15 žmonių išrenkami 4 sportininkai, kurie turi dalyvauti estafetėje 800+400+200+100. Keliais būdais galima sustatyti sportininkus bėgti estafetę?

5.026. Plaukimo varžybose dalyvauja penki vienos komandos žmonės ir dar 20 sportininkų. Keliais būdais gali pasiskirstyti vietos, kurias užima tos komandos nariai?

5.027. Keliais būdais galima sustatyti ant šachmatų lentos du bokštus, kad jie negalėtų nukirsti vienas kito? (Vienas bokštas gali kirsti kitą, kai abu jie yra vienoje šachmatų lentos vertikalėje arba horizontalėje.)

5.028. Du nevienodos spalvos bokštai pastatyti ant šachmatų lentos taip, kad kiekvienas jų gali nukirsti kitą. Kiek yra tokių bokštų padėčių?

6. Užsak. Nr. 1941.

5.029. Šachmatų turnyro 16 dalyvių žaidžia salėje, kurioje yra 8 staliukai. Keliais būdais galima susodinti šachmatininkus žinant visų 8 partijų varžovų poras?

B grupė

Išspręskite lygtis (**5.030—5.032**):

5.030. $\frac{A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$

5.031. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023.$

5.032. $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720.$

5.033. Išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90, \\ A_x^y - 2C_x^y = 40. \end{cases}$

5.034. Raskite x ir y, kai:

a) $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2;$

b) $C_x^{y-1} : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3 : 5 : 5.$

5.035. Raskite x ir y, kai:

a) $(A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1;$

b) $A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) = 21 : 60 : 10.$

5.036. Įrodykite tapatybę:

a) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k;$

b) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k;$

c) $A_{n-1}^m = A_n^m - mA_{n-1}^{m-1}.$

5.037. $(a+b)^{n+1}$ ir $(a+b)^n$ skleidinių trečiųjų binominių koeficientų skirtumas lygus 225. Raskite $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{y})^n$ skleidinio racionaliųjų narių skaičių.

5.038. Raskite $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^m$ skleidinio k-tąjį narį, kai žinoma, kad $T_{k+2} : T_{k+1} : T_k = 28 : 8\sqrt{6} : 9.$

5.039. $(\sqrt[6]{x} - \sqrt{x^{-1}})^{12}$ skleidinio T_{k+1} nario x laipsnis yra perpus mažesnis negu T_k nario. Su kuriomis x reikšmėmis T_{k+1} ir T_k narių skirtumas lygus 30?

5.040. $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$ skleidinio ketvirtojo nuo pradžios ir ketvirtojo nuo galo dėmenų sandauga lygi 14 400. Apskaičiuokite didžiausią šio skleidinio binominį koeficientą.

5.041. Su kiekviena leistinąja z reikšme $(\sqrt[3]{z} + \sqrt{z})^m$ skleidinio U_{k+1} dėmuo du kartus mažesnis už $\left(\sqrt[6]{z^5} + \frac{1}{\sqrt[6]{z}}\right)^{m+1}$ skleidinio V_{k+2} dėmenį. Raskite tuos dėmenis.

5.042. $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ skleidinio trečiojo nuo pradžios ir trečiojo nuo galo binominių koeficientų suma lygi 9900. Kiek racionaliųjų narių yra šiame skleidinyje?

5.043. $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^m$ skleidinio trečiajame dėmenyje nėra x. Su kuriomis x reikšmėmis šis dėmuo lygus $(1+x^3)^{30}$ skleidinio antrajam dėmeniui?

5.044. Trisdešimt žmonių suskirstyta į tris grupes, po 10 kiekvienoje. Kiek gali būti skirtingų grupių?

5.045. Kiek keturženklių skaičių, kurie dalijasi iš 5, galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 3, 5, 7, kad kiekviename skaičiuje nebūtų vienodų skaitmenų?

5.046. Kiek skirtingų šviečiančių žiedų galima padaryti įtvirtinant apskritimu 10 įvairių lempučių (žiedai laikomi vienodais, jeigu spalvos išdėstytos ta pačia tvarka)?

5.047. Knygų lentynoje telpa 30 tomų. Keliais būdais galima juos išdėlioti, kad 1 ir 2 tomas nebūtų greta?

5.048. Keturi šauliai turi pataikyti į 8 taikinius (kiekvienas šaulys — į du). Keliais būdais jie gali pasiskirstyti taikinius?

5.049. Iš 12 žmonių 6 dienas kasdien išrenkama po 2 budėtojus. Kiekvienas žmogus budi vieną kartą. Kiek gali būti skirtingų budėtojų sąrašų?

5.050. Iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5 sudaryti keturženkliai skaičiai (skaitmenys kiekviename skaičiuje nesikartoja). Keliuose keturženkliuose skaičiuose yra skaitmuo 3?

5.051. Dešimt grupių mokosi dešimtyje iš eilės esančių auditorijų. Kiek gali būti tvarkaraščio variantų, pagal kuriuos 1 ir 2 grupė mokytųsi gretimose auditorijose?

5.052. Turnyre dalyvauja 16 šachmatininkų. Nustatykite pirmojo turo skirtingų tvarkaraščių skaičių (tvarkaraščiai laikomi skirtingais, kai skiriasi nors vienos partijos dalyviai; į figūrų spalvą ir lentos numerį neatsižvelgiama).

5.053. Šešios dėžės, kurių kiekvienoje kitokios statybinės medžiagos, keliamos į penkis statomo namo aukštus. Keliais būdais galima paskirstyti šias medžiagas po aukštus? Kiek gali būti kurios nors vienos medžiagos pakėlimo į penktą aukštą variantų?

5.054. Du laiškininkai turi išnešioti 10 laiškų 10 adresų. Keliais būdais jie gali pasiskirstyti darbą?

5.055. Metro traukinys sustoja 16 kartų. Kiekvienoje stotelėje išlipa visi keleiviai. Keliais būdais gali išlipti šiose stotelėse 100 keleivių, įlipusių į traukinį paskutinėje stotelėje?

5.056. Kiek triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 3, galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, kad kiekvienas skaičius neturėtų vienodų skaitmenų?

5.057. Iš susirinkime dalyvaujančių 80 žmonių išrenkamas redakcinės komisijos pirmininkas, sekretorius ir trys nariai. Keliais būdais tai galima padaryti?

5.058. Iš 10 tenisininkių ir 6 tenisininkų sudaromos 4 mišrios poros. Keliais būdais tai galima padaryti?

5.059. Trys mašinos — pirmoji, antroji ir trečioji — turi atvežti prekes į 6 parduotuves. Kiekviena mašina gali paimti prekes iš karto visoms parduotuvėms. Dvi mašinos į tą pačią parduotuvę nevažiuoja. Keliais būdais galima panaudoti mašinas? Kiek gali būti maršruto variantų, jeigu nutarta panaudoti tik pirmą mašiną?

5.060. Keturi jaunuoliai ir dvi merginos renkasi sporto šakas. Į ledo ritulio ir bokso būrelį priimami tik jaunuoliai, į meninės gimnastikos būrelį — tik merginos, o į slidinėjimo ir čiuožimo būrelį — ir jaunuoliai, ir merginos. Keliais būdais gali pasiskirstyti šie šeši žmonės?

5.061. Laboratorijoje dirba 20 žmonių. 5 darbuotojai turi išvykti į komandiruotę. Kiek gali būti skirtingų tos grupės sudėčių, jeigu laboratorijos viršininkas, jo pavaduotojas ir vyriausiasis inžinierius negali išvykti tuo pačiu metu?

5.062. Fortepijono būrelį lanko 10 žmonių, raiškiojo skaitymo būrelį — 15, dainavimo — 12 ir fotografijos — 20 žmonių. Keliais būdais galima sudaryti grupę iš keturių skaitovų, trijų pianistų, penkių dainininkų ir vieno fotografo?

5.063. Dvidešimt aštuonis domino kauliukus reikia paskirstyti keturiems žaidėjams. Kiek gali būti įvairių paskirstymo variantų?

5.064. Iš 15 žmonių reikia išrinkti brigadininką ir 4 brigados narius. Keliais būdais tai galima padaryti?

5.065. Penkis mokinius reikia nukreipti į tris paralelines klases. Keliais būdais tai galima padaryti?

5.066. Liftas sustoja dešimtyje aukštų. Keliais būdais 8 lifte esantys žmonės gali išlipti šiuose aukštuose?

5.067. Aštuoni autoriai turi parašyti knygą, kurią sudaro 16 skyrių. Du žmonės parašys po 3 skyrius, keturi — po 2 ir du — po 1 skyrių. Keliais būdais galima paskirstyti skyrius autoriams?

5.068. Turnyre dalyvauja 8 trečiojo, 6 antrojo ir 2 pirmojo atskyrio šachmatininkai. Apskaičiuokite, kiek gali būti pirmojo turo partijų, kai vienodo atskyrio šachmatininkai žaidžia vienas su kitu (į figūrų spalvą neatsižvelgiama).

5.069. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sudaromi visi galimi penkiaženkliai skaičiai, kuriuose nėra vienodų skaitmenų. Keliuose skaičiuose vienu metu yra skaitmenys 2, 4 ir 5?

5.070. Septynis obuolius ir tris apelsinus reikia sudėti į du maišelius taip, kad kiekviename jų būtų bent vienas apelsinas ir kad maišeliuose būtų po lygiai vaisių. Keliais būdais tai galima padaryti?

5.071. Morzės abėcėlės raidės sudarytos iš simbolių (taškų ir brūkšnelių). Kiek raidžių galima užrašyti, jeigu kiekvienoje raidėje turi būti ne daugiau kaip penki simboliai?

5.072. Automobilio priekabos numerį sudaro dvi raidės ir keturi skaitmenys. Kiek galima sudaryti skirtingų numerių iš 30 raidžių ir 10 skaitmenų?

5.073. Per tris dienas sodininkas turi pasodinti 10 medelių. Keliais būdais jis gali pasiskirstyti darbą, jeigu kasdien sodins ne mažiau kaip po vieną medelį?

5.074. Iš vazos, kurioje pamerkta 10 raudonų ir 4 balti gvazdikai, paimamas 1 raudonas ir 2 balti žiedai. Keliais būdais tai galima padaryti?

C grupė

5.075. Įrodykite, kad $\frac{C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n}{n}=2^{n-1}$.

5.076. Įrodykite tapatybę $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$. Remdamiesi ja, įrodykite, kad

$$C_n^m+C_{n-1}^m+\ldots+C_{n-10}^m=C_{n+1}^{m+1}-C_{n-10}^{m+1}.$$

5.077. Suprastinkite reiškinį $P_1+2P_2+\ldots+nP_n$; čia P_k — kėlinių iš k elementų skaičius.

5.078. Įrodykite, kad $C_{2n+x}^n \cdot C_{2n-x}^n \leqslant (C_{2n}^n)^2$.

5.079. Apskaičiuokite didžiausią sumos $S=(1+x)^{36}+(1-x)^{36}$ reikšmę, kai $|x|\leqslant 1$.

5.080. Raskite $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{20}$ skleidinio didžiausią dėmenį.

5.081. Su kuriomis x reikšmėmis $(5+3x)^{10}$ skleidinio ketvirtasis dėmuo yra didžiausias?

5.082. Atskliautus reiškinį $(1+x)^9+(1+x)^{10}+\ldots+(1+x)^{14}$ ir sutraukus panašiuosius narius, gaunamas daugianaris. Neatskliausdami nustatykite šio daugianario koeficientą prie x^9.

5.083. Dvylikai mokinių išdalyti du kontrolinio darbo variantai. Keliais būdais galima susodinti mokinius į dvi eiles taip, kad sėdintys greta spręstų skirtingų variantų uždavinius, o sėdintys vienas už kito — to paties varianto?

5.084. Kiekvienas iš dešimties vietovės A radistų stengiasi užmegzti ryšį su kiekvienu iš dvidešimties vietovės B radistų. Kiek gali būti įvairių tokio ryšio variantų?

5.085. Šešios dėžės įvairių statybinių medžiagų keliamos į aštuonis statomo namo aukštus. Keliais būdais galima paskirstyti šias medžiagas po aukštus? Keliais būdais į aštuntąjį aukštą bus pakeltos ne mažiau kaip dviejų rūšių medžiagos?

5.086. Keliais būdais galima surikiuoti į vieną eilę dviejų futbolo komandų žaidėjus, kad du vienos komandos futbolininkai nestovėtų greta?

5.087. Knygų lentynoje sudėta 20 matematikos ir logikos knygų. Įrodykite, kad daugiausia komplekto, sudaryto iš 5 matematikos ir 5 logikos knygų, variantų gali būti tada, kai lentynoje yra po 10 kiekvieno dalyko knygų.

5.088. Liftas, kuriame yra 9 keleiviai, gali sustoti dešimtyje aukštų. Keleiviai išlipa po du, tris ir keturis. Kiek gali būti tokio išlipimo būdų?

5.089. Keliais būdais galima perstatyti žodžio „pastogė" raides, kad ir balsės, ir priebalsės eitų abėcėlės tvarka?

5.090. Susitinka dvi šachmatininkų komandos, po 8 žmones kiekvienoje. Partijų dalyviai ir kiekvieno dalyvio figūrų spalva nustatoma burtais. Kiek gali būti burtų skirtingų baigčių?

6 SKYRIUS
ALGEBRINĖS LYGTYS

KAIP SPRĘSTI LYGTIS SU VIENU KINTAMUOJU

1°. *Lygtimi su vienu kintamuoju* vadinama lygybė, turinti kintamąjį (kartais vadinamą nežinomuoju).

Kintamojo reikšmė, kurią įrašius į lygtį gaunama teisinga lygybė, vadinama lygties *šaknimi* (arba *sprendiniu*).

Išspręsti lygtį — vadinasi, rasti visas jos šaknis arba įrodyti, kad jų nėra.

2°. Lygtys, turinčios tas pačias šaknis, vadinamos *ekvivalenčiomis*. Duotoji lygtis sprendžiant pakeičiama paprastesne; laikomasi tokių lygties keitimo jai ekvivalenčia lygtimi taisyklių:

a) dėmenį galima perkelti iš vienos lygties pusės į kitą pakeičiant jo ženklą priešingu;

b) abi lygties puses galima padauginti arba padalyti iš to paties skaičiaus, nelygaus nuliui;

c) lygtį $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ galima pakeisti ekvivalenčia sistema $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$ arba išspręsti lygtį $f(x)=0$, po to atmesti tas šaknis, su kuriomis vardiklis $g(x)$ virsta nuliu.

3°. Sakykime, pertvarkius lygtį

$$f_1(x)=g_1(x), \qquad (6.1)$$

gaunama lygtis

$$f_2(x)=g_2(x). \qquad (6.2)$$

Jeigu (6.1) lygties kiekviena šaknis yra ir (6.2) lygties šaknis, tai (6.2) lygtis vadinama (6.1) lygties *išvada*, arba išvestine lygtimi.

(6.2) lygties šaknys, netenkinančios (6.1) lygties, vadinamos (6.1) lygties *pašalinėmis* šaknimis.

Pavyzdžiui, pašalinių šaknų gali atsirasti (bet nebūtinai) po tokių pertvarkymų: abi lygties puses pakėlus kvadratu (arba kitu lyginiu laipsniu), abi lygties puses padauginus iš algebrinio reiškinio su kintamuoju ir t. t.

4°. Norint išsiaiškinti, ar tarp lygties išvados šaknų yra pradinės lygties pašalinių šaknų, reikia patikrinti kiekvieną surastą šaknį — įrašyti ją į pradinę lygtį.

Galima daryti kitaip: kiekviename lygties sprendimo etape nustatyti intervalus, kuriuose gali būti lygties šaknys. Visos šaknys, kurios nepriklauso tiems intervalams, yra pašalinės, ir jas reikia atmesti. Tačiau likusias šaknis vis tiek būtina patikrinti — įrašius į pradinę lygtį.

5°. Abiejų lygties $f(x)h(x)=g(x)h(x)$ pusių dažniausiai nereikia dalyti iš $h(x)$, nes galima prarasti šaknis; šiuo atveju gali būti prarastos lygties $h(x)=0$ šaknys (jeigu jos egzistuoja).

Lygtis laikoma neišspręsta, jeigu atsakyme yra pašalinių šaknų arba prarasta nors viena šaknis.

1 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{x(3-x)}$.

△ Visus lygties narius perkelkime į kairiąją pusę ir gautą reiškinį pertvarkykime taip, kad jo išraiška būtų $\frac{x^2-7x+12}{2x(3-x)}=0$. Išsprendę lygtį $x^2-7x+12=0$, gauname: $x_1=3$, $x_2=4$. Kai $x=3$, vardiklis virsta nuliu; vadinasi, skaičius 3 nėra šaknis. Taigi gauname atsakymą: $x=4$. ▲

2 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sqrt{x-2}=x-4$.

△ Abi lygties puses pakelkime kvadratu:

$$(\sqrt{x-2})^2=(x-4)^2,\ x-2=x^2-8x+16;$$
$$x^2-9x+18=0;\ x_1=3,\ x_2=6.$$

Gautas šaknis patikrinkime įrašydami į pradinę lygtį: kai $x=3$, gauname neteisingą lygybę $1=-1$; kai $x=6$, gauname teisingą lygybę $2=2$. Vadinasi, duotoji lygtis turi vienintelę šaknį $x=6$.

Žinoma, pirmiausia galima rasti duotos lygties apibrėžimo sritį. Reikia išspręsti nelygybių sistemą $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-4\geqslant 0; \end{cases}$ iš čia $x\geqslant 4$. Tuomet iš karto matyti, kad $x_1=3$ yra pašalinė duotosios lygties šaknis. Patikrinę įsitikiname, kad $x=6$ tenkina duotąją lygtį. Taigi $x=6$. ▲

3 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.

△ Pertvarkę dešiniąją lygties pusę, gauname:

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{4x^2-4x+1};$$
$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x-1)^2};\ \sqrt{1-4x}+2=|2x-1|.$$

Ši lygtis gali turėti sprendinį tik tada, kai $1-4x\geqslant 0$, t. y. kai $x\leqslant\frac{1}{4}$. Tuomet $|2x-1|=1-2x$ $\left(\text{o ne } 2x-1, \text{ nes tai teisinga tik tada, kai } x\geqslant\frac{1}{2}, \text{ bet tai prieštarauja sąlygai } x\leqslant\frac{1}{4}\right)$. Vadinasi, $\sqrt{1-4x}+2=1-2x$; iš čia

$$\sqrt{1-4x}=-1-2x. \qquad (*)$$

Galimų x reikšmių sritį apibrėžia nelygybių sistema $\begin{cases} 1-4x\geqslant 0, \\ -1-2x\geqslant 0, \end{cases}$ t. y. $x\leqslant-\frac{1}{2}$. Lygties (*) abi puses pakėlę kvadratu, gauname:

$$1-4x=1+4x+4x^2;\ 4x^2+8x=0;\ x_1=0,\ x_2=-2.$$

Šaknis $x_1=0$ netenkina sąlygos $x\leqslant-\frac{1}{2}$, todėl ji yra pašalinė; šaknis $x_2=-2$ tenkina nelygybę $x\leqslant-\frac{1}{2}$, tačiau ją reikia patikrinti. Į pradinę lygtį vietoj x įrašę -2, gauname teisingą lygybę: $3+2=5$. Taigi duotoji lygtis turi vienintelę šaknį $x=-2$. ▲

Sprendžiant lygtis, dažnai taikomas skaidymo dauginamaisiais metodas ir kintamojo keitimo metodas.

4 pavyzdys. Išspręskite lygtį $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.

△ Atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius, gauname: $2x^3+3x^2+3x+2=0$. Kairiąją lygties pusę išskaidykime dauginamaisiais. Iš pradžių sugrupuojame lygties narius, po to pritaikome (2.13) formulę:

$$2(x^3+1)+3x(x+1)=0;\ 2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0;$$
$$(x+1)(2x^2+x+2)=0.$$

Paskutinioji lygybė teisinga tada, kai nors vienas iš dauginamųjų lygus nuliui: $x+1=0$, iš čia $x=-1$, arba $2x^2+x+2=0$. Tačiau pastarosios lygties diskriminantas yra neigiamas, vadinasi, ji neturi šaknų. Taigi $x=-1$. ▲

5 pavyzdys. Išspręskite lygtį $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

△ Reiškinį $x+\frac{1}{x}$ pakeiskime kintamuoju z. Tada $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2$; iš čia pagal (2.9) formulę randame: $x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$.

Pirmąjį suskliaustą duotosios lygties reiškinį pakeitę kintamuoju z, o antrąjį suskliaustą reiškinį — reiškiniu z^2-2, gauname:

$$7z-2(z^2-2)=9;\ 2z^2-7z+5=0;\ z_1=\frac{5}{2},\ z_2=1.$$

Norint rasti x, reikia išspręsti dvi kvadratines lygtis:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},\ 2x^2-5x+2=0;\ x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2};$$
$$x+\frac{1}{x}=1,\ x^2-x+1=0;\ D<0 \text{ — šaknų nėra.}$$

Taigi gauname tokį atsakymą: $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{2}$. ▲

6 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

△ Abi jos puses pakėlę kvadratu, gauname:

$$x+1+4x+13+2\sqrt{(x+1)(4x+13)}=3x+12;\ \sqrt{(x+1)(4x+13)}=-(x+1).$$

Jeigu lygties abi puses dar kartą pakeltume kvadratu, tai panaikintume iracionalumą. Tačiau tai daryti nebūtina. Gauta išvestinė lygtis turi sprendinį tik tada, kai $x+1\leqslant 0$. Kartu viena iš duotosios lygties sprendinio egzistavimo sąlygų yra $x+1\geqslant 0$. Abi sąlygos suderinamos vieninteliu atveju, kai $x+1=0$; iš čia $x=-1$. Nesunku patikrinti, kad ši x reikšmė tenkina pradinę lygtį. Kadangi išvestinė lygtis kitų šaknų neturi, tai kitų šaknų neturi ir pradinė lygtis. Taigi $x=-1$. ▲

7 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

△ Kadangi $x=5$ nėra lygties šaknis, tai abi lygties puses galima padalyti iš $\sqrt[3]{(5-x)^2}$; dėl to šaknų neprarasime. Gauname lygtį, ekvivalenčią pradinei:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Tardami, kad $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=z$, gauname kvadratinę lygtį $z^2-5z+4=0$; iš čia $z_1=1$, $z_2=4$. Kintamąjį x randame išsprendę dvi lygtis: $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=1$ ir $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=4$. Kiekvienos jų abi puses pakėlę kubu, gauname: $\frac{5+x}{5-x}=1$, iš čia $x=0$, ir $\frac{5+x}{5-x}=64$, iš čia $x=\frac{63}{13}$. Taigi $x_1=0$; $x_2=\frac{63}{13}$. ▲

8 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+3.$$

△ Lygtį užrašykime taip:

$$(2x^2-3x+2)-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0.$$

Tarkime, kad $\sqrt{2x^2-3x+2}=z$. Tiks tik $z\geqslant 0$. Įrašę keitinį, gauname lygtį $z^2-2z+1=0$; iš čia $z=1$. Tai tinkama z reikšmė, todėl lygtis $\sqrt{2x^2-3x+2}=1$, arba $2x^2-3x+1=0$, yra ekvivalenti duotajai. Šios kvadratinės lygties šaknys $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$ yra ir pradinės lygties šaknys. ▲

9 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

△ Tarkime, kad $\sqrt{x-1}=z$. Pabrėžiame, jog $z\geqslant 0$, $x\geqslant 1$, $x=z^2+1$. Tada, pritaikę (2.23) formulę, gauname: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-4z+4}=|z-2|$; $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{z^2-6z+9}=|z-3|$. Pradinė lygtis virs tokia:

$$|z-2|+|z-3|=1. \qquad (*)$$

Remdamiesi modulio apibrėžimu, išnagrinėkime tokius atvejus:

1) kai $z<2$, tai $2-z+3-z=1$, iš čia $z=2$;

2) kai $2\leqslant z<3$, tai $z-2+3-z=1$, iš čia $1=1$, t. y. visos z reikšmės, priklausančios intervalui $[2; 3)$, tenkina lygtį;

3) kai $z\geqslant 3$, tai $z-2+z-3=1$, iš čia $z=3$.

Sujungę šiuos sprendinius, darome išvadą: (*) lygtį tenkina visos z reikšmės, su kuriomis $2\leqslant z\leqslant 3$.

Kadangi $z=\sqrt{x-1}$, tai $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 3$, vadinasi, $4\leqslant x-1\leqslant 9$; iš čia $5\leqslant x\leqslant 10$. ▲

10 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$$

△ Šią tiesinių lygčių sistemą galima spręsti nuoseklioj eliminavimo metodu (Gauso metodu). Tačiau paprasčiau sudėti lygtis. Tuomet gauname: $4(x+y+z)=24$; iš čia $x+y+z=6$. Šią lygtį paeiliui atimdami iš kiekvienos sistemos lygties, randame: $x=1$, $y=2$, $z=3$. Sprendinį patikriname. ▲

11 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$$

△ Pirmosios lygties abi puses pakelkime kvadratu:

$$x^2y+y^2x+2xy\sqrt{xy}=36.$$

Iš šios lygties atėmę antrąją sistemos lygtį, gauname $xy\sqrt{xy}=8$, arba $(xy)^3=64$, t. y. $xy=4$. Pastaroji lygtis ir antroji duotos sistemos lygtis sudaro sistemą

$$\begin{cases} xy=4, \\ xy(x+y)=20, \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} xy=4, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Iš čia randame dvi sprendinių poras: $x_1=4$, $y_1=1$ ir $x_2=1$, $y_2=4$. Patikrinę įsitikiname, kad abi poros tenkina pradinę lygčių sistemą. ▲

Dydžiai a, b, c, p, q, m, n paprastai laikomi pastoviais, o dydžiai x, y, z, u, v, w — kintamais.

A grupė

Išspręskite lygtis (**6.001—6.066**):

6.001. $\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23.$ **6.002.** $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2.$

6.003. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$ $\left(\text{keitinys } \frac{x^2+x-5}{x}=z\right)$.

6.004. $x^4-\frac{50}{2x^4-7}=14$ (keitinys $2x^4-7=z$).

6.005. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$ (keitinys $x^2+2x=z$).

6.006. $x+\frac{1}{x}=2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$. **6.007.** $\frac{x^2}{a^3}+\frac{b^3}{x^2}=\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$.

6.008. $\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}+\frac{x-6}{x-2}$.

6.009. $\frac{5a}{y+a}+\frac{4a}{y+2a}+\frac{3a}{y+3a}=8.$

6.010. $\frac{1}{x^3+2}-\frac{1}{x^3+3}=\frac{1}{12}$.

6.011. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}$.

6.012. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2.$

6.013. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

6.014. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2.$ **6.015.** $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2.$

6.016. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ $\left(\text{keitinys } \frac{x^2+1}{x}=u\right)$.

6.017. $\frac{x+n}{m+n}-\frac{m-n}{x-n}=\frac{x+p}{m+p}-\frac{m-p}{x-p}$.

6.018. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$ (keitinys $x+x^{-1}=z$).

6.019. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$ (keitinys $x^2-4x+10=y$).

6.020. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5.$ **6.021.** $8x^4+x^3+64x+8=0.$

6.022. $(x+3)^3-(x+1)^3=56.$

6.023. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6.$

6.024. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

6.025. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3.$

6.026. $\frac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2.$ **6.027.** $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}$.

6.028. $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1.$

6.029. $\frac{a^2-1}{ax-1}+\frac{a-x}{a}=1.$

6.030. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$. **6.031.** $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

6.032. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

6.033. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

6.034. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

6.035. $\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b \quad (a>b)$.

6.036. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

6.037. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

6.038. $2\sqrt{7-x} : 0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=10\sqrt[4]{1{,}5} : \frac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}$.

6.039. $\left(\frac{x+5}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\frac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=4$.

6.040. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

6.041. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

6.042. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

6.043. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$.

6.044. $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\frac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6$.

6.045. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$.

6.046. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}$.

6.047. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$. **6.048.** $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

6.049. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

6.050. $\frac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.

6.051. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

6.052. $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$.

6.053. $\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

6.054. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

6.055. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

6.056. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$. **6.057.** $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

6.058. $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2$ $\left(\text{keitinys } \sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=z\right)$.

6.059. $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}}=2{,}5$.

6.060. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

6.061. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0$.

6.062. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$. **6.063.** $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

6.064. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

6.065. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$.

6.066. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$ (keitinys $x^2-4x-6=u$).

Išspręskite lygčių sistemas (**6.067—6.119**):

6.067. $\begin{cases} (x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1, \\ x+y=0{,}9. \end{cases}$ **6.068.** $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8. \end{cases}$

6.069. $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5, \\ x^{-2}+y^{-2}=13. \end{cases}$ **6.070.** $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.071. $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$ **6.072.** $\begin{cases} \frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0. \end{cases}$

6.073. $\begin{cases} y^2-xy=-12, \\ x^2-xy=28. \end{cases}$ **6.074.** $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=9, \\ \frac{(x+y)x}{y}=20. \end{cases}$

6.075. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5. \end{cases}$ **6.076.** $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12, \\ x^2y^3-x^3y^2=4. \end{cases}$

6.077. $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3. \end{cases}$ **6.078.** $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.079. $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2. \end{cases}$ **6.080.** $\begin{cases} u^2+uv=15, \\ v^2+uv=10. \end{cases}$

6.081. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$ **6.082.** $\begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2. \end{cases}$

6.083. $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y, \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y. \end{cases}$ **6.084.** $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

6.085. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$ **6.086.** $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.087. $\begin{cases} x^4-y^4=15, \\ x^3y-xy^3=6. \end{cases}$ **6.088.** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

6.089. $\begin{cases} u^3+v^3+1=m, \\ u^3v^3=-m. \end{cases}$ **6.090.** $\begin{cases} ax+\dfrac{b}{y}=2, \\ \dfrac{b}{x}+ay=2ab. \end{cases}$

6.091. $\begin{cases} (x-y)xy=30, \\ (x+y)xy=120. \end{cases}$ **6.092.** $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

6.093. $\begin{cases} v-u=1, \\ w-v=1, \\ (u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=3. \end{cases}$

6.094. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6}, \\ xy=5. \end{cases}$ **6.095.** $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

6.096. $\begin{cases} x^2y^3=16, \\ x^3y^2=2. \end{cases}$ **6.097.** $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

6.098. $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$ **6.099.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91, \\ x+\sqrt{xy}+y=13. \end{cases}$

6.100. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8. \end{cases}$

6.101. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8 \end{cases}$ (laikykite, kad $\sqrt{x+y}=u$, $\sqrt[3]{x-y}=v$).

6.102. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$

6.103. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4 \end{cases}$ (laikykite, kad $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=z$).

6.104. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}\sqrt{x}=12, \\ xy=64. \end{cases}$

6.105. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$ **6.106.** $\begin{cases} u^2+v^2=uv+13, \\ u+v=\sqrt{uv}+3. \end{cases}$

6.107. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ xy=9. \end{cases}$

6.108. $\begin{cases} 3(2-\sqrt{x-y})^{-1}+10(2+\sqrt{x+y})^{-1}=5, \\ 4(2-\sqrt{x-y})^{-1}-5(2+\sqrt{x+y})^{-1}=3. \end{cases}$

6.109. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$ **6.110.** $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8. \end{cases}$

6.111. $\begin{cases} 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$ **6.112.** $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4. \end{cases}$

6.113. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+a}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=2, \\ x+y=xy+a. \end{cases}$ **6.114.** $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

6.115. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$ **6.116.** $\begin{cases} \sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v}=1, \\ \sqrt{u}+\sqrt{v}=5. \end{cases}$

6.117. $\begin{cases} x-y=8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a. \end{cases}$ **6.118.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14, \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3. \end{cases}$

6.119. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.120. Nespręsdami lygties $ax^2+bx+c=0$, apskaičiuokite sumą $x_1^{-2}+x_2^{-2}$; čia x_1 ir x_2 — duotosios lygties šaknys.

6.121. Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios šaknys $\dfrac{1}{x_1}$ ir $\dfrac{1}{x_2}$, kai x_1 ir x_2 — lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys.

6.122. Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios viena šaknis būtų lygi lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknų sumai, o antra šaknis — tos lygties šaknų sandaugai.

6.123. Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios šaknys būtų vienetu didesnės už lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknis.

6.124. Raskite kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ koeficientus, kai jos šaknys lygios p ir q.

6.125. Raskite lygties $x^2+Ax+B=0$ koeficientus A ir B, kai žinoma, kad skaičiai A ir B yra ir tos lygties šaknys.

6.126. Su kuria sveikąja k reikšme viena lygties $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ šaknis yra tris kartus mažesnė už kitą šaknį?

6.127. Su kuria sveikąja p reikšme lygtys $3x^2-4x+p-2=0$ ir $x^2-2px+5=0$ turi bendrą šaknį? Raskite tą šaknį.

6.128. Raskite visas a reikšmes, su kuriomis lygties $x^2-2a(x-1)-1=0$ šaknų suma lygi šaknų kvadratų sumai.

6.129. Su kuria a reikšme lygtys $x^2+ax+8=0$ ir $x^2+x+a=0$ turi bendrą šaknį?

6.130. Raskite c reikšmę, su kuria lygties $x^2-2x+c=0$ šaknys x_1 ir x_2 tenkina sąlygą $7x_2-4x_1=47$.

6.131. Nespręsdami lygties $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$, raskite a reikšmę, su kuria viena lygties šaknis dvigubai didesnė už kitą.

6.132. Su kuria p reikšme lygties $x^2+px-16=0$ šaknų santykis lygus -4?

6.133. Nespręsdami lygties $3x^2-5x-2=0$, raskite jos šaknų kubų sumą.

6.134. Su kuria sveikąja b reikšme lygtys $2x^2+(3b-1)x-3=0$ ir $6x^2-(2b-3)x-1=0$ turi bendrą šaknį?

6.135. Su kuria teigiamąja c reikšme lygties $8x^2-6x+9c^2=0$ viena šaknis lygi kitos šaknies kvadratui?

B grupė

Išspręskite lygtis (**6.136—6.182**):

6.136. $\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{x^2+2}{x-2}=-2.$

6.137. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x}=\frac{25}{6}.$

6.138. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81.$

6.139. $(x+1)^5+(x-1)^5=32x.$

6.140. $\frac{z^2-z}{z^2-z+1}-\frac{z^2-z+2}{z^2-z-2}=1.$

6.141. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2.$

6.142. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$

6.143. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}.$

6.144. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55.$

6.145. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12.$

6.146. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1.$

6.147. $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$

6.148. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9.$

6.149. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5.$

6.150. $\frac{u^2}{2-u^2}+\frac{u}{2-u}=2.$

6.151. $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x+m}{x+1}=\frac{x-2m}{x-2}+\frac{x+2m}{x+2}-\frac{6(m-1)}{5}.$

6.152. $\frac{z+4}{z-1}+\frac{z-4}{z+1}=\frac{z+8}{z-2}+\frac{z-8}{z+2}+6.$

6.153. $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5.$

6.154. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}.$

6.155. $ax^4-x^3+a^2x-a=0.$

6.156. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

6.157. $2(x-1)^2-5(x-1)(x-a)+2(x-a)^2=0.$

6.158. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

6.159. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$

6.160. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}.$

6.161. $(x-1)x(x+1)+x(x+1)(x+2)=$
$=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16.$

6.162. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\frac{65}{8}$ $(a\neq 0)$.

6.163. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0.$

6.164. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

6.165. $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\frac{13}{6}.$

6.166. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

6.167. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

6.168. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

6.169. $\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2.$

6.170. $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6.$

6.171. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

7. Užsak. Nr. 1941.

6.172. $(x+\sqrt{x^2-1})^5\cdot(x-\sqrt{x^2-1})^3=1.$

6.173. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}.$

6.174. $\frac{z}{z+1}-2\sqrt{\frac{z+1}{z}}=3.$

6.175. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0.$

6.176. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^3+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2=2.$

6.177. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0.$

6.178. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\frac{7}{3}.$

6.179. $|x|+|x-1|=1.$

6.180. $(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+$
$+(x^2+20x+39)=4500.$

6.181. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0.$

6.182. $|x|^3+|x-1|^3=9.$

Išspręskite lygčių sistemas (**6.183—6.243**):

6.183. $\begin{cases} xy(x+1)(y+1)=72, \\ (x-1)(y-1)=2. \end{cases}$

6.184. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

6.185. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

6.186. $\begin{cases} ax+by+cz=k, \\ a^2x+b^2y+c^2z=k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z=k^3, \\ a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a. \end{cases}$

6.187. $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10, \\ (x+y)(xy+1)=25. \end{cases}$

6.188. $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3, \\ x-by+b^2z=b^3, \\ x-cy+c^2z=c^3, \\ a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a. \end{cases}$

6.189. $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5, \\ (x+y)(x^2-y^2)=9. \end{cases}$

6.190. $\begin{cases} xy=a, \\ yz=b, \\ zx=c, \\ abc>0. \end{cases}$

6.191. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x, \\ y^2+x=6. \end{cases}$

6.192. $\begin{cases} \frac{4}{x+y}+\frac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20. \end{cases}$

6.193. $\begin{cases} x+yz=2, \\ y+zx=2, \\ z+xy=2. \end{cases}$

6.194. $\begin{cases} \frac{5}{x^2-xy}+\frac{4}{y^2-xy}=-\frac{1}{6}, \\ \frac{7}{x^2-xy}-\frac{3}{y^2-xy}=\frac{6}{5}. \end{cases}$

6.195. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0, \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0. \end{cases}$

6.196. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$

6.197. $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

6.198. $\begin{cases} x+y+\frac{1}{x-y}=\frac{ab+1}{b}, \\ x-y+\frac{1}{x+y}=\frac{ab+1}{a}. \end{cases}$

6.199. $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{4}, \\ 2x+3y-5z+19=0. \end{cases}$

6.200. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

6.201. $\begin{cases} \frac{4}{x+y-1}-\frac{5}{2x-y+3}+\frac{5}{2}=0, \\ \frac{3}{x+y-1}+\frac{1}{2x-y+3}+\frac{7}{5}=0. \end{cases}$

6.202. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3, \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3, \\ \frac{1}{xyz}=1. \end{cases}$

6.203. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2, \\ a\neq b\neq c. \end{cases}$

6.204. $\begin{cases} x+y+\frac{x^2}{y^2}=7, \\ \frac{(x+y)x^2}{y^2}=12. \end{cases}$

6.205. $\begin{cases} \frac{3}{x^2+y^2-1}+\frac{2y}{x}=1, \\ x^2+y^2+\frac{4x}{y}=22. \end{cases}$

6.206. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

6.207. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8. \end{cases}$

6.208. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2)=15a^3. \end{cases}$

6.209. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ x^2y+xy^2=-6. \end{cases}$

6.210. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

6.211. $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=\frac{16}{3}, \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{9}{2}. \end{cases}$

6.212. $\begin{cases} \frac{3}{uv}+\frac{15}{vw}=2, \\ \frac{15}{vw}+\frac{5}{wu}=2, \\ \frac{5}{wu}+\frac{3}{uv}=2. \end{cases}$

6.213. $\begin{cases} x^6+y^6=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$

6.214. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14. \end{cases}$

6.215. $\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$ **6.216.** $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ x+y^2-20=0. \end{cases}$

6.217. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$ **6.218.** $\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3. \end{cases}$

6.219. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y-z=2, \\ x+yz+zx=3. \end{cases}$ **6.220.** $\begin{cases} \frac{x^3}{y}+xy=40, \\ \frac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

6.221. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$

6.222. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x+1}}=2, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\frac{y+2}{x+1}}=1{,}5. \end{cases}$

6.223. $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

6.224. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$ **6.225.** $\begin{cases} \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3, \\ x+y=17. \end{cases}$

6.226. $\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{y+\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)y+(y^2+1)x=4xy. \end{cases}$

6.227. $\begin{cases} \sqrt[3]{u+v}+\sqrt[3]{v+w}=3, \\ \sqrt[3]{v+w}+\sqrt[3]{w+u}=1, \\ \sqrt[3]{w+u}+\sqrt[3]{u+v}=0. \end{cases}$

6.228. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$ **6.229.** $\begin{cases} x+\sqrt{y}-56=0, \\ \sqrt{x}+y-56=0. \end{cases}$

6.230. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

6.231. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

6.232. $\begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

6.233. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1, \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

6.234. $\begin{cases} u^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{u}+v^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{v}=1{,}5, \\ uv=64. \end{cases}$

6.235. $\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\frac{x}{y+1}}=1, \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5. \end{cases}$

6.236. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6, \\ xy^2=6\sqrt{10}. \end{cases}$

6.237. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=5. \end{cases}$ **6.238.** $\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right)^2}=1{,}6, \\ xy=2. \end{cases}$

6.239. $\begin{cases} |2x+3y|=5, \\ |2x-3y|=1. \end{cases}$ **6.240.** $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}, \\ |x+y|=5. \end{cases}$

6.241. $\begin{cases} u-v+\sqrt{\frac{u-v}{u+v}}=\frac{12}{u+v}, \\ u^2+v^2=41. \end{cases}$

6.242. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2, \\ x^2-18=2y(4y-9). \end{cases}$

6.243. $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-88}+\sqrt{x+6y}=19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-88}=1+2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

6.244. Išspręskite lygtį

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\ldots+$$
$$+(x+9)(x+10)=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+9\cdot10.$$

6.245. Raskite kvadratinio trinario x^2+mx+n koeficientus m ir n; yra žinoma, kad to trinario liekanos, gautos padalijus jį iš dvinarių $x-m$ ir $x-n$, atitinkamai lygios m ir n.

6.246. Kvadratinė lygtis $ax^2+bx+c=0$ turi dvi šaknis. Sudarykite naują kvadratinę lygtį, kurios viena šaknis yra vienetu mažesnė už pradinės lygties didesniąją šaknį, o kita šaknis vienetu didesnė už pradinės lygties mažesniąją šaknį.

6.247. Nustatykite, su kuriomis m reikšmėmis lygties $z^3-(m^2-m+7)z-(3m^2-3m-6)=0$ viena šaknis lygi -1. Raskite kitas dvi lygties šaknis, kai m įgyja tas reikšmes.

6.248. Lygties $ax^2+bx+c=0$ koeficientus a, b ir c sieja sąlyga $2b^2-9ac=0$. Įrodykite, kad lygties šaknų santykis lygus 2.

6.249. Jeigu a ir b — lygties $x^2+px+1=0$ šaknys, o b ir c — lygties $x^2+qx+2=0$ šaknys, tai $(b-a)(b-c)=pq-6$. Įrodykite.

6.250. Su kuriomis a reikšmėmis lygtys $x^2+ax+1=0$ ir $x^2+x+a=0$ turi bendrą šaknį?

6.251. Su kuria teigiamąja p reikšme lygties $5x^2-4(p+3)x+4=p^2$ šaknų ženklai yra priešingi? Raskite tas šaknis.

6.252. Lygties $x^2+px+q=0$ šaknų skirtumas lygus 5, o jų kubų skirtumas lygus 35. Raskite lygties koeficientus.

6.253. Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios šaknys $(a+b)^2$ ir $(a-b)^2$, kai a ir b — lygties $x^2+px+q=0$ šaknys.

6.254. Lygties $3x^2+7x+4=0$ šaknis pažymėkite raidėmis α ir β. Nespręsdami šios lygties, sudarykite naują kvadratinę lygtį su skaitiniais koeficientais, kurios šaknys lygios $\frac{\alpha}{\beta-1}$ ir $\frac{\beta}{\alpha-1}$.

6.255. Įrodykite, kad iš visų lygties $x^4+5x^3+15x-9=0$ šaknų yra tik viena teigiama ir tik viena neigiama šaknis (pačių šaknų ieškoti nebūtina).

C grupė

Išspręskite lygtis **(6.256—6.302):**

6.256. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

6.257. $u^3-(2a+1)u^2+(a^2+2a-b^2)u+(b^2-a^2)=0.$

6.258. $x^3-2x^2-(a^2-a-1)x+(a^2-a)=0$

6.259. $x^3-(3a-1)x^2+(2a^2-3a)x+2a^2=0.$

6.260. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1).$

6.261. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a)x-(a^2-a)=0.$

6.262. $(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})=6.$

6.263. $(x-2)^6+(x-4)^6=64.$

6.264. $x^3-x^2-\frac{8}{x^3-x^2}=2.$

6.265. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a-m)x-(a^2-m)=0.$

6.266. $x^3-3ax^2+(3a^2-b)x-(a^3-ab)=0;\ b\geqslant 0.$

6.267. $x^3-(p^2-p+7)x-3(p^2-p-2)=0.$

6.268. $z^3-(2p+1)z^2+(p^2+2p-q)z-(p^2-q)=0.$

6.269. $x^3-2ax^2+(a^2+2\sqrt{3}a-9)x-(2a^2\sqrt{3}-12a+6\sqrt{3})=0.$

6.270. $10x^3-3x^2-2x+1=0.$

6.271. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$

6.272. $27x^3+9x^2-48x+20=0.$

6.273. $4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0.$

6.274. $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40.$ **6.275.** $\frac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1+x.$

6.276. $\frac{20}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}+x=22.$

6.277. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$

6.278. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$

6.279. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2.$

6.280. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0.$

6.281. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}.$

6.282. $\sqrt{u^2-u-1}+\sqrt{u^2+u+3}=\sqrt{2u^2+8}$ (raskite tik teigiamąsias šaknis).

6.283. $\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16.$

6.284. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

6.285. $\frac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\frac{4}{3}x+2.$

6.286. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

6.287. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}.$

6.288. $\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$

6.289. $x^{\frac{4}{5}}-7x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-1}=0.$

6.290. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

6.291. $8{,}4\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}.$

6.292. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$

6.293. $\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\frac{x}{2}\sqrt[7]{\frac{x^2}{x+\sqrt{2}}}.$

6.294. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$

6.295. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8.$

6.296. $\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

6.297. $\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{x^2-25x-150}=3\sqrt{\frac{x+5}{x-30}}.$

6.298. $\frac{\left(\sqrt[3]{(15-x)^2}+\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}+\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\frac{49}{3}.$

6.299. $\frac{2}{19}\left(\sqrt{x^2+37x+336}-\sqrt{x^2+18x+32}\right)=\sqrt{\frac{21+x}{16+x}}.$

6.300. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11.$

6.301. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

6.302. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12.$

Išspręskite lygčių sistemas **(6.303—6.341):**

6.303. $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=16,\\(x-y)(x^2+y^2)=40.\end{cases}$

6.304. $$\begin{cases} \dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1, \\ \dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1, \\ -\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1. \end{cases}$$

6.305. $$\begin{cases} uvx^2=8, \\ vx^2w=24, \\ x^2wu=12, \\ u+v+w=x+4 \end{cases}$$

(raskite tik teigiamuosius sprendinius).

6.306. $$\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ 3x+2y+z=0, \\ 3(x+2)^3+2(y+1)^3+(z+1)^3=27. \end{cases}$$

6.307. $$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3, \\ x+y+z=3. \end{cases}$$

6.308. $$\begin{cases} xy+yz=8, \\ yz+zx=9, \\ zx+xy=5. \end{cases}$$

6.309. $$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$$

6.310. $$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+2xy=\dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy}+x^2+y^2=\dfrac{21}{4}. \end{cases}$$

6.311. $$\begin{cases} 10(x^4+y^4)=-17(x^3y+xy^3), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

6.312. $$\begin{cases} x-y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ x^3-y^3+z^3=36. \end{cases}$$

6.313. $$\begin{cases} (x+y)(x+2y)(x+3y)=60, \\ (y+x)(y+2x)(y+3x)=105. \end{cases}$$

6.314. $$\begin{cases} x+y+z=6, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1{,}5, \\ xyz=8. \end{cases}$$

6.315. $$\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ 2xy^2-x^2y=1 \end{cases}$$

(raskite tik sveikaskaičius sprendinius).

6.316. $$\begin{cases} uv+vw=2a^2, \\ vw+wu=2a^2-a-1, \\ wu+uv=2a^2+a-1. \end{cases}$$

6.317. $$\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 3x+2y+z=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$$

6.318. $$\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30. \end{cases}$$

6.319. $$\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2. \end{cases}$$

6.320. $$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$$

6.321. $$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12, \\ (xy)^2+xy=6. \end{cases}$$

6.322. $$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14, \\ x+y=3. \end{cases}$$

6.323. $$\begin{cases} 8x+\dfrac{8}{y}=3y^2, \\ y+\dfrac{1}{x}=3x^2. \end{cases}$$

6.324. $$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$$

6.325. $$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$$

6.326. $$\begin{cases} 9(u^4+v^4)=17(u+v)^2, \\ 3uv=-2(u+v). \end{cases}$$

6.327. $$\begin{cases} xy+\dfrac{y}{x}=2(x^2+y^2), \\ xy-\dfrac{x}{y}=x^2+y^2. \end{cases}$$

6.328. $$\begin{cases} (u^2+v^2)(u+v)=15uv, \\ (u^4+v^4)(u^2+v^2)=85u^2v^2. \end{cases}$$

6.329. $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$$

(raskite tik sveikaskaičius sprendinius).

6.330. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

6.331. $$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$$

6.332. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{z}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3, \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3, \\ \sqrt{xyz}=1. \end{cases}$$

6.333. $$\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5, \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$$

6.334. $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1. \end{cases}$$

6.335. $$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8, \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12. \end{cases}$$

6.336. $$\begin{cases} \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y), \\ x^2-y^2=41. \end{cases}$$

6.337. $$\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6, \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12, \\ x+y+z=14. \end{cases}$$

6.338. $$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}. \end{cases}$$

6.339. $$\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

6.340. $$\begin{cases} u+v+\sqrt{u^2-v^2}=12, \\ v\sqrt{u^2-v^2}=12. \end{cases}$$

6.341. $$\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32, \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162. \end{cases}$$

6.342. Duota lygtis $ax^2+bx+c=0$. Sakykime, $S_n=\alpha^n+\beta^n$; čia α ir β — pradinės lygties šaknys. Raskite S_n, S_{n+1} ir S_{n+2} tarpusavio priklausomybę.

6.343. Skaičiai x_1, x_2, x_3 yra lygties $x^3+px^2+qx+r=0$ šaknys. Reikia: 1) sudaryti lygtį, kurios šaknys x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1; 2) remiantis pirmo uždavinio atsakymu, rasti lygties $x^3-3\sqrt{2}x^2+7x-3\sqrt{2}=0$ šaknis.

6.344. Raskite lygties $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$ koeficientus a ir b, kai žinoma, kad tarp jos šaknų yra trys lygūs sveikieji skaičiai.

6.345. Raskite lygties $x^4-10x^3+37x^2+px+q=0$ koeficientus p ir q, kai žinoma, kad tarp jos šaknų yra dvi poros lygių skaičių.

6.346. Lygties $x^3+ax^2+bx+1=0$ šaknų sumos ir jų atvirkštinių dydžių sumos sandaugą išreikškite koeficientais a ir b.

6.347. Įrodykite, kad lygybė $ab=c$ išreiškia būtiną ir pakankamą sąlygą: tarp lytgies $x^3+ax^2+bx+c=0$ šaknų yra du skaičiai, kurių suma lygi nuliui.

6.348. Išspręskite lygtį $12x^3+4x^2-17x+6=0$, kai žinoma, kad tarp jos šaknų yra du skaičiai, kurių absoliutiniai didumai atvirkštiniai, o ženklai priešingi.

6.349. Išspręskite lygtis $2x^3-5x^2+6x-2=0$ ir $6x^3-3x^2-2x+1=0$, kai žinoma, kad jos turi vieną bendrą šaknį.

6.350. Sudarykite trečiojo laipsnio lygtį, kai jos šaknys lygios x_1^2, x_1x_2 ir x_2^2, o skaičiai x_1 ir x_2 yra lygties $x^2+px+q=0$ šaknys.

6.351. Išspręskite lygtis $x^3-6x^2-39x-10=0$ ir $x^3+x^2-20x-50=0$; yra žinoma, kad viena pirmosios lygties šaknis yra du kartus didesnė už vieną antrosios lygties šaknį.

6.352. Išspręskite lygtis $x^4-x^3-22x^2+16x+96=0$ ir $x^3-2x^2-3x+10=0$; yra žinoma, kad jos turi bendrą šaknį.

6.353. Raskite visas λ reikšmes, su kuriomis lygtys $\lambda x^3-x^2-x+(\lambda+1)=0$ ir $\lambda x^2-x-(\lambda+1)=0$ turi bendrą šaknį, ir raskite tą šaknį.

6.354. Yra žinoma, kad lygties $8x^3+4x^2-34x+15=0$ dvi šaknis x_1 ir x_2 sieja sąryšis $2x_1-4x_2=1$. Išspręskite tą lygtį.

6.355. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n teisinga lygybė $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$, ir, remdamiesi ja, išspręskite lygtį

$$(1+3+5+\ldots+(2n+1)):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}\right)=342.$$

6.356. Lygtis $x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0$ turi mažiausiai vieną porą šaknų, kurių skirtumas lygus 1. Išspręskite tą lygtį.

6.357. Dviejų lygties $3x^3+2\sqrt{3}x^2-21x+6\sqrt{3}=0$ šaknų sandauga lygi 1. Išspręskite šią lygtį.

6.358. Viena lygties $x^3-7x^2+12x-10=0$ šaknis yra perpus mažesnė už vieną lygties $x^3-10x^2-2x+20=0$ šaknį. Išspręskite šias lygtis.

6.359. Lygties $ax^3+bx^2+cx+d=0$ koeficientai tenkina sąlygą $ad=bc$. Raskite visas tris šios lygties šaknis.

6.360. Sąlyga $kb^2-(k+1)^2ac=0$ $(k\neq 0)$ yra būtina ir pakankama, kad lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknų santykis būtų lygus k. Įrodykite.

6.361. Lygties $ax^3+bx^2+cx+d=0$ koeficientai a, b, c ir d nurodyta tvarka sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis q. Išspręskite tą lygtį.

6.362. Lygties $x^3+ax^2+bx+c=0$ šaknys sudaro geometrinę progresiją. Įrodykite, kad viena iš jų lygi $-\sqrt[3]{c}$.

6.363. Yra žinoma, kad lygties $64x^3-24x^2-6x+1=0$ šaknys sudaro geometrinę progresiją. Išspręskite tą lygtį.

6.364. 1. Sakykime, skaičiai x_1, x_2 ir x_3 yra daugianario ax^3+bx^2+cx+d šaknys. Tokiu atveju teisinga tapatybė

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Remdamiesi ja, išveskite formules, siejančias duotojo daugianario šaknis ir koeficientus.

2. Remdamiesi 6.364. 1 uždavinio formulėmis ir sudarę bei išsprendę naują trečiojo laipsnio lygtį, kurios šaknys x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1, raskite lygties $8x^3-20x^2-10x+33=0$ šaknis x_1, x_2 ir x_3.

6.365. Raskite lygties $(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})=6$ šaknis.

6.366. Sudarykite kuo žemesnio laipsnio lygtį, kurios koeficientai — sveikieji skaičiai, o viena šaknų — skaičius $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

6.367. Įrodykite, kad lygties $x+x^{-1}=2\cos 40°$ šaknys yra kartu ir lygties $x^4+x^{-4}=2\cos 160°$ šaknys.

6.368. Išspręskite lygtį $x^4-4x^3+3x^2+8x-10=0$; yra žinoma, kad dvi jos šaknys skiriasi viena nuo kitos tik ženklu.

6.369. Lygtis $2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2=0$ turi tris šaknis, kurių dvi yra priešingieji skaičiai (priešingais vadinami du skaičiai, kurių suma lygi nuliui). Išspręskite šią lygtį.

6.370. Įrodykite, kad lygtis $\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$ turi vienintelę teigiamą šaknį, ir raskite tą šaknį.

7 SKYRIUS
LOGARITMAI. RODIKLINĖS IR LOGARITMINĖS LYGTYS

SVARBIAUSIOS SAVYBĖS IR FORMULĖS

Rodiklinės funkcijos $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ savybės

1°. Funkcijos apibrėžimo sritis — visų realiųjų skaičių aibė $\mathbf{R}$.

2°. Funkcijos reikšmių sritis — visų teigiamųjų skaičių aibė $\mathbf{R}_+$: $a^x>0$ su kiekviena realiąja x reikšme.

3°. Kai $a>1$, funkcija didėja, t. y. kai $x_1<x_2$, tai $a^{x_1}<a^{x_2}$. Kai $0<a<1$, funkcija mažėja, t. y. kai $x_1<x_2$, tai $a^{x_1}>a^{x_2}$.

4°. Kai $a^{x_1}=a^{x_2}$, tai $x_1=x_2$.

Logaritminės funkcijos $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ savybės

1°. Funkcijos apibrėžimo sritis — visų teigiamųjų realiųjų skaičių aibė $\mathbf{R}_+$.
2°. Funkcijos reikšmių sritis — visų realiųjų skaičių aibė $\mathbf{R}$.
3°. Kai $a>1$, funkcija didėja, t. y. kai $x_2>x_1>0$, tai $\log_a x_2>\log_a x_1$. Kai $0<a<1$, funkcija mažėja, t. y. kai $x_2>x_1>0$, tai $\log_a x_2<\log_a x_1$.

Logaritmų savybės

1°. Kai $x>0$, tai

$$x=a^{\log_a x} \tag{7.1}$$

(pagrindinė logaritmų tapatybė).

2°. Pagrindo logaritmas lygus vienetui:

$$\log_a a=1. \tag{7.2}$$

3°. Vieneto logaritmas lygus nuliui:

$$\log_a 1=0. \tag{7.3}$$

4°. Kai $x_1>0$ ir $x_2>0$, tai

$$\log_a (x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2 \tag{7.4}$$

(sandaugos logaritmo formulė);

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2 \tag{7.5}$$

(dalmens logaritmo formulė).

5°. Kai $x>0$, tai

$$\log_a x^p=p\log_a x; \tag{7.6}$$

čia p — bet kuris realusis skaičius **(laipsnio logaritmo formulė).**

6°. Kai $x>0$, tai

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{7.7}$$

su bet kuriuo realiuoju skaičiumi $b>0$ ir $b\neq 1$ **(logaritmo pagrindo keitimo formulė).**

Pavyzdžiui,

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ \text{arba}\ \log_a b\cdot\log_b a=1; \tag{7.8}$$

$$\log_a b=\log_{a^p} b^p=p\log_{a^p} b\quad (p\in\mathbf{R},\ p\neq 0). \tag{7.9}$$

NURODYMAI, KAIP SPRĘSTI RODIKLINES IR LOGARITMINES LYGTIS

1°. Rodiklinė lygtis

$$a^{f(x)}=b^{g(x)}\quad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1) \tag{7.10}$$

ekvivalenti lygčiai

$$f(x)\log_c a=g(x)\log_c b, \tag{7.11}$$

gaunamai išlogaritmavus (7.10) lygtį kuriuo nors pagrindu $c>0$, $c\neq 1$.
Pavyzdžiui, lygtis $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ekvivalenti lygčiai $f(x)=g(x)$.

2°. Lygties

$$(u(x))^{f(x)}=(u(x))^{g(x)} \tag{7.12}$$

šaknimis laikomi tik mišriosios sistemos

$$\begin{cases} u(x)>0, \\ u(x)\neq 1, \\ f(x)=g(x) \end{cases} \tag{7.13}$$

sprendiniai ir tos x reikšmės, su kuriomis $u(x)=1$, jeigu su šiomis reikšmėmis apibrėžtos $f(x)$ ir $g(x)$. Funkcija $(u(x))^{f(x)}$ apibrėžta tik su $u(x)>0$. Todėl tų x reikšmių, kurios formaliai tenkina (7.12) lygybę, bet su kuriomis $u(x)\leqslant 0$, paprastai nelaikome (7.12) lygties šaknimis.

3°. Logaritminė lygtis

$$\log_a f(x)=b \tag{7.14}$$

ekvivalenti lygčiai

$$f(x)=a^b. \tag{7.15}$$

4°. Logaritminė lygtis

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\quad (a>0,\ a\neq 1) \tag{7.16}$$

ekvivalenti kiekvienai šių sistemų:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)=g(x) \end{cases}\ \text{arba}\ \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \tag{7.17}$$

Ieškant (7.16) lygties sprendinių, sprendžiama tik viena šių sistemų (ta, kuri paprastesnė) arba lygtis $f(x)=g(x)$, kuri gali turėti šaknų, pašalinių pradinei lygčiai, ir kiekviena šaknis patikrinama — įrašoma į pradinę lygtį.

5°. Lygtys

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a u(x), \tag{7.18}$$

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)=\log_a u(x), \tag{7.19}$$

$$p\log_a f(x)=\log_a u(x) \tag{7.20}$$

sprendžiamos taikant (7.4)—(7.6) formules. Bet pirmiausia tos lygtys užrašomos taip:

$$\log_a(f(x)\cdot g(x))=\log_a u(x), \tag{7.21}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)}=\log_a u(x), \tag{7.22}$$

$$\log_a(f(x))^p=\log_a u(x), \tag{7.23}$$

po to sprendžiamos, kaip nurodyta 4° punkte.
Kurios šaknys tinka atsakymui, sužinosime vienu iš dviejų būdų: patikriname, ar rastos šaknys tenkina nelygybes $f(x)>0$, $g(x)>0$, $u(x)>0$, arba patikriname kiekvieną rastą šaknį.

6°. Kartais, spręsdami lygtis pagal (7.4)—(7.6) formules, po pertvarkymo gauname: $\log_a(f(x)\cdot g(x))$, $\log_a \frac{f(x)}{g(x)}$, $\log_a(f(x))^p$; čia p — lyginis skaičius. Tokiu atveju galima prarasti duotos lygties šaknis. Norint to išvengti, reikia remtis tokiomis formulėmis:

$$\log_a(f(x)\cdot g(x))=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)|, \tag{7.24}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|, \qquad (7.25)$$

$$\log_a (f(x))^p = p\log_a|f(x)|, \ p \text{ — lyginis skaičius.} \qquad (7.26)$$

1 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sqrt{5}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2x}} - 0{,}04^{1-x}=0$.

△ Visus laipsnius galime užrašyti tuo pačiu pagrindu 5. Gauname:

$$\sqrt{5}=5^{\frac12},\quad 0{,}2^{\frac{1}{2x}}=\left(\frac15\right)^{\frac{1}{2x}}=5^{-\frac{1}{2x}},\quad 0{,}04^{1-x}=\left(\frac{1}{25}\right)^{1-x}=5^{-2(1-x)}.$$

Tuomet duotoji lygtis virs tokia:

$$5^{\frac12}\cdot 5^{-\frac{1}{2x}}-5^{-2(1-x)}=0, \text{ arba } 5^{\frac12-\frac{1}{2x}}=5^{-2(1-x)}.$$

Remdamiesi 1^0 nurodymu, šią lygtį pakeiskime jai ekvivalenčia lygtimi $\frac12 - \frac{1}{2x} = -2(1-x)$. Pertvarkę ją, gausime: $\begin{cases}4x^2-5x+1=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$ iš čia $x_1=1$, $x_2=\frac14$. ▲

2 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$35\cdot 3^{x^2}-35\cdot 5^{2x}-3^{x^2}+5^{2x}=0.$$

△ Sugrupavę panašiuosius narius, gauname: $3^{x^2}(35-1)-5^{2x}(35-1)=0$, arba $3^{x^2}=5^{2x}$. Abi lygties puses logaritmuokime pagrindu 10 (žr. 1^0 nurodymą). Gausime ekvivalenčią lygtį

$$x^2\lg 3=2x\lg 5, \text{ arba } x(x\lg 3-2\lg 5)=0;$$

iš čia $x_1=0$, $x_2=\frac{2\lg 5}{\lg 3}$. ▲

3 pavyzdys. Išspręskite lygtį $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}-1}+2=0$.

△ Kadangi $4^{\sqrt{x}}=2^{2\sqrt{x}}$ ir $2^{\sqrt{x}-1}=2^{\sqrt{x}}\cdot 2^{-1}=\frac12\cdot 2^{\sqrt{x}}$, tai duotoji lygtis bus tokia: $2^{2\sqrt{x}}-\frac92\cdot 2^{\sqrt{x}}+2=0$. Pakeiskime kintamąjį: $2^{\sqrt{x}}=y$; čia $y>0$ pagal rodiklinės funkcijos 2^0 savybę. Tuomet gausime lygtį $y^2-\frac92 y+2=0$, kurios šaknys $y_1=4$, $y_2=\frac12$ yra teigiamos. Iš lygties $2^{\sqrt{x}}=4$ gauname: $2^{\sqrt{x}}=2^2$, $\sqrt{x}=2$, $x=4$. Iš lygties $2^{\sqrt{x}}=\frac12$ gauname: $2^{\sqrt{x}}=2^{-1}$, $\sqrt{x}=-1$, tačiau tai neįmanoma. Taigi atsakymas toks: $x=4$. ▲

4 pavyzdys. Išspręskite lygtį $|x-2|^{x^2-2x}=|x-2|^{5x-10}$.

△ Pagal 2^0 nurodymą lygties šaknys yra mišriosios sistemos

$$\begin{cases}|x-2|>0,\\ |x-2|\neq 1,\\ x^2-2x=5x-10,\end{cases} \quad\text{arba}\quad \begin{cases}x\neq 2,\\ x\neq 3,\ x\neq 1,\\ x^2-7x+10=0,\end{cases}$$

sprendiniai ir galbūt lygties $|x-2|=1$ sprendiniai. Lygtis $x^2-7x+10=0$ turi dvi šaknis. Sistemos sprendiniu gali būti tik viena jų: $x=5$, o sąlygą $|x-2|=1$ tenkina $x=3$ ir $x=1$. Jie taip pat yra sistemos sprendiniai, nes su šiomis x reikšmėmis funkcijos x^2-2x ir $5x-10$ yra apibrėžtos. Taigi gauname atsakymą: $x=1$, $x=3$, $x=5$. ▲

5 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2(\lg x-\lg 6)=\lg x-2\lg(\sqrt{x}-1).$$

△ Atsižvelgę į logaritminės funkcijos bei kvadratinės šaknies apibrėžimo sritį ir į 5° nurodymą, gauname sistemą, ekvivalenčią duotajai lygčiai:

$$\begin{cases}x>0,\\ \sqrt{x}-1>0,\\ \lg\frac{x^2}{36}=\lg\frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2},\end{cases} \quad\text{arba}\quad \begin{cases}x>0,\\ x>1,\\ \frac{x^2}{36}=\frac{x}{(\sqrt{x}-1)^2}.\end{cases}$$

Abi lygties puses padalykime iš x (šaknų neprarasime, nes $x>0$) ir padauginkime iš $36(\sqrt{x}-1)^2$ (pašalinių šaknų neatsiras, nes $x\neq 1$). Gausime sistemą $\begin{cases}x>1,\\ x(\sqrt{x}-1)^2=36.\end{cases}$ Iš lygties $(\sqrt{x}(\sqrt{x}-1))^2=36$ randame $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$, $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\neq -6$, nes $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)>0$. Toliau spręsdami, gauname $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=6$, arba $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6=0$. Vadinasi, $\sqrt{x}=3$; iš čia $x=9>1$; $\sqrt{x}=-2$, tačiau taip negali būti. Taigi atsakymas toks: $x=9$. ▲

6 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\log_{0,5}\sqrt{1+x}+3\lg_{1/4}(1-x)=\log_{1/16}(1-x^2)^2+2.$$

△ Logaritmų pagrindą pakeiskime pagrindu $\frac14$:

$\log_{0,5}\sqrt{1+x}=\log_{1/4}(1+x)$ (žr. (7.7) arba (7.9) formulę);

$\log_{1/16}(1-x^2)^2=\frac{\log_{1/4}(1-x^2)^2}{\log_{1/4}\frac{1}{16}}=\frac{2\log_{1/4}|1-x^2|}{2}=$

$=\log_{1/4}|1-x^2|$ (žr. (7.7) formulę ir 6^0 nurodymą);

$2=\log_{1/4}\frac{1}{16}$ (žr. (7.6) formulę).

Galiausiai gauname lygtį

$$\log_{1/4}(1+x)+3\log_{1/4}(1-x)=\log_{1/4}|1-x^2|+\log_{1/4}\frac{1}{16}.$$

Atsižvelgę į logaritminės funkcijos apibrėžimo sritį, randame:

$$\begin{cases}1+x>0,\\ 1-x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x>-1,\\ x<1;\end{cases}\quad -1<x<1.$$

Su šiomis x reikšmėmis $1-x^2>0$ ir $|1-x^2|=1-x^2$. Pagal 5^0 nurodymą

$$\log_{1/4}(1+x)(1-x)^3=\log_{1/4}\frac{1-x^2}{16}.$$

Ši lygtis ekvivalenti mišriajai sistemai

$$\begin{cases}-1<x<1,\\ (1+x)(1-x)^3=\frac{1-x^2}{16}.\end{cases}$$

Abi lygties puses padalykime iš $(1+x)(1-x)>0$; šaknų neprarasime. Gausime:

$$\begin{cases}-1<x<1,\\ (1-x)^2=\frac{1}{16}.\end{cases}$$

Išsprendę lygtį $1-x=\frac14$, gauname: $x=\frac34$, $x\in(-1;\ 1)$. Lygties $1-x=-\frac14$

sprendinys $x=\frac{5}{4}$, t.y. x netenkina nelygybių $-1<x<1$. Taigi atsakymas toks: $x=\frac{3}{4}$. ▲

7 pavyzdys. Išspręskite lygtį $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$.

△ Kadangi logaritminė funkcija apibrėžta, kai $x>0$, tai kairioji ir dešinioji duotosios lygties pusė yra teigiama. Logaritmuodami jas pagrindu 10 ir taikydami (7.6) bei (7.2) formules, gauname:

$$\frac{\lg x+5}{3}\lg x=\lg x+1.$$

Kintamąjį $\lg x$ pakeiskime kintamuoju y ir išspręskime lygtį $y^2+5y=3y+3$. Turime $y^2+2y-3=0$; iš čia $y_1=-3$, $y_2=1$. Išsprendę lygtį $\lg x=-3$, gauname: $x=10^{-3}$. Lygties $\lg x=1$ sprendinys bus $x=10$. Taigi $x=0{,}001$, $x=10$. ▲

8 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\log_x(2x^2-4x+3)=2$.

△ Remdamiesi 3° nurodymu ir atsižvelgdami į logaritmo pagrindo apribojimus, užrašome duotajai lygčiai ekvivalenčią sistemą:

$$\begin{cases} x>0;\ x\neq 1, \\ 2x^2-4x+3=x^2. \end{cases}$$

Sprendžiame kvadratinę lygtį $x^2-4x+3=0$; iš čia $x_1=3$, $x_2=1$ (netinka). Taigi $x=3$. ▲

9 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\log_3(x+6)\cdot\log_x 3=2$.

△ Atsižvelgdami į logaritminės funkcijos apibrėžimo sritį, logaritmo pagrindo apribojimus ir (7.8) formulę, gauname duotajai lygčiai ekvivalenčią sistemą:

$$\begin{cases} x+6>0, \\ x>0;\ x\neq 1, \\ \log_3(x+6)\cdot\dfrac{1}{\log_3 x}=2. \end{cases}$$

Sprendžiame tos sistemos lygtį. Kadangi $x\neq 1$, tai $\log_3 x\neq 0$, ir lygtis tampa tokia: $\log_3(x+6)=2\log_3 x$, arba $\log_3(x+6)=\log_3 x^2$, arba $x^2=x+6$ (žr. 4° nurodymą). Randame tos lygties šaknis: $x_1=-2$, $x_2=3$. Iš jų tik $x=3$ tenkina sąlygas $x+6>0$, $x>0$ ir $x\neq 1$. Taigi gauname atsakymą: $x=3$. ▲

10 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\lg x^2=0{,}25\lg(4x+3)^4$.

△ Atsižvelgę į logaritminės funkcijos apibrėžimo sritį, teigiame, kad $x\neq 0$, $4x+3\neq 0$. Taikydami (7.26) formulę (žr. 6° nurodymą), pertvarkome reiškinį $\lg(4x+3)^4$. Tuomet $0{,}25\lg(4x+3)^4=0{,}25\cdot 4\lg|4x+3|=\lg|4x+3|$. Galiausiai gauname lygtį $\lg x^2=\lg|4x+3|$, ekvivalenčią duotajai.

Kai $4x+3>0$, t. y. kai $x>-\frac{3}{4}$, tai $|4x+3|=4x+3$ ir $x^2=4x+3$. Randame šios lygties šaknis: $x_1=2+\sqrt{7}>-\frac{3}{4}$; $x_2=2-\sqrt{7}>-\frac{3}{4}$. Kai $4x+3<0$, t. y. kai $x<-\frac{3}{4}$, tai $|4x+3|=-4x-3$ ir $x^2=-4x-3$. Randame šios lygties šaknis: $x_1=-1<-\frac{3}{4}$, $x_2=-3<-\frac{3}{4}$. Taigi gauname tokį atsakymą: $2\pm\sqrt{7}$; -1; -3. ▲

P a s t a b a. Reiškinį $0{,}25\lg(4x+3)^4$ galima pakeisti tapačiai lygiu jam reiškiniu $\lg((4x+3)^4)^{0,25}$ (žr. 5° nurodymą), tačiau teiginys $\lg((4x+3)^4)^{0,25}=\lg(4x+3)$ būtų neteisingas. Mat, laikantis laipsnio kėlimo laipsniu taisyklės, reikia atsižvelgti į tokią laipsninės funkcijos savybę: su bet kuriuo $n\in N$ $(x^{2n})^{\frac{1}{2n}}=|x|$, o ne x (žr. (2.24) formulę). Todėl $\lg((4x+3)^4)^{0,25}=\lg((4x+3)^4)^{\frac{1}{4}}=\lg|4x+3|$.

A grupė

Suprastinkite (**7.001—7.015**):

7.001. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

7.002. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

7.003. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

7.004. $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

7.005. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_{25}49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{\log_{1,6}25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$.

7.006. $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.

7.007. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

7.008. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{1}{\log_{\sqrt{6}}3}}}{409}\cdot\left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25}7}}-125^{\log_{25}6}\right)$.

7.009. $\left(N^{\frac{1}{\log_2 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_4 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_8 N}}\cdots N^{\frac{1}{\log_{512} N}}\right)^{\frac{1}{15}}$

(logaritmų pagrindai yra vienas po kito einantys natūralieji skaičiaus 2 laipsniai).

7.010. $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49}a}-5^{0,5\log_{\sqrt{5}} a}-1\right)$.

7.011. $\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log^2_{1/a}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$.

7.012. $a^{\frac{2}{\log_b a}+1}b-2a^{\log_a b+1}b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

7.013. $\dfrac{\left(25^{2\frac{1}{\log_{49}25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot 4^{-\frac{2}{\log_3 4}}-a^2}{1-a}$.

7.014. $(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$.

7.015. $\dfrac{1-\log^3_a b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a\frac{a}{b}}$.

8. Užsak. Nr. 1941.

7.016. Kam lygus $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, kai $\log_a 27 = b$?

7.017. Įrodykite, kad iš lygybės $x^2+4y^2=12xy$ išplaukia lygybė

$$\lg(x+2y) - 2\lg 2 = 0{,}5(\lg x + \lg y),$$

kai $x>0$ ir $y>0$.

7.018. Apskaičiuokite sumą 2^x+2^{-x}, kai $4^x+4^{-x}=23$.

7.019. Įrodykite: jeigu $y=2^{x^2}$ ir $z=2^{y^2}$, tai $x = \pm\sqrt{0{,}5\log_2\log_2 z}$. Nurodykite visas z reikšmes, su kuriomis x įgyja realiąsias reikšmes.

Išspręskite lygtis (**7.020—7.046**):

7.020. $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - 3^{\frac{1}{x}}\right)$.

7.021. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$.

7.022. $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_9\sqrt{3x} = 1$.

7.023. $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0{,}5 = 0$.

7.024. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$.

7.025. $\log_2 182 - 2\log_2\sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1$.

7.026. $\log_5\sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5\sqrt{2x-1} = 0$.

7.027. $\lg(x+1{,}5) = -\lg x$.

7.028. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}$.

7.029. $0{,}25^{\log_2\sqrt{x+3} - 0{,}5\log_2(x^2-9)} = \sqrt{2(7-x)}$.

7.030. $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$.

7.031. $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$.

7.032. $\dfrac{2-\lg 4+\lg 0{,}12}{\lg(\sqrt{3x+1}+4) - \lg 2x} = 1$.

7.033. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$.

7.034. $\lg(3^x - 2^{4-x}) = 2 + 0{,}25\lg 16 - 0{,}5x\lg 4$.

7.035. $\log_3(81^x + 3^{2x}) = 3\log_{27} 90$.

7.036. $3x - \log_6 8^x = \log_6(3^{3x} + x^2 - 9)$.

7.037. $\log_6(3x^2+1) - \log_6(3^{2-x^2}+9) = \log_6 2 - 1$.

7.038. $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right) = 0$.

7.039. $\lg\left(10^{\lg(x^2-21)}\right) - 2 = \lg x - \lg 25$.

7.040. $\lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$.

7.041. $\lg\sqrt{5^{x(13-x)}} + 11\lg 2 = 11$.

7.042. $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x+1) - \lg 6$.

7.043. $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right) = 0$.

7.044. $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4$.

7.045. $\log_5(3x-11) + \log_5(x-27) = 3 + \log_5 8$.

7.046. $\lg(5-x) + 2\lg\sqrt{3-x} = 1$.

7.047. Iš lygybės

$$3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\ldots 3^{3n-1} = 27^5$$

raskite natūralųjį skaičių n.

Išspręskite lygtis (**7.048—7.127**):

7.048. $0{,}5(\lg(x^2-55x+90) - \lg(x-36)) = \lg\sqrt{2}$.

7.049. $\lg(5-x) - \frac{1}{3}\lg(35-x^3) = 0$.

7.050. $\log_2\frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2-25) = 0$.

7.051. $\dfrac{\lg 8 - \lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7} - \lg 2} = -1$.

7.052. $\log_{0,5}^2 4x + \log_2\frac{x^2}{8} = 8$.

7.053. $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$.

7.054. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

7.055. $\log_3(3^x-8) = 2-x$.

7.056. $7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3\cdot 5^{\lg x-1} - 13\cdot 7^{\lg x-1}$.

7.057. $5^{x+6} - 3^{x+7} = 43\cdot 5^{x+4} - 19\cdot 3^{x+5}$.

7.058. $\dfrac{\log_5(\sqrt{2x-7}+1)}{\log_5(\sqrt{2x-7}+7)} = 0{,}5$.

7.059. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81$.

7.060. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

7.061. $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{\sqrt[4]{x+10}}} - 16^{2}\,{}^{\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}} = 0$.

$$7.062.\quad 8^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1.$$

7.063. $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$.

7.064. $0{,}6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

7.065. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{25}$.

7.066. $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$.

7.067. $2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 0{,}1^5$.

7.068. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$.

7.069. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

7.070. $4^{\log_9 x^2}+\log_{\sqrt{3}}3=0{,}2\left(4^{2+\log_9 x}-4^{\log_9 x}\right)$.

7.071. $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2$.

7.072. $10^{2/x}+25^{1/x}=4{,}25\cdot 50^{1/x}$.

7.073. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.

7.074. $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0$.

7.075. $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84$.

7.076. $9^{\sqrt{x-5}}-27=6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}$.

7.077. $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$.

7.078. $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$.

7.079. $2\log_x 27-3\log_{27}x=1$.

7.080. $\lg(\sqrt{6+x}+6)=\frac{2}{\log_{\sqrt{x}}10}$.

7.081. $\log_5 x+\log_x 25=\mathrm{ctg}^2\frac{25\pi}{6}$.

7.082. $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$.

7.083. $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}$.

7.084. $\frac{2^x+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$.

7.085. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$.

7.086. $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=0$.

7.087. $7^x(\sqrt{2})^{2x^2-6}-\left(\frac{7}{4}\right)^x=0$.

7.088. $3\cdot 4^{\log_x 2}-46\cdot 2^{\log_x 2-1}=8$.

7.089. $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}$.

7.090. $27^{\lg x}-7\cdot 9^{\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27=0$.

7.091. $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_1(9^x-6)=1$.

7.092. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

7.093. $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=\frac{2}{3}$.

7.094. $4^{\log_5 x^2}-4^{\log_5 x+1}+4^{\log_5 x-1}-1=0$.

7.095. $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_x a}=\frac{10}{3}$.

7.096. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$.

7.097. $\log_3(x-3)^2+\log_3|x-3|=3$.

7.098. $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{x+3}=2-0{,}5\lg 625$.

7.099. $\lg(3-x)-\frac{1}{3}\lg(27-x^3)=0$.

7.100. $2\lg x-\lg 4=-\lg(5-x^2)$.

7.101. $\lg 8-\lg\sqrt{x+6}=\lg 16-\lg(x-2)$.

7.102. $2\lg\sqrt{4-x}+\lg(6-x)=1$.

7.103. $\frac{\lg(2x-19)-\lg(3x-20)}{\lg x}=-1$.

7.104. $\frac{\lg x^2}{\lg(6x-5)}=1$.

7.105. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0$.

7.106. $\log_x\sqrt{2}-\log_x^2\sqrt{2}=\log_3 27-\log_x(2x)$.

7.107. $(\log_2 x-3)\log_2 x+2(\log_2 x+1)\log_2\sqrt[3]{2}=0$.

7.108. $0{,}1\log_2^4(x-4)-1{,}3\log_2^2(x-4)+3{,}6=0$.

7.109. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$.

7.110. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$.

7.111. $\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{2\sqrt{x}}\right)+\lg 10=2$.

7.112. $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}.$

7.113. $x^{\lg x}=1000x^2.$

7.114. $\lg(x(x+9))+\lg\dfrac{x+9}{x}=0.$

7.115. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\dfrac{1}{x}.$

7.116. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\dfrac{2}{\log_4 x}.$

7.117. $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400.$

7.118. $5^{\log_2(x^2-2,1)}\cdot 0,2^2\cdot 25^{-0,5\log_2 x}=1.$

7.119. $4^{2\log_8(2x-2)}\cdot 0,25^{\log_8(2x-3)}=\sqrt[3]{16}.$

7.120. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\dfrac{2}{9}\right)=\log_5 0,2.$

7.121. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$

7.122. $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}.$

7.123. $\log_6\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8.$

7.124. $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2=1+\log_5(2^{x-2}+1).$

7.125. $27x^{\log_{27}x}=x^{10/3}.$

7.126. $\log_x 9+\log_{x^2}729=10.$

7.127. $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1).$

Išspręskite lygčių sistemas (**7.128—7.149**):

7.128. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,\\ x^2-y=20.\end{cases}$

7.129. $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

7.130. $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2-\lg 5,\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 1,2+1.\end{cases}$

7.131. $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9,\\ x+y-20=0.\end{cases}$

7.132. $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3.\end{cases}$

7.133. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2},\\ xy=27.\end{cases}$

7.134. $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\ 3^x-2^{y/2}=25.\end{cases}$

7.135. $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2,\\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y.\end{cases}$

7.136. $\begin{cases}3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81,\\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3.\end{cases}$

7.137. $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}+2^{\frac{y-x}{2}}=2,5,\\ \lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)+\lg 6.\end{cases}$

7.138. $\begin{cases}x^{2y^2-1}=5,\\ x^{y^2+2}=125.\end{cases}$

7.139. $\begin{cases}8\cdot(\sqrt{2})^{x-y}=0,5^{y-3},\\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3.\end{cases}$

7.140. $\begin{cases}4^{x+y}=2^{y-x},\\ 4^{\log_{\sqrt{2}}x}=y^4-5.\end{cases}$

7.141. $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-2y^2-8=0.\end{cases}$

7.142. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y=4,\\ \log_4 x+\log_2 y=5.\end{cases}$

7.143. $\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6,\\ x^2+5y^2=6xy.\end{cases}$

7.144. $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=6,\\ 3^x\cdot 4^y=12.\end{cases}$

7.145. $\begin{cases}y=1+\log_4 x,\\ x^y=4^6.\end{cases}$

7.146. $\begin{cases}\log_{\sqrt{x}}xy=8,\\ \log_3\left(\log_{1/9}\dfrac{x}{y}\right)=0.\end{cases}$

7.147. $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1,\\ \log_{xy}(x+y)=0.\end{cases}$

7.148. $\begin{cases}(x+y)\,2^{y-2x}=6,25,\\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=5.\end{cases}$

7.149. $\begin{cases}8^{\log_9(x-4y)}=1,\\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8.\end{cases}$

B grupė

Suprastinkite reiškinius (**7.150—7.156**):

7.150. $\left(b^{\frac{\log_{100}a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100}b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}.$

7.151. $\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{1/2}+2\right)^{1/2}-\log_b a-\log_a b.$

7.152. $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\dfrac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}.$

7.153. $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2}2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}.$

7.154. $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4}b-\log_{a/b^6}b}:\log_b(a^3b^{-12}).$

7.155. $(6(\log_b a\cdot\log_a b+1)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b)^{1/2}-\log_a b$, kai $a>1$.

7.156. $\dfrac{\log_a b+\log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b \log_a b}-1}$.

7.157. Yra žinoma, kad $\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$, $\log_c x=\gamma$, $\log_d x=\delta$ ir $x\neq 1$. Raskite $\log_{abcd} x$.

7.158. Yra žinoma, kad $\beta=10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ ir $\gamma=10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Nustatykite α priklausomybę nuo γ.

7.159. Įrodykite, kad $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$.

7.160. Suprastinkite reiškinį

$$\log_{a+b} m+\log_{a-b} m-2\log_{a+b} m\cdot\log_{a-b} m,$$

kai žinoma, jog $m^2=a^2-b^2$.

7.161. Raskite $\log_{30} 8$, kai žinoma, kad $\lg 5=a$ ir $\lg 3=b$.

7.162. Įrodykite, kad $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b$.

7.163. Žinodami, kad $\lg 2=a$ ir $\log_2 7=b$, raskite $\lg 56$.

7.164. Žinodami, kad $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ ir $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, įrodykite, kad $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

Išspręskite lygtis (7.165—7.258):

7.165. $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

7.166. $\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1$.

7.167. $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5$.

7.168. $\log_{4x+1} 7+\log_{9x} 7=0$.

7.169. $(16^{\sin x})^{\cos x}+\dfrac{6}{4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-4=0$.

7.170. $\log_2(2-x)-\log_2(2-\sqrt{x})=\log_2\sqrt{2-x}-0,5$.

7.171. $5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0,25} x-1}=\dfrac{26}{5}$.

7.172. $\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2}=0$.

7.173. $2\lg x^2-(\lg(-x))^2=4$.

7.174. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

7.175. $\lg(x^3+8)-0,5\lg(x^2+4x+4)=\lg 7$.

7.176. $2^{\log_5 x^2}-2^{1+\log_5 x}+2^{\log_5 x-1}-1=0$.

7.177. $\dfrac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$.

7.178. $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{1/5}\sqrt{3}$.

7.179. $\log_{a^2} x^2+\log_a(x-1)=\log_a\log_{\sqrt{5}} 5$.

7.180. $x^{2\lg^2 x}=10x^3$.

7.181. $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}} 3+\log_3\sqrt{x}+0,5$.

7.182. $\log_{\sqrt{x}} a\cdot\log_{a^2}\dfrac{a^2}{2a-x}=1$.

7.183. $5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)}+1,5\log_{1/8} 4^x=0$.

7.184. $\log_a x+\log_{a^2} x+\log_{a^3} x=11$.

7.185. $6-(1+4\cdot 9^{4-2\log_{\sqrt{3}} 3})\log_7 x=\log_x 7$.

7.186. $\log_{12}(4^{3x}+3x-9)=3x-x\log_{12} 27$.

7.187. $x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$.

7.188. $\sqrt{\log_5^2 x+\log_x^2 5+2}=2,5$.

7.189. $\log_x m\cdot\log_{\sqrt{m}}\dfrac{m}{\sqrt{2m-x}}=1$.

7.190. $\log_2 3+2\log_4 x=x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}$.

7.191. $\log_{10} x+\log_{\sqrt{10}} x+\log_{\sqrt[3]{10}} x+\ldots+\log_{\sqrt[10]{10}} x=5,5$.

7.192. $\sqrt{3\log_2^2 x-1-9\log_x^2 2}=5$.

7.193. $\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt[4]{3}} x+\log_{\sqrt[6]{3}} x+\ldots+\log_{\sqrt[16]{3}} x=36$.

7.194. $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0$.

7.195. $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$.

7.196. $3^{\log_3 x+\log_3 x^2+\log_3 x^3+\ldots+\log_3 x^8}=27x^{30}$.

7.197. $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0,2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=125^{x-4}\cdot 0,04^{x-2}$.

7.198. $\left(3\cdot(3^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=\dfrac{3}{\sqrt[10]{3}}$.

7.199. $\log_2 \log_3 (x^2-16) - \log_{1/2} \log_{1/3} \frac{1}{x^2-16} = 2.$

7.200. $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3 \cdot \log_9 (12-x).$

7.201. $3\lg 2 + \lg (2^{\sqrt{x-1}-1} - 1) = \lg (0,4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4) + 1.$

7.202. $5\log_{x/9} x + \log_{9/x} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2.$

7.203. $20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{x/2} x^2 = 0.$

7.204. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

7.205. $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$

7.206. $|x-2|^{10x^2-3x-1} = 1.$

7.207. $\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{1/a} x = 0.$

7.208. $2^{x-1} + 2^{x-4} + 2^{x-2} = 6,5 + 3,25 + 1,625 + \ldots$ (dešinėje pusėje parašytas reiškinys — begalinė geometrinė progresija).

7.209. $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7.$

7.210. $5^{x-1} + 5 \cdot 0,2^{x-2} = 26.$

7.211. $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0.$

7.212. $\frac{\log_4 \sqrt{x}\ 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x} 2 \cdot \log_{1/2} 2x = 0.$

7.213. $|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2.$

7.214. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}.$

7.215. $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$

7.216. $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0.$

7.217. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^z + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^z = 14.$

7.218. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\log_9(x+1)} \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{\log_{1/27}(x-1)} = \frac{\log_5 27}{\log_5 243}.$

7.219. $5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24.$

7.220. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0.$

7.221. $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{\lg x^2+2} = 0.$

7.222. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$

7.223. $\log_5 (2^{1,5x-2,5} + 2^{1,5x-0,5} - 0,01 \cdot 5^{3x+1}) = 3x - 1.$

7.224. $\frac{8^x+2^x}{4^x-2} = 5.$

7.225. $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2.$

7.226. $2,5^{\log_3 x} + 0,4^{\log_3 x} = 2,9.$

7.227. $(\lg (x+20) - \lg x) \log_x 0,1 = -1.$

7.228. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$

7.229. $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8.$

7.230. $\log_{x+1}(x-0,5) = \log_{x-0,5}(x+1).$

7.231. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2.$

7.232. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

7.233. $(3\log_a x - 2)\log_x^2 a = \log_{\sqrt{a}} x - 3 \quad (a>0,\ a\neq 1).$

7.234. $\frac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3} = \frac{x^{3\lg x}}{10}.$

7.235. $x \log_{x+1} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{1/5}} (x+1) = \frac{x-4}{x}.$

7.236. $3\lg (x^2) - \lg^2 (-x) = 9.$

7.237. $4\log_4^2 (-x) + 2\log_4 (x^2) = -1.$

7.238. $\frac{2}{\sqrt{3}\log_2 \sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}} = 0.$

7.239. $\lg\sqrt{10} - \lg 100 = \sqrt[6]{\lg (390\,635 - 5^{\sqrt[3]{2x}})} - 2,5.$

7.240. $\lg^4 (x-1)^2 + \lg^2 (x-1)^3 = 25.$

7.241. $\frac{\log_2 (x^3+3x^2+2x-1)}{\log_2 (x^3+2x^2-3x+5)} = \log_{2x} x + \log_{2x} 2.$

7.242. $(16 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} - 0,048) \lg (x^3+2x+1) = 0.$

7.243. $5^x \cdot \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500.$

7.244. $3\log_2^2 \sin x + \log_2 (1-\cos 2x) = 2.$

7.245. $\log_{1+x} (2x^3+2x^2-3x+1) = 3.$

7.246. $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}.$

7.247. $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2.$

7.248. $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_3 (x^3) + \log_2 (x^2) - 6.$

7.249. $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis turi sprendinį?

7.250. $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27.$

7.251. $x^{2-\lg^2 x-\lg x^2}-\frac{1}{x}=0.$

7.252. $\frac{2}{15}\left(16^{\log_9 x+1}-16^{\log_3 \sqrt{x}}\right)+16^{\log_3 x}-\log_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}=0.$

7.253. $\log_a\sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}(16-x^2)^2=2.$

Su kuriomis a reikšmėmis lygtis turi sprendinį?

7.254. $\log_2\sqrt[3]{4}+\log_8(9^{x+1}-1)=1+\log_8(3^{x+1}+1).$

7.255. $25^{\log_4 x}-5^{\log_{16} x^2+1}=\log_{\sqrt{3}}9\sqrt{3}-25^{\log_{16} x}.$

7.256. $\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3-\log_2(3^x-13)=2.$

7.257. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_n(n+1)=10\ (n\in N).$

7.258. $2^{\frac{a+3}{a+2}}\cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}}=4^{\frac{1}{x}}$ (išspręskite lygtį su kiekviena realiąja x reikšme).

Išspręskite lygčių sistemas (**7.259—7.294**):

7.259. $\begin{cases} 2-\log_2 y=2\log_2(x+y), \\ \log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y^2)=1. \end{cases}$

7.260. $\begin{cases} 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0, \\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)-4\lg 2=0. \end{cases}$

7.261. $\begin{cases} (0{,}48^{x^2+2})^{2x-y}=1, \\ \lg(x+y)-1=\lg 6-\lg(x+2y). \end{cases}$

7.262. $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \frac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1. \end{cases}$

7.263. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32, \\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y). \end{cases}$

7.264. $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10}=1, \\ xy=15. \end{cases}$ **7.265.** $\begin{cases} \log_x y=2, \\ \log_{x+1}(y+23)=3. \end{cases}$

7.266. $\begin{cases} (x^2+y)2^{y-x^2}=1, \\ 9(x^2+y)=6^{x^2-y}. \end{cases}$ **7.267.** $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}. \end{cases}$

7.268. $\begin{cases} 9^{\sqrt[4]{xy^2}}-27\cdot 3^{\sqrt{y}}=0, \\ \frac{1}{4}\lg x+\frac{1}{2}\lg y=\lg(4-\sqrt[4]{x}). \end{cases}$

7.269. $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^y=1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2. \end{cases}$ **7.270.** $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 8, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3. \end{cases}$

7.271. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2. \end{cases}$

7.272. $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)-\log_5(y-x)=\log_5(y+x). \end{cases}$

7.273. $\log_9(x^3+y^3)=\log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y).$

7.274. $\begin{cases} (\log_a x+\log_a y-2)\log_{18} a=1, \\ 2x+y-20a=0. \end{cases}$

7.275. $\begin{cases} (x+y)3^{y-x}=\frac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y)=x-y. \end{cases}$

7.276. $\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5, \\ \frac{3(x+y)}{x-y}+\frac{5(x-y)}{x+y}=8. \end{cases}$

7.277. $\begin{cases} x^y=2, \\ (2x)^{y^2}=64\ (x>0). \end{cases}$ **7.278.** $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12, \\ 2^{-\log_2 x}+5^{\log_5\frac{1}{y}}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

7.279. $\begin{cases} x^{y^2-7y+10}=1, \\ x+y=8\ (x>0). \end{cases}$

7.280. $\begin{cases} 2(\log_{1/y}x-2\log_{x^2}y)+5=0, \\ xy^2=32. \end{cases}$

7.281. $\begin{cases} xy^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_3 y\cdot\log_y(y-2x)=1. \end{cases}$

7.282. $\begin{cases} \lg(x-3)-\lg(5-y)=0, \\ 4^{-1}\sqrt[y]{4^x}-8\sqrt[x]{8^y}=0. \end{cases}$

7.283. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

7.284. $\begin{cases} x+y=2, \\ 2(2\log_{y^2}x-\log_{1/x}y)=5. \end{cases}$

7.285. $\begin{cases} x^{x^2-y^2-16}=1, \\ x-y=2\ (x>0). \end{cases}$

7.286. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$

7.287. $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^{x-0{,}5y}=2^{3-y}, \\ y-x=3. \end{cases}$

7.288. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689. \end{cases}$

7.289. $\begin{cases} 10^{\lg 0{,}5(x^2+y^2)+1{,}5}=100\sqrt{10}, \\ \frac{\sqrt{x^2+10y}}{3}=\frac{6}{2\sqrt{x^2+10y-9}}. \end{cases}$

7.290. $\begin{cases} y^x=1{,}5+y^{-x}, \\ y^{2{,}5+x}=64 \quad (y>0). \end{cases}$

7.291. $\begin{cases} \lg(x+y)-\lg 5=\lg x+\lg y-\lg 6, \\ \dfrac{\lg x}{\lg(y+6)-(\lg y+\lg 6)}=-1. \end{cases}$

7.292. $\begin{cases} \log_{xy}\dfrac{y}{x}-\log_y^2 x=1, \\ \log_2(y-x)=1. \end{cases}$ 7.293. $\begin{cases} (x+y)^x=(x-y)^y, \\ \log_2 x-\log_2 y=1. \end{cases}$

7.294. $\begin{cases} x^{x-2y}=36, \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9 \end{cases}$

(raskite tik sveikaskaičius sprendinius).

C grupė

Suprastinkite reiškinius **(7.295—7.299)**:

7.295. $\dfrac{(\lg b\cdot 2^{\log_2 \lg b})^{1/2}\cdot \lg^{-1/2} b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b+1}{2\lg b}+1-10^{0{,}5\lg\lg b^{1/2}}}}.$

7.296. $2\log_a^{1/2} b\left((\log_a \sqrt[4]{ab}+\log_b \sqrt[4]{ab})^{1/2}-\left(\log_a \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}+\log_b \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}\right)^{1/2}\right)$, kai $a>1$ ir $b>1$.

7.297. $\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\cdot(\log_n p-\log_{np} p)\cdot\sqrt{\log_n p}.$

7.298. $\left(\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{1/2}-\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{1/2}\right)\sqrt{2}\log_a^{1/2} b$, kai $a>1$.

7.299. $\dfrac{1-\log_{1/a}\dfrac{1}{(a-b)^2}+\log_a^2(a-b)}{(1-\log_{\sqrt{a}}(a-b)+\log_a^2(a-b))^{1/2}}.$

7.300. Žinodami, kad $675=9\cdot 75$, o $135=3\cdot 45$, be lentelių pasakykite, kuris skaičius didesnis: $\log_{135} 675$ ar $\log_{45} 75$.

7.301. Lygtis $4^x+10^x=25^x$ turi vienintelę šaknį. Raskite ją ir išsiaiškinkite, ar ji teigiama, ar neigiama; ar didesnė, ar mažesnė už vienetą.

7.302. Įrodykite, kad $\log_3 12=\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$.

7.303. Reiškinį $\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+\log_p A\cdot\log_m A$ išreikškite sandauga.

7.304. Įrodykite, kad $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=\dfrac{1}{3}$.

7.305. Suprastinkite reiškinį $((\log_b^4 a+\log_a^4 b+2)^{1/2}-2)^{1/2}$, kai $1<a<b$.

7.306. Su kuriomis p reikšmėmis lygtis $\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-3)=0$ turi vienintelę šaknį?

7.307. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $2\lg(x+3)=\lg(ax)$ turi vienintelę šaknį?

7.308. Raskite $x\,(x\in\mathbf{Z})$, kai $(\sqrt[3]{0{,}5}+\sqrt[3]{4})^x=13{,}5$.

Išspręskite lygtis **(7.309—7.333)**:

7.309. $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$.

7.310. $\left(1+\log_x\dfrac{4-x}{10}\right)\cdot\lg x=\lg\lg 10^3-1$.

7.311. $3\log_x 4+2\log_{4x} 4+3\log_{16x} 4=0$.

7.312. $4^{\log_{16} x}-3^{\log_{16} x-0{,}5}=3^{\log_{16} x+0{,}5}-2^{2\log_{16} x-1}$.

7.313. $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$.

7.314. $\dfrac{2-4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

7.315. $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot 0{,}25^{-\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}}-1=0$.

7.316. Su kuriomis p reikšmėmis lygtis $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg p$ turi sprendinį?

7.317. $\log_4 x+\log_x 2-\log_4\sqrt{x}=1$.

7.318. $\log_k x+\log_{\sqrt{k}} x+\ldots+\log_{\sqrt[k]{k}} x=\dfrac{k+1}{2}$ $(k\in\mathbf{N})$.

7.319. $2-\log_{b^2}(1+x)=3\log_b\sqrt{x-1}-\log_{b^4}(x^2-1)^2$.

7.320. $m^{1+\log_3 x}+m^{1-\log_3 x}=m^2+1$ $(m>0,\ m\neq 1)$.

7.321. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

7.322. $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$ $(a>0)$.

7.323. $p^{\log_2(x+14)+\log_2(x+2)}=p^6$ $(p>0)$.

7.324. $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$.

7.325. $(2^x-2\cdot 2^{-x})^{\log_9(2x+3)-\log_3 x}=1$.

7.326. $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$.

7.327. $\log_{\sqrt{x}}(x+12)=8\log_{x+12} x$ (raskite tik sveikąją šaknį).

7.328. $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5{,}(3)\cdot 3^{0{,}5\lg x}\cdot 5^{0{,}5(\lg x-2)}$.

7.329. $|\log_2(3x-1)-\log_2 3|=|\log_2(5-2x)-1|$.

7.330. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$.

7.331. $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3\dfrac{x}{3}}-2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3$.

7.332. $\log_{x+3}(3-\sqrt{1-2x+x^2})=\dfrac{1}{2}$.

7.333. $\sqrt{\log_2(2x^2)\cdot\log_4(16x)}=\log_4 x^3$.

Išspręskite lygčių sistemas (7.334—7.340):

7.334. $\begin{cases} \log_2(u+v)-\log_3(u-v)=1, \\ u^2-v^2=2. \end{cases}$

7.335. $\begin{cases} x^p=y^q, \\ \log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \end{cases}$ $(p\neq q$ ir $pq\neq 0)$.

7.336. $\begin{cases} 3^{\lg x}=4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

7.337. $\begin{cases} xy=a^2, \\ \lg^2 x+\lg^2 y=2{,}5\lg^2(a^2), \end{cases}$ kai $a<0$.

7.338. $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4, \\ \log_4 x-\log_4 y=1. \end{cases}$

7.339. $\begin{cases} (2^{x+y})^{x^2-xy-8}=1, \\ (0{,}37^{x-y})^{x^2+xy+2x-16}=1. \end{cases}$

7.340. $\begin{cases} x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27, \\ \log_3 y-\log_3 x=1. \end{cases}$

8 SKYRIUS
TRIGONOMETRINĖS LYGTYS

KAIP SPRĘSTI TRIGONOMETRINES LYGTIS

1°. *Paprasčiausiomis trigonometrinėmis lygtimis* vadinamos lygtys $\sin x=a$ (čia $|a|\leqslant 1$, priešingu atveju lygtis sprendinių neturi), $\cos x=a$ (čia $|a|\leqslant 1$), $\operatorname{tg} x=a$ (čia $-\infty<a<\infty$), $\operatorname{ctg} x=a$ (čia $-\infty<a<\infty$). Šių lygčių sprendinių formulės yra tokios (čia ir toliau $n\in \boldsymbol{Z}$ reiškia, kad n — sveikasis skaičius):

$$\sin x=a;\ x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.1)$$

$$\cos x=a;\ x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.2)$$

$$\operatorname{tg} x=a;\ x=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.3)$$

$$\operatorname{ctg} x=a;\ x=\operatorname{arcctg} a+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \qquad (8.4)$$

Kai $a=0$, $a=1$, $a=-1$, gaunamos tokios formulės:

$$\sin x=0;\ x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.5)$$

$$\sin x=1;\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.6)$$

$$\sin x=-1;\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.7)$$

$$\cos x=0;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.8)$$

$$\cos x=1;\ x=2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.9)$$

$$\cos x=-1;\ x=\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.10)$$

$$\operatorname{tg} x=0;\ x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}; \qquad (8.11)$$

$$\operatorname{ctg} x=0;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \qquad (8.12)$$

Lygtys $\sin(\omega x+\varphi)=a$, $\cos(\omega x+\varphi)=a$, $\operatorname{tg}(\omega x+\varphi)=b$, $\operatorname{ctg}(\omega x+\varphi)=b$ ($|a|<1$, $\omega=0$, φ, b — bet kurie realieji skaičiai) taip pat priskiriamos prie paprasčiausių. Jas reikia spręsti iš karto pagal (8.1)—(8.4) formules, vietoje x rašant $\omega x+\varphi$.

1 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

△ Pagal (8.1) formulę $\frac{\pi}{6}-2x=(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$. Kadangi $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, tai $\frac{\pi}{6}-2x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$; iš čia $x=-(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, arba $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}(6n+1)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Jeigu lygtis yra ne paprasčiausioji, tai, atlikus tapačiuosius pertvarkymus, reikia pakeisti ją viena arba keletu paprasčiausių lygčių, kurių visuma ekvivalenti duotajai lygčiai.

2°. Sprendžiant trigonometrines lygtis, patogu perkelti visus narius į vieną pusę ir skaidyti dauginamaisiais, taip pat galima pakeisti vieną kintamąjį kitu (pritaikyti keitimo metodą).

9. Užsak. Nr. 1941.

2 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin x = \sin 2x \cdot \cos 3x$.

△ Reiškiniui $\sin 2x$ pritaikę (3.13) formulę, gauname:

$$\sin x = 2 \sin x \cos x \cos 3x, \ \sin x(1-2\cos x \cos 3x) = 0.$$

Kadangi lygties kairiojoje pusėje esantys abu dauginamieji turi prasmę su visomis x reikšmėmis, tai ši lygtis ekvivalenti dviejų lygčių visumai: $\sin x = 0$ ir $1-2\cos x \cos 3x = 0$.

Pagal (8.5) formulę pirmajai lygčiai tinka reikšmės $x = \pi n$, $n \in Z$.

Norėdami išspręsti antrąją lygtį, pagal (3.26) formulę kosinusų sandaugą išreiškiame suma: $1-(\cos 4x + \cos 2x) = 0$. Kadangi $1-\cos 4x = 2\sin^2 2x$ (žr. (3.16) formulę), tai lygtis įgyja tokią išraišką: $2\sin^2 2x - \cos 2x = 0$, arba $2(1-\cos^2 2x) - \cos 2x = 0$; iš čia gauname: $2\cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$. Tai kvadratinė lygtis $\cos 2x$ atžvilgiu. Tardami, kad $\cos 2x = z$, gauname: $2z^2 + z - 2 = 0$. Išsprendę šią lygtį, randame: $z_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $z_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

Kadangi $|z_2| = \left|\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right| > 1$, tai lygtis $\cos 2x = z_2$ neturi sprendinių.

Lieka išspręsti lygtį $\cos 2x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. Pagal (8.2) formulę $2x = \pm \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Taigi gauname atsakymą: $x = \pi n$, $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi k$, n, $k \in Z$. ▲

Sprendžiant lygtį skaidymo dauginamaisiais metodu, kartais gaunama lygčių visuma, neekvivalenti duotajai lygčiai, nes gali atsirasti pašalinių šaknų. Norint išvengti atsakymo klaidų, reikia iš gautosios lygties sprendinių atmesti tuos, su kuriais duotoji lygtis neturi prasmės.

3 pavyzdys. Išspręskite lygtį $(1-\sin x)(\mathrm{tg}^2 x - 3) = 0$.

△ Raskime x reikšmes, tenkinančias kiekvieną iš lygčių $1-\sin x = 0$ ir $\mathrm{tg}^2 x - 3 = 0$; kai $\sin x = 1$, tai pagal (8.6) formulę

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z; \qquad (*)$$

kai $\mathrm{tg}^2 x = 3$, t. y. $\mathrm{tg}\, x = \pm\sqrt{3}$, tai pagal (8.3) formulę

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z. \qquad (**)$$

Tačiau būtų klaidinga atsakymu laikyti sprendinių (*) ir (**) sąjungą. Pradinė lygtis su reikšmėmis $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$ neturi prasmės, todėl pirmasis iš numatomų sprendinių netinkamas. Atsakymas yra tik antrasis sprendinys $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ $(n \in Z)$. ▲

4 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{8}$.

△ Greičiausias sprendimo būdas — padauginti lygties dešiniąją ir kairiąją pusę iš $8 \sin x$, nors šiuo atveju gali atsirasti pašalinių šaknų. Jų išvengsime, iš gautosios lygties sprendinių atmetę tas x reikšmes, su kuriomis $\sin x = 0$, t. y. $x = \pi n$ $(n \in Z)$, nes jos netenkina pradinės lygties.

Padauginta iš $8 \sin x$, pradinė lygtis yra tokia:

$$8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \sin x.$$

Tris kartus pritaikę dvigubo argumento sinuso formulę (3.13), iš pradžių gauname $4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x = \sin x$, po to $2 \sin 4x \cos 4x = \sin x$, dar vėliau

$\sin 8x = \sin x$, arba $\sin 8x - \sin x = 0$. Sinusų skirtumą pagal (3.20) formulę išreiškiame sandauga: $\sin \frac{7x}{2} \cos \frac{9x}{2} = 0$.

Kai $\sin \frac{7x}{2} = 0$, tai $\frac{7x}{2} = \pi k$ $(k \in Z)$, iš čia $x = \frac{2\pi k}{7}$ $(k \in Z)$, be to, reikia atmesti reikšmes $x = 2\pi n$ $(n \in Z)$, kurios gaunamos, kai $k = 7n$. Jos yra pašalinės pradinės lygties šaknys. Kai $\cos \frac{9x}{2} = 0$, tai $\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in Z)$; iš čia $x = \frac{\pi(2m+1)}{9}$ $(m \in Z)$, be to, reikia atmesti reikšmes $x = \pi(2n+1)$ $(n \in Z)$, kurios gaunamos, kai $m = 9n+4$ $(n \in Z)$. Jos yra pašalinės duotosios lygties šaknys.

Taigi gauname atsakymą: $x = \frac{2\pi k}{7}$; čia sveikasis $k \neq 7n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi(2m+1)}{9}$; čia sveikasis $m \neq 9n+4$, $n \in Z$. ▲

3°. *Homogeninėmis (vienalytėmis) lygtimis* vadinamos lygtys

$$a \sin kx + b \cos kx = 0; \qquad (8.13)$$

$$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = 0; \qquad (8.14)$$

$$a \sin^3 kx + b \sin^2 kx \cos kx + c \sin kx \cos^2 kx + d \cos^3 kx = 0. \qquad (8.15)$$

Kai $d \neq 0$, lygtis

$$a \sin^2 kx + b \sin kx \cos kx + c \cos^2 kx = d$$

yra ne homogeninė. Ją galima paversti homogenine (8.14) išraiškos lygtimi pakeičiant skaičių d tapačiai lygiu jam reiškiniu $d(\sin^2 kx + \cos^2 kx)$.

Norėdami išspręsti (8.13)—(8.15) lygtis, kai $a \neq 0$, išnagrinėkime tokias x reikšmes, su kuriomis $\cos kx = 0$. Tada iš kiekvienos lygties išplaukia, kad su tomis pačiomis x reikšmėmis turi būti ir $\sin kx = 0$, tačiau tai neįmanoma. Vadinasi, šių lygčių sprendiniai gali būti tik tos x reikšmės, su kuriomis $\cos kx \neq 0$. Jeigu (kai $a \neq 0$) (8.13) lygties abi puses padalysime iš $\cos kx$, (8.14) lygties — iš $\cos^2 kx$, (8.15) lygties — iš $\cos^3 kx$, šaknų neprarasime.

Gauname algebrinę lygtį $\mathrm{tg}\, kx$ atžvilgiu, kurią sprendžiant reikia pakeisti kintamąjį: vietoj $\mathrm{tg}\, kx$ įrašyti z.

5 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$3 \sin^2 x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos x = 0.$$

△ Pritaikę redukcijos formules, gauname:

$$3 \sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Tai homogeninė lygtis $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu, be to, $a \neq 0$, t. y. x reikšmės, su kuriomis $\cos x = 0$, nėra duotosios lygties sprendiniai. Lygties narius padaliję iš $\cos^3 x$, gauname:

$$3\,\mathrm{tg}^3 x + 3\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1 = 0; \ (3\,\mathrm{tg}^2 x - 1)(\mathrm{tg}\, x + 1) = 0;$$

$$3\,\mathrm{tg}^2 x - 1 = 0, \ \mathrm{tg}\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \ x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), \ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, x + 1 = 0, \ \mathrm{tg}\, x = -1, \ x = \frac{\pi}{4}(4k-1), \ k \in Z.$$

Taigi atsakymas toks: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1)$ ir $x = \frac{\pi}{4}(4k-1)$, n, $k \in Z$. ▲

Sprendžiant (8.13)—(8.15) lygtis, kai $a=0$, dalyti iš $\cos kx$ negalima, nes prarandamos šaknys — tos x reikšmės, su kuriomis $\cos kx=0$.

Kai $a=0$, (8.13) lygtis virsta paprasčiausia, o sprendžiant (8.14) ir (8.15) lygtis, reikia taikyti skaidymo dauginamaisiais metodą.

4°. Kitus trigonometrinių lygčių sprendimo būdus išnagrinėsime spręsdami pavyzdžius.

6 pavyzdys. Išspręskite lygtį $3\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos x=4$.

△ Sprendžiant tokias lygtis, patogu remtis laipsnio žeminimo formulėmis (3.16) ir (3.17). Taikykime antrąją: $\frac{3\left(1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2}-2\cos x=4$. Pertvarkę gausime lygtį

$$3\sin x-4\cos x=5. \quad (*)$$

Remiantis (3.28) ir (3.29) formulėmis, t. y. lygybėmis $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, teisingomis su visais $x\neq\pi+2\pi n$, $n\in Z$, (*) lygtį nesunku pakeisti algebrine lygtimi $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ atžvilgiu. Reiškinius $\sin x$ ir $\cos x$ pakeitus reiškiniais, kuriuose yra $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, galima prarasti šaknis $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$. Ar šios reikšmės tenkina pradinę lygtį, išsiaiškinama tikrinant.

Į lygtį (*) įvedę vadinamąjį universalųjį keitinį $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, gauname lygtį $z^2-6z+9=0$. Ji turi sprendinį $z=3$. Sugrįžę prie kintamojo x, gauname $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3$; iš čia $x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n$, $n\in Z$. Lieka patikrinti, ar (*) tenkina skaičiai $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$. Turime $3\sin(\pi+2\pi n)-4\cos(\pi+2\pi n)\neq5$; vadinasi, skaičiai $x=\pi+2\pi n$ nėra (*) lygties sprendiniai.

Taigi gauname atsakymą: $x=2\operatorname{arctg}3+2\pi n$, $n\in Z$. ▲

7 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin^6 x+\cos^6 x=a$ (a — tam tikras skaičius).

△ Kairiąją lygties pusę pertvarkome pagal (2.13) formulę kaip kubų sumą:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}(\sin^4 x+\cos^4 x-$$
$$-\sin^2 x\cos^2 x)=(\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x)-3\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}_{1}-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Pagal (3.13) formulę $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$. Tada gauname pradinei lygčiai ekvivalenčią lygtį $1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=a$; iš čia $\sin^2 2x=\frac{4(1-a)}{3}$. Kai $0\leqslant\frac{4(1-a)}{3}\leqslant1$, t. y. $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant1$, tai lygtis $\sin 2x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}$ turi sprendinį

$$x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3(1-a)}\right)+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z. \ ▲$$

Pavyzdžiui, kai $a=1$, lygties $\sin^6 x+\cos^6 x=1$ sprendiniai yra skaičiai $x=\frac{\pi n}{2}$ $(n\in Z)$. Tačiau šią lygtį, kaip ir daugelį kitų, galima išspręsti greičiau remiantis nelygybėmis $|\sin x|\leqslant1$, $|\cos x|\leqslant1$ (žr. 8 ir 9 pavyzdžius).

8 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin^{2k+2}x+\cos^{2k+2}x=1$ $(k\in N)$.

△ Nesunku įspėti, kad skaičiai $x=\frac{\pi n}{2}$ $(n\in Z)$ yra lygties sprendiniai. Tačiau dar reikia įrodyti, jog kitų sprendinių nėra. Tarkime, kad egzistuoja sprendiniai $x=\alpha\neq\frac{\pi n}{2}$ $(n\in Z)$. Kadangi su tokiomis x reikšmėmis $|\sin\alpha|<1$ ir $|\cos\alpha|<1$, tai $\sin^2\alpha<1$ ir $\cos^2\alpha<1$. Todėl su bet kuria sveikąja teigiama k reikšme teisingos nelygybės $\sin^{2k+2}\alpha<\sin^2\alpha$ ir $\cos^{2k+2}\alpha<\cos^2\alpha$. Sudėję jas, gauname: $\sin^{2k+2}\alpha+\cos^{2k+2}\alpha<\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$. Bet $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; vadinasi, $\sin^{2k+2}x+\cos^{2k+2}x<1$ su visomis reikšmėmis $x=\alpha\neq\frac{\pi n}{2}$ $(n\in Z)$.

Vadinasi, duotoji lygtis (taigi ir lygtis $\sin^6 x+\cos^6 x=1$) neturi kitų sprendinių išskyrus $x=\frac{\pi n}{2}$ $(n\in Z)$. ▲

9 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin(\pi\cos 2x)=1$.

△ Pagal (8.6) formulę randame $\pi\cos 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, t. y. $\cos 2x=\frac{1}{2}+2k$, $k\in Z$. Bet $|\cos 2x|\leqslant1$, todėl $k=0$. Turime $\cos 2x=\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n\in Z)$; iš čia gauname atsakymą: $x=\frac{\pi}{6}(6n\pm1)$, $n\in Z$. ▲

A grupė

Išspręskite lygtis (8.001—8.175):

8.001. $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$.

8.002. $7+4\sin x\cos x+1{,}5(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=0$.

8.003. $\frac{4\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}+\sin^2 2x+1=0$.

8.004. $\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}+1=2\operatorname{tg}^2 x$.

8.005. $\sin z\sin(60°-z)\sin(60°+z)=\frac{1}{8}$.

8.006. $\cos^{-2}2t-\sin^{-2}2t=\frac{8}{3}$.

8.007. $\operatorname{tg}3t-\operatorname{tg}t-4\sin t=0$.

8.008. $\cos^{-1}3t-6\cos 3t=4\sin 3t$.

8.009. $\operatorname{ctg} t-\sin t=2\sin^2\frac{t}{2}$.

8.010. $8\cos z\cos(60^\circ-z)\cos(60^\circ+z)+1=0$.

8.011. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0$.

8.012. $\sin x\cos 2x+\cos x\cos 4x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$.

8.013. $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$.

8.014. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$.

8.015. $\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2$.

8.016. $\operatorname{ctg}^4 2z+\sin^{-4} 2z=25$.

8.017. $\operatorname{tg} 2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$.

8.018. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x$.

8.019. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x-\sin 2x\sin 3x=0$.

8.020. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

8.021. $2\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-2=0$.

8.022. $2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$.

8.023. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)$.

8.024. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=0$.

8.025. $\sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=1$.

8.026. $\cos^{-1} x+\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$.

8.027. $\sin x\cdot\sin 3x+\sin 4x\cdot\sin 8x=0$.

8.028. $2\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-3=0$.

8.029. $\cos x\cdot\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)+$
$+\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}-5x\right)$.

8.030. $2+\operatorname{tg} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$.

8.031. $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos 3x$.

8.032. $0{,}5(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0$.

8.033. $2(\cos 4x-\sin x\cos 3x)=\sin 4x+\sin 2x$.

8.034. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x$.

8.035. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.

8.036. $\sin 2x\sin 6x-\cos 2x\cos 6x=\sqrt{2}\sin 3x\cos 8x$.

8.037. $\sin 3x\cos 3x=\sin 2x$.

8.038. $\cos 2x-5\sin x-3=0$.

8.039. $3\sin 2x+2\cos 2x=3$.

8.040. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}=0$.

8.041. $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$.

8.042. $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)=\cos t$.

8.043. $\sin 3z-\cos 3z=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

8.044. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$.

8.045. $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.

8.046. $\sin\frac{z}{2}\cos\frac{3z}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2z=\sin\frac{3z}{2}\cos\frac{z}{2}$.

8.047. $\sin^3 z\cos z-\sin z\cos^3 z=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

8.048. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)$.

8.049. $\cos 3x=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

8.050. $5(1+\cos x)=2+\sin^4 x-\cos^4 x$.

8.051. $1+\sin 2x=(\cos 3x+\sin 3x)^2$.

8.052. $\sin 3x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

8.053. $\cos 4x+2\sin^2 x=0$.

8.054. $\sin x+\sin 7x-\cos 5x+\cos(3x-2\pi)=0$.

8.055. $\cos^4 2x+6\cos^2 2x=\frac{25}{16}$.

8.056. $1+\cos t+\cos 2t+\cos 3t=0$.

8.057. $\cos 2x=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$.

8.058. $1+\cos 7x=\left(\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)^2$.

8.059. $2\operatorname{tg}^4 3x-3\operatorname{tg}^2 3x+1=0$.

8.060. $\sin 2x-\sin 3x+\sin 8x=\cos\left(7x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

8.061. $4\operatorname{tg}^2 3x-\cos^{-2} 3x=2$.

8.062. $\cos^3 x+\cos^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}=0$.

8.063. $\sin 9x=2\sin 3x$.

8.064. $(\sin^{-1} z+\cos^{-1} z)(\sin z+\cos z)+2=0$.

8.065. $\sin 2z+\cos 2z=\sqrt{2}\sin 3z$.

8.066. $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$.

8.067. $\sin 3x+\sin 5x=2(\cos^2 2x-\sin^2 3x)$.

8.068. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\operatorname{ctg}^2 x+\sin^{-2} x(1+\cos 2x)=0$.

8.069. $2\sin^3 x-\cos 2x-\sin x=0$.

8.070. $3\sin 5z-2\cos 5z=3$.

8.071. $4\sin 3z+\frac{1}{3}\cos 3z=3$.

8.072. $(\cos 6x-1)\operatorname{ctg} 3x=\sin 3x$.

8.073. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=3$.

8.074. $1-\cos(\pi+x)-\sin\frac{3\pi+x}{2}=0$.

8.075. $9^{\cos x}=9^{\sin x}\cdot 3^{\frac{2}{\cos x}}$.

8.076. $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$.

8.077. $2\sin z-\cos z=\frac{2}{5}$.

8.078. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$.

8.079. $(1+\sin x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\cos^{-1} x-\cos x$.

8.080. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x$.

8.081. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$.

8.082. $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x$.

8.083. $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x$.

8.084. $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x)$.

8.085. $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)\cos x+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\times$
$\times\cos(\pi+x)=1$.

8.086. $\cos 6x=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)$.

8.087. $2\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-3\sin(\pi-x)\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\times$
$\times\cos x=0$.

8.088. $(\sin 4t+\cos 4t)^2=16\sin 2t\cos^3 2t-8\sin 2t\cos 2t$.

8.089. $\cos(2t-18°)\operatorname{tg} 50°+\sin(2t-18°)=\frac{1}{2\cos 130°}$.

8.090. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{3t}{2}+\cos^{-1}\frac{t}{2}\sin^{-1}\frac{3t}{2}=1$.

8.091. $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} t}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} t}=\sin 2t$.

8.092. $\cos(20°+x)+\cos(100°-x)=\frac{1}{2}$.

8.093. $\cos t\sin\left(\frac{\pi}{2}+6t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 6t=\cos 6t+\cos 4t$.

8.094. $\dfrac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=2$.

8.095. $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0$.

8.096. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x$.

8.097. $\sin z-\sin^2 z=\cos^2 z-\cos z$.

8.098. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z$.

8.099. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}+\frac{1}{\operatorname{tg} x-1}\right)=4$.

8.100. $1-\cos 6x=\operatorname{tg} 3x$.

8.101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0$.

8.102. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5$.

8.103. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5$.

8.104. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.

8.105. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x$.

8.106. $\cos(3x-30°)-\sin(3x-30°)\operatorname{tg} 30°=\frac{1}{2\cos 210°}$.

8.107. $4\sin x+\cos x=4$.

8.108. $2\sin^2 z+\operatorname{tg}^2 z=2$.

8.109. $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1$.

8.110. $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x$.

8.111. $\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x=0$.

8.112. $\operatorname{ctg}^3 x+\sin^{-2} x-3\operatorname{ctg} x-4=0$.

8.113. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}$.

8.114. $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2\frac{3}{2}x$.

8.115. $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z$.

8.116. $\sin(15°+x)+\cos(45°+x)+\frac{1}{2}=0$.

8.117. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x$.

8.118. $3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t$.

8.119. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-3\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x$.

8.120. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3}{2}x-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0$.

8.121. $\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

8.122. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0$.

8.123. $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0$.

8.124. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\cos^{-1} 4x$.

8.125. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x)$.

8.126. $\frac{1}{1+\cos^2 z}+\frac{1}{1+\sin^2 z}=\frac{16}{11}$.

8.127. $\frac{\cos x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x}=2\sqrt{3}$.

8.128. $\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$.

8.129. $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0$.

8.130. $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x$.

8.131. $\sqrt{3}-\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

8.132. $\sin^2 x\cos^{-4} x-4\operatorname{tg}^2 x+3\cos^{-2} x-12=0$.

8.133. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$.

8.134. $(\sin 2t-\sin^{-1} 2t)^2+(\cos^{-1} 2t-\cos 2t)^2=1$.

8.135. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25$.

8.136. $\sin 2z-4\cos 2z=4$.

8.137. $3+2\sin 2x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

8.138. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+t\right)=\sin t+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-t\right)$.

8.139. $\sin^3\frac{x}{3}-\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}+3\cos^2\frac{x}{3}=0$.

8.140. $\operatorname{tg}(x-15°)\operatorname{ctg}(x+15°)=\frac{1}{3}$.

8.141. $\cos(x+1)\sin 2(x+1)=\cos 3(x+1)\sin 4(x+1)$.

8.142. $\cos(4x+2)+3\sin(2x+1)=2$.

8.143. $\cos 4x+2\cos^2 x=1$.

8.144. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

8.145. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

8.146. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 50°+\operatorname{tg} 70°=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 50°\operatorname{tg} 70°$.

8.147. $\cos x-\sin x=4\cos x\sin^2 x$.

8.148. $\operatorname{tg} 2x\sin 2x-3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x\cos 2x=0$.

8.149. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$.

8.150. $\sqrt{2}(1+\cos x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

8.151. $\sin\frac{3x-7\pi}{2}+\cos\frac{\pi-3x}{2}=\cos^{-1}\frac{3}{2}x$.

8.152. $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$.

8.153. $\sin 3x+\sin x=4\sin^3 x$.

8.154. $\sin 6x+\sin 2x=\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

8.155. $\dfrac{2\cos(\pi+x)-5\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\cos(\pi-x)}=\frac{3}{2}$.

8.156. $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2=2-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)$.

8.157. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x+1=4\cos^2 x+\frac{\sin 3x}{\sin x}-2\cos 2x$.

8.158. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} x=1$.

8.159. $2\cos^2\frac{x}{2}-1=\sin 3x$.

8.160. $\sin^2 2x+\sin^2 x=\frac{9}{16}$.

8.161. $3\cos^2 x=\sin^2 x+\sin 2x$.

8.162. $2(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\operatorname{tg} x$.

8.163. $a\cos^2\frac{x}{2}-(a+2b)\sin^2\frac{x}{2}=a\cos x-b\sin x$.

8.164. $\sin 5x=\cos 4x$.

8.165. $2\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x=3$.

8.166. $25\sin^2 x+100\cos x=89$.

8.167. $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=0{,}25$.

8.168. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 2x}=1+\cos 4x$.

8.169. $\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x$.

8.170. $\cos 2x+3\sin x=2$.

8.171. $\cos 2x=1-\sin 2x$.

8.172. $\operatorname{tg}(70^\circ+x)+\operatorname{tg}(20^\circ-x)=2$.

8.173. $\sin x+\sin\frac{1}{\pi}=\sin\left(x+\frac{1}{\pi}\right)$.

8.174. $\operatorname{tg}^2 3x-2\sin^2 3x=0$.

8.175. $6\operatorname{ctg}^2 x-2\cos^2 x=3$.

B grupė

Išspręskite lygtis (8.176—8.385):

8.176. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=2\sqrt{\sin x\cos x}$.

8.177. $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+\sin x=4$.

8.178. $\operatorname{tg}(120^\circ+3x)-\operatorname{tg}(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x)$.

8.179. $\sin^2 x+2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin x\sin^2\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x=0$.

8.180. $\frac{\cos^2 z(1+\operatorname{ctg} z)-3}{\sin z-\cos z}=3\cos z$.

8.181. $\frac{1}{2\operatorname{ctg}^2 t+1}+\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 t+1}=\frac{15\cos 4t}{8+\sin^2 2t}$.

8.182. $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0$.

8.183. $\frac{6\cos^3 2t+2\sin^3 2t}{3\cos 2t-\sin 2t}=\cos 4t$.

8.184. $\cos z\cos 2z\cos 4z\cos 8z=\frac{1}{16}$.

8.185. $\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x}=\frac{1}{3}\cos x$.

8.186. $\operatorname{tg}^2 t-\frac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}=2\operatorname{ctg} 2t$.

8.187. $\sin^2 x\operatorname{tg} x+\cos^2 x\operatorname{ctg} x+2\sin x\cos x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8.188. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg}(x+25^\circ)=\operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+25^\circ)\operatorname{ctg} x$.

8.189. $\dfrac{40\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)}{16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}}=\sin t$.

8.190. $\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right)$.

8.191. $\sin^{-1} t-\sin^{-1} 2t=\sin^{-1} 4t$.

8.192. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0$.

8.193. $\operatorname{ctg}^2 2x+\frac{3(\cos 3x-\cos x)}{\sin 3x-\sin x}+2=0$.

8.194. $\operatorname{tg}^4 3t=\sin^2 6t$.

8.195. $\frac{1-\sin^6 z-\cos^6 z}{1-\sin^4 z-\cos^4 z}=2\cos^2 3z$.

8.196. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{\cos x-\sin x}{0{,}5\sin 2x}$.

8.197. $\frac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z}+\frac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}+2=0$.

8.198. $\cos^{-2} 2x \operatorname{tg} 2x+\sin^{-2} 2x \operatorname{ctg} 2x=\frac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+$
$+10\sin^{-1} 4x+4\sqrt{3}.$

8.199. $\frac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right).$

8.200. $\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$

8.201. $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3.$

8.202. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0.$

8.203. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x.$

8.204. $\operatorname{tg}^3 t+6\sin^{-1} 2t=8\sin^{-3} 2t-3\operatorname{ctg} t.$

8.205. $2\sin x\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x-5\cos^2 x\times$
$\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$

8.206. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=\frac{82}{9}(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x+1)\cos 2x.$

8.207. $2\cos^6 2t-\cos^4 2t+1{,}5\sin^2 4t-3\sin^2 2t=0.$

8.208. $\sin 6x+2=2\cos 4x.$

8.209. $\sin^2 t\operatorname{tg} t+\cos^2 t\operatorname{ctg} t-2\sin t\cos t=1+\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t.$

8.210. $\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{ctg}^3 2x+6\sin^{-1} 2x=8\sin^{-3} 4x.$

8.211. $\cos x\cos 2x\sin 3x=0{,}25\sin 2x.$

8.212. $\cos 9x-2\cos 6x=2.$

8.213. $2\sin^5 2t-\sin^3 2t-6\sin^2 2t+3=0.$

8.214. $\sin^6 2t+\cos^6 2t=\frac{3}{2}(\sin^4 2t+\cos^4 2t)+\frac{1}{2}(\sin t+\cos t).$

8.215. $(\cos^{-2} 2x+\operatorname{tg}^2 2x)(\sin^{-2} 2x+\operatorname{ctg}^2 2x)=4\sin^{-2} 4x+5.$

8.216. $\sin 3z+\sin^3 z=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2z.$

8.217. $(\cos 2x+(\cos x+\sin x)^2)(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0.$

8.218. $2\sin 2x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\cos 3x\cos^{-1} 5x\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0.$

8.219. $3\operatorname{ctg} t-3\operatorname{tg} t+4\sin 2t=0.$

8.220. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x+\cos^{-2} 2x}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x+\sin^{-2} 2x}=\frac{2}{3}.$

8.221. $\operatorname{tg} 3t+\operatorname{tg} t=2\sin 4t.$

8.222. $\sin(3\pi-x)+\operatorname{tg}(\pi+x)=\frac{\cos^{-1} x-\cos x}{2\sin x}.$

8.223. $\frac{1}{2}\sin 4x\sin x+\sin 2x\sin x=2\cos^2 x.$

8.224. $\frac{2(\cos^4 t+\sin^4 t)}{\cos^4 t-\sin^4 t}=\cos^{-1} 2t+\cos 4t+1.$

8.225. $\operatorname{tg} t=\frac{\sin^2 t+\sin 2t-1}{\cos^2 t-\sin 2t+1}.$

8.226. $\frac{\sin 2t+2\cos^2 t-1}{\cos t-\cos 3t+\sin 3t-\sin t}=\cos t.$

8.227. $\sin t^2-\sin t=0.$

8.228. $\sin^3 z\sin 3z+\cos^3 z\cos 3z=\cos^3 4z.$

8.229. $2\sin^4 t(\sin 2t-3)-2\sin^2 t(\sin 2t-3)-1=0.$

8.230. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x.$

8.231. $2\sin^4 x+1{,}25\sin^2 2x-\cos^4 x=\cos 2x.$

8.232. $\sin 2t\cos 2t(\sin^4 2t+\cos^4 2t-1)=\frac{1}{2}\sin^2 4t.$

8.233. $\sin 2x-2\cos^2 x+4(\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x-1)=0.$

8.234. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 2x.$

8.235. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^3 2x+1.$

8.236. $\frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}-6\cos^{-1} x=\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}.$

8.237. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0.$

8.238. $\sin x+\cos x+\sin 2x+\sqrt{2}\sin 5x=\frac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$

8.239. $3\sin^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=$
$=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}.$

8.240. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$

8.241. $\operatorname{tg}^3 z+\operatorname{ctg}^3 z-8\sin^{-3} 2z=12.$

8.242. $\frac{1}{\operatorname{tg} 5x+\operatorname{tg} 2x}-\frac{1}{\operatorname{ctg} 5x+\operatorname{ctg} 2x}=\operatorname{tg} 3x.$

8.243. $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}+4\cos^{-1}2z=\dfrac{4\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}-1}$.

8.244. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^2 2x-1$.

8.245. $\dfrac{4\sin^2\frac{t}{2}-1}{\cos t}=\operatorname{tg} t\,(1-2\cos t)$.

8.246. $3\sin^2 z\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\frac{1}{2}\sin^2 2z-5\cos^4 z+2\cos 2z=0$.

8.247. $\dfrac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg} t}+\dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t}=0$.

8.248. $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\cdot\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\sin^{-1}t-1$.

8.249. $\dfrac{\cos^4 2x+\sin^4 2x}{\cos^4 2x-\sin^4 2x}-\frac{1}{2}\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^{-1}4x$.

8.250. $\cos^{-4}z=\frac{160}{9}-2\sin^{-2}z\,(\operatorname{ctg} 2z\operatorname{ctg} z+1)$.

8.251. $\cos^{-3}t\sin^{-3}t-\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{ctg}^3 t=2\sqrt{3}\cos^{-1}2t$.

8.252. $(\sin x-\cos x)^2+\operatorname{tg} x=2\sin^2 x$.

8.253. $\sin 3t-\sin t=\dfrac{8\cos t\operatorname{ctg} 2t}{4-\sin^{-2}t}$.

8.254. $\sin^2 2x\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)+3\sin 2x\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+2\cos^3 2x=0$.

8.255. $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1$.

8.256. $\dfrac{4\sin^4 z}{(1+\cos 2z)^2}-2\cos^{-2}z-1=0$.

8.257. $\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{z}{2}-2=4\operatorname{tg} z$.

8.258. $\cos^3 z\cos 3z+\sin^3 z\sin 3z=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

8.259. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sin^2 x-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^2 x+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$.

8.260. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3z+\operatorname{tg} 4z}+\operatorname{ctg}^2 7z=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3z+\operatorname{ctg} 4z}$.

8.261. $(2\cos 2t+5)\cos^4 t-(2\cos 2t+5)\sin^4 t=3$.

8.262. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg}(z+60^\circ)\operatorname{tg}(z+120^\circ)=\sqrt{3}$.

8.263. $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2$.

8.264. $1-\dfrac{2(\cos 2t-\operatorname{tg} t\sin 2t)}{\cos^{-2}t}=\sin^4 t-\cos^4 t$.

8.265. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x$.

8.266. $\cos^3 x+\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x\sin^3 x+4\sin x+4=0$.

8.267. $\dfrac{2(\cos^3 x+2\sin^3 x)}{2\sin x+3\cos x}=\sin 2x$.

8.268. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2\sin x$.

8.269. $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}+\dfrac{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=1$.

8.270. $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+0{,}375=0$.

8.271. $\sin 2z+5(\sin z+\cos z)+1=0$.

8.272. $\sin^3 2t+\cos^3 2t+\frac{1}{2}\sin 4t=1$.

8.273. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg} 2z=\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} 2z$.

8.274. $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{2\cos x-\sin x}=\cos 2x$.

8.275. $\dfrac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t}+\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t}=0$.

8.276. $\operatorname{tg}^4 x=36\cos^2 2x$.

8.277. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x+8=0$.

8.278. $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 2x$.

8.279. $2\cos z\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}-z\right)-5\sin^2 z\cos^2 z+\sin z\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)=\cos 2z$.

8.280. $\sin 2x\sin 6x\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 12x=0$.

8.281. $2\sin 2x+3\operatorname{tg} x=5$.

8.282. $5\sin^4 2z-4\sin^2 2z\cos^2 2z-\cos^4 2z+4\cos 4z=0$.

8.283. $1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 5x-\sqrt{2}\operatorname{tg} 2x\cos 3x\cos^{-1}5x=0$.

8.284. $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\frac{1}{16}$.

10. Užsak. Nr. 1941.

8.285. $\frac{1}{\sin^2 2x}+\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x-4=0.$

8.286. $\operatorname{tg} 5z-\operatorname{tg} 3z-2 \operatorname{tg} 2z=0.$

8.287. $\cos 2x+\cos \frac{3x}{4}-2=0.$

8.288. $(\operatorname{ctg} z-1)(1+\sin 2z)=1+\operatorname{ctg} z.$

8.289. $\operatorname{tg} x \cdot \frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3 \operatorname{tg}^2 x}=\sin 6x.$

8.290. $\sin^4 3t+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3t\right)=\frac{1}{4}.$

8.291. $\cos 10x+2 \cos^2 4x+6 \cos 3x \cos x=\cos x+8 \cos x \cos^3 3x.$

8.292. $1+\sin \frac{t}{2} \sin t-\cos \frac{t}{2} \sin^2 t=2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right).$

8.293. $\frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) \sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}+2 \operatorname{tg} x=0.$

8.294. $\frac{4 \cos^2 t-1}{\sin t}=\operatorname{ctg} t(1+2 \cos 2t).$

8.295. $(\sin x+\cos x)^4=2(1+\sin^2 x)-(\sin x-\cos^3 x)^4.$

8.296. $\cos^{-4} z=64 \cos^2 2z.$

8.297. $4 \sin 5x \cos 5x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin 4x.$

8.298. $\frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z}+\frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} 4z}+\frac{5}{2}=0.$

8.299. $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}=6 \cos 2x+4 \sin 2x.$

8.300. $\operatorname{tg} 5x-2 \operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 5x.$

8.301. $\cos z+\sin z=\sqrt{1-2 \cos^2 z}.$

8.302. $\sqrt{3}(1+\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x)=\operatorname{tg} 2x \cos^{-1} 3x.$

8.303. $\left(\cos^{-6} z-\operatorname{tg}^6 z-\frac{7}{3}\right)(\sin z+\cos z+2)=0.$

8.304. $\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} 5x=0.$

8.305. $\cos^{-1} 2t+\sin^{-1} 2t+\cos^{-1} 2t \sin^{-1} 2t-5=0.$

8.306. $\cos(22^\circ-t)\cos(82^\circ-t)+\cos(112^\circ-t)\cos(172^\circ-t)=\frac{1}{2}(\sin t+\cos t).$

8.307. $\sin 4x(3 \sin 4x-2 \cos 4x)=\sin^2 2x-16 \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 2x+\cos^2 2x.$

8.308. $\cos 3z-\cos^3 z+\frac{3}{4} \sin 2z=0.$

8.309. $\operatorname{tg}(t^2-t)\operatorname{ctg} 2=1.$

8.310. $\sin^3 x(1-\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1-\operatorname{tg} x)=1{,}5 \cos 2x.$

8.311. $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)}{1+\cos 2t}=\cos^{-2} 2t-1.$

8.312. $4 \cos x \cos 2x \cos 3x=\cos 6x.$

8.313. $1-\cos x=\sqrt{1-\sqrt{4 \cos^2 x-7 \cos^4 x}}.$

8.314. $\frac{2 \sin x-\sin 2x}{2 \sin x+\sin 2x}+\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}=\frac{10}{3}.$

8.315. $4(\sin t \cos^5 t+\cos t \sin^5 t)+\sin^3 2t=1.$

8.316. $\sin^4 x-\sin^2 x+4(\sin x+1)=0.$

8.317. $\frac{\sin^2 t-\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t-\operatorname{ctg}^2 t}+2 \operatorname{tg}^3 t+1=0.$

8.318. $\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t}-\frac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t}=0.$

8.319. $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}+\sin x\left(1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)=4.$

8.320. $\sin 2z-\sin 6z+2=0.$

8.321. $\sin^2(t+45^\circ)-\sin^2(t-30^\circ)-\sin 15^\circ \cos(2t+15^\circ)=0{,}5 \sin 6t.$

8.322. $3 \operatorname{tg} 3x-4 \operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$

8.323. $\frac{5 \sin x-5 \operatorname{tg} x}{\sin x+\operatorname{tg} x}+4(1-\cos x)=0.$

8.324. $4 \cos x=\sqrt{3} \operatorname{ctg} x+1.$

8.325. $1+\frac{2(\cos 2z \operatorname{tg} z-\sin 2z)}{\cos^{-2} z}=\cos 2z.$

8.326. $(\cos x-\sin x)^2+\cos^4 x-\sin^4 x=0{,}5 \sin 4x.$

8.327. $\operatorname{ctg} x\left(1-\frac{1}{2} \cos 2x\right)=1.$

8.328. $\cos^2(x+40^\circ)+\cos^2(x-40^\circ)-\sin 10^\circ \cos 2x=\sin 2x.$

8.329. $2 \cos^2 \frac{x}{2}(1-\sin x)+\cos^2 x=0.$

8.330. $\operatorname{tg} 6x \cos 2x-\sin 2x-2 \sin 4x=0.$

8.331. $\cos 8x+3 \cos 4x+3 \cos 2x=8 \cos x \cos^3 3x-0{,}5.$

8.332. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+1)=1$.

8.333. $\frac{8 \sin^{-2} 2x+1}{\cos^{-2} x+\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{ctg}^2 x+\frac{4}{3}$.

8.334. $2+\sin t=3 \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

8.335. $\operatorname{tg}(35^\circ+x) \operatorname{ctg}(10^\circ-x)=\frac{2}{3}$.

8.336. $2 \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x=0$.

8.337. $\sin^4 2x+\sin^3 2x \cos 2x-8 \sin 2x \cos^3 2x-8 \cos^4 2x=0$.

8.388. $\cos t(1-\operatorname{tg} t)(\sin t+\cos t)=\sin t$.

8.339. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}$.

8.340. $1+\sin z+\cos z+\sin 2z+\cos 2z=0$.

8.341. $\operatorname{ctg}(x-25^\circ)+\operatorname{tg}(3x+15^\circ)=2 \sin(2x-50^\circ)$.

8.342. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+3 \operatorname{tg} x+3 \operatorname{ctg} x+4=0$.

8.343. $\operatorname{tg} 2t=\operatorname{ctg} t-4 \cos t \cos 3t$.

8.344. $\cos 2x=\cos^2 \frac{3x}{2}$.

8.345. $(\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t+2 \operatorname{tg} 2t)(1+\cos 3t)=4 \sin 3t$.

8.346. $\sin x(\cos x-2)+\operatorname{tg} x=2-\cos x-\cos^{-1} x$.

8.347. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}-2+\sin x}=2 \cos x$.

8.348. $1-\sin 2x=\cos x-\sin x$.

8.349. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{106}{9}$.

8.350. $\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=0$.

8.351. $3\sqrt{3} \operatorname{tg} x \sin x-\operatorname{ctg} x \cos x+9 \sin x-3\sqrt{3} \cos x=0$.

8.352. $\cos 2x-\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin \frac{\pi}{4}-1$.

8.353. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4$.

8.354. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)}{1+\cos x}=2$.

8.355. $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x=\sin x$.

8.356. $2 \sin^2 3x+\sin^2 6x=(\sin 2x+\sin 4x)\cos^{-1} x \sin^{-1} 3x$.

8.357. $4 \sin^4 x+\cos 4x=1+12 \cos^4 x$.

8.358. $5(1-\sin 2x)-16(\sin x-\cos x)+3=0$.

8.359. $37 \operatorname{tg} 3x=11 \operatorname{tg} x$.

8.360. $\sqrt{2}(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=\cos 2x+\sin 2x$.

8.361. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=\sin^{-1} x-\cos^{-1} x$.

8.362. $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$.

8.363. $\sin 3x+\sin x-\sin 2x=2 \cos x(\cos x-1)$.

8.364. $\cos 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$.

8.365. $2(1+\sin 2x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

8.366. $\frac{1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x}{\operatorname{tg} 2x}=0$.

8.367. $\frac{\operatorname{tg} 2t}{\cos^2 t}-\frac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 2t}=0$.

8.368. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=0$.

8.369. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\sin x+\cos x$.

8.370. $\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{2}}+\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{2}}=2$.

8.371. $\sin 3x=a \sin x$.

8.372. $\cos 3x=m \cos x$.

8.373. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} \alpha+1=\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \alpha$.

8.374. $12 \sin x+4\sqrt{3} \cos(\pi+x)=m\sqrt{3}$.

8.375. $\sin\left(x+\frac{5}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)=\cos \alpha$.

8.376. $2^{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}-\cos x}=4$.

8.377. $2^{\sin^2 x}+4 \cdot 2^{\cos^2 x}=6$.

8.378. $3^{1+\sin x+\ldots+\sin^n x+\ldots}=\sqrt[3]{9}$.

8.379. $2^{-1+\cos x-\cos^2 x+\ldots+(-1)^{n-1} \cos^n x+\ldots}=\sqrt[3]{0{,}25}$.

8.380. $9^{1-\cos 6x}=3^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$.

8.381. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$.

8.382. $1+2^{\operatorname{tg} x}=3 \cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \cos^{-1} x}$.

8.383. $\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1$.

8.384. $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$.

8.385. $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1-\cos 2x) = 2$.

8.386. Duota $(1+\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} y) = 2$. Raskite $x+y$.

8.387. Įrodykite, kad lygtis

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x + \frac{1}{\sin x \sin 2x \sin 3x} = 0$$

neturi šaknų.

8.388. Stačiojo trikampio vienas kampas tenkina lygtį $\sin^3 x + \sin x \sin 2x - 3\cos^3 x = 0$. Įrodykite, kad trikampis yra lygiašonis.

8.389. Įrodykite, kad nėra tokio trikampio, kurio kiekvienas kampas tenkintų lygtį

$$(3\cos x - 2)(14\sin^2 x + \sin 2x - 12) = 0.$$

8.390. Įrodykite, kad egzistuoja trikampiai, kurių kiekvienas kampas tenkina lygtį

$$(65\sin x - 56)(80 - 64\sin x - 65\cos^2 x) = 0.$$

Raskite tuos kampus.

8.391. Įrodykite, kad trikampis, kurio kiekvienas kampas tenkina lygtį $3\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2\sqrt{3} = 0$, yra lygiakraštis.

8.392. Raskite $\sin\alpha$, kai $\cos\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta = \operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma = \operatorname{tg}\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ 0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$.

8.393. Raskite pirmojo ketvirčio kampus α, β ir γ, kai žinoma, kad jie sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas $\frac{\pi}{12}$, o tų kampų tangentai — geometrinę progresiją.

Išspręskite lygčių sistemas (8.394—8.405):

8.394. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 8.395. $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2. \end{cases}$

8.396. $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$ 8.397. $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cos x = 0{,}75. \end{cases}$

8.398. $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 8.399. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

8.400. $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y. \end{cases}$ 8.401. $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -1{,}8. \end{cases}$

8.402. $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\cos^{-1} y} = 5, \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\cos^{-1} y} = 4. \end{cases}$ 8.403. $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

8.404. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25, \\ x + y = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$ 8.405. $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}25, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

C grupė

Išspręskite lygtis (8.406—8.492):

8.406. $(\cos^2 x + \cos^{-2} x)(1 + \operatorname{tg}^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4$.

8.407. $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \ldots + \operatorname{tg}^n x + \ldots}{1 - \operatorname{tg} x + \ldots + (-1)^n \operatorname{tg}^n x + \ldots} = 1 + \sin 2x$, $|\operatorname{tg} x| < 1$.

8.408. $\operatorname{tg} x - \sin 2x - \cos 2x(1 - 2\cos^{-1} x) = 0$.

8.409. $\dfrac{1 - \sin t + \ldots + (-1)^n \sin^n t + \ldots}{1 + \sin t + \ldots + \sin^n t + \ldots} = \dfrac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t}$, $|\sin t| \neq 1$.

8.410. $\sqrt{3}\sin t - \sqrt{2\sin^2 t - \sin 2t + 3\cos^2 t} = 0$.

8.411. $\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{4}$.

8.412. $2\sin^2 t = \sqrt{\sin^2 t - 16\sin^2 t \cos^2 t \cos^2 2t + \cos^2 t}$.

8.413. $\cos z \sqrt{\operatorname{tg}^2 z - \sin^2 z} + \sin z \sqrt{\operatorname{ctg}^2 z - \cos^2 z} = 2\sin z$.

8.414. $\cos x + \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} - \cos x \sqrt{\frac{3}{2} - \cos^2 x} = 1$.

8.415. $\sqrt[5]{\frac{1}{2} - \sin x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} + \sin x} = 1$.

8.416. $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 1 + \cos x$.

8.417. $\sqrt{1 + 3\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{tg} x}} = \frac{5}{2}$.

8.418. $\sqrt[4]{\frac{1}{2} - \cos 2x} + \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \cos 2x} = 1$.

8.419. $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} = 3$.

8.420. $2 - \sin x = \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}$.

8.421. $\sqrt[3]{2 - \operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{7 + \operatorname{tg} x} = 3$.

8.422. $\sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3} = 4$.

8.423. $\sqrt[3]{\sin^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x} = \sqrt[3]{2\cos 2x}$.

8.424. $\cos x + \sqrt{\sin^2 x - 2\sin 2x + 4\cos^2 x} = 0$.

8.425. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$.

8.426. $\dfrac{1 - 2\cos^2 x}{\sin x \cos x} + 2\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg}^3 4x = 3$.

8.427. $\sqrt[4]{10 + 8\sin^2 x} - \sqrt[4]{8\cos^2 x - 1} = 1$.

8.428. $\sin^{-1} 2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+2}+\operatorname{ctg} 2x\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x-2}=4\cos^2 2x$.

8.429. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0$.

8.430. $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0$.

8.431. $(\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0$.

8.432. $4\operatorname{ctg}^3 2x-12\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-14=0$.

8.433. $\cos^{-4} x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x$.

8.434. $\cos^{-4} x+8\cos^{-1} x-7=0$.

8.435. $\sin^{10} 3x+\cos^{10} 3x=4\dfrac{\sin^6 3x+\cos^6 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}$.

8.436. $\operatorname{ctg}^4 2z=\cos^2 4z+1$.

8.437. $\left(2+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^4 x)=1+5\sin 3y$.

8.438. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)(1-4\cos^2 2x)-2\cos 4x=3$.

8.439. $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1} x)+2\cos^{-2} x+5=0$.

8.440. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg} t)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg} t)$.

8.441. $\cos^{-4} x-2\cos^{-2} x-12\operatorname{tg} x-16=0$.

8.442. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=\dfrac{41}{128}$.

8.443. $2(1-\sin x-\cos x)+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=0$.

8.444. $\dfrac{\operatorname{tg} t}{2-\cos^{-2} t}(\sin 3t-\sin t)=\dfrac{2}{\operatorname{ctg}^2 t-3}$.

8.445. $\operatorname{tg}(\pi\cos t)=\operatorname{ctg}(\pi\sin t)$.

8.446. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x-\cos 4x=3$.

8.447. $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg}^2 5x=\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg}^2 3x-\operatorname{tg}^2 5x$.

8.448. $(5+3\sin^{-2} x)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y$.

8.449. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg} x-2=0$.

8.450. $\cos^4 x+4\cos x-1=0$.

8.451. $\dfrac{1-\cos 2x+\ldots+(-1)^n\cos^n 2x+\ldots}{1+\cos 2x+\ldots+\cos^n 2x+\ldots}=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x,\ |\cos 2x|\neq 1$.

8.452. $2(\operatorname{tg} x-\sin x)+3(\operatorname{ctg} x-\cos x)+5=0$.

8.453. $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^3 x-4=0$.

8.454. $\cos\sqrt{x}=\cos x$.

8.455. $|\sin t+\cos t|=\sqrt{2}$.

8.456. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg} 4x$.

8.457. $\cos 6x+\sin\dfrac{5x}{2}=2$.

8.458. $\sqrt{3}|\cos t|=1+\operatorname{ctg} t$.

8.459. $\cos^2 x^2(\operatorname{tg} x^2+2\operatorname{tg} x)+\operatorname{tg}^3 x(1-\sin^2 x^2)(2-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} x^2)=0$.

8.460. $\dfrac{1-\operatorname{tg} x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1+\operatorname{tg} x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x,\ |\operatorname{tg} x|<1$.

8.461. $(\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x)^2-\cos(x+4\operatorname{tg} x)=-1$.

8.462. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{ctg}^2 2x\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 2x+\operatorname{ctg} 3x$.

8.463. $(4-\cos 2x)(2+3\sin y)=12+13\cos^{-2} 3z$.

8.464. $(2\sin x-1)(\cos^4 x+2\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x+1)=0$.

8.465. $1+\sqrt{3}(1+\cos x)=\cos 2(x+2\operatorname{tg} x)$.

8.466. $2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg} 3x$.

8.467. $2\sin^2 x+\sin x+\sin^{-1} x+2\sin^{-2} x=6$.

8.468. $2\operatorname{tg}\pi t^2-\operatorname{tg}\pi t+\operatorname{tg}\pi t\operatorname{tg}^2\pi t^2=0$.

8.469. $\sin^4 x+2\cos^3 x+2\sin^2 x-\cos x+1=0$.

8.470. $|\sin t|+|\cos t|=1{,}4$.

8.471. $\dfrac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{2-\cos^{-2} x}=\dfrac{4+2\cos\frac{6}{5}x}{\cos 3x+\cos x}$.

8.472. $12\cos^{-2} x+\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x+10\left(2\operatorname{tg} x+\dfrac{\operatorname{ctg} x}{3}\right)=1$.

8.473. $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x$.

8.474. $3\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 2x$.

8.475. $\operatorname{ctg} 2\pi t^2+\operatorname{ctg} 4\pi t=0$.

8.476. $(3-\operatorname{tg}^2 x)(\cos 3x+\cos x)=\dfrac{4\cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

8.477. $\dfrac{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}{1-\sin t+\ldots+(-1)^n\sin^n t+\ldots}=\dfrac{4}{1+\operatorname{tg}^2 t},\ |\sin t|\neq 1$.

8.478. $|\operatorname{tg} 2t+\operatorname{ctg} 2t|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

8.479. $(3-\sin x)(4-\sin^{-2} x)=12+\cos^2 y$.

8.480. $4-4(\cos z-\sin z)-\sin 2z=0$.

8.481. $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\operatorname{tg} t=2\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{4}$.

8.482. $\dfrac{3\operatorname{tg} t-\operatorname{tg}^3 t}{1-\operatorname{tg}^2 t}(\cos 3t+\cos t)=2\sin 5t$.

8.483. $\operatorname{tg} x-\sin 2x-\cos 2x+2(2\cos x-\cos^{-1} x)=0$.

8.484. $5\sin 2z-11(\sin z+\cos z)+7=0$.

8.485. $\sin^{-1} 5x-\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

8.486. $4\cos^2 2t-\operatorname{tg} 4t=\operatorname{ctg} 2t$.

8.487. $\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0$.

8.488. $\sin^{10} x+\cos^{10} x=\dfrac{29}{64}$.

8.489. $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=5+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+4x\right)$.

8.490. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=6$.

8.491. $\log_{0,5 \sin 2x} \sin x=\frac{1}{2}$.

8.492. $\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x=\frac{1}{4}$.

8.493. Įrodykite, kad lygtis $2 \operatorname{ctg} 2x-3 \operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$ neturi šaknų.

Išspręskite lygčių sistemas (8.494—8.499):

8.494. $\begin{cases} \sin x-\frac{1}{\sin x}=\sin y, \\ \cos x-\frac{1}{\cos x}=\cos y. \end{cases}$

8.495. $\begin{cases} 3 \operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x=\sin 2y. \end{cases}$

8.496. $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2}+\operatorname{tg} \frac{y}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2\sqrt{3}. \end{cases}$

8.497. $\begin{cases} \cos x-\cos y=\sin(x+y), \\ |x|+|y|=\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

8.498. $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2 \sin\left(y-\frac{3\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} y+\operatorname{ctg} y=2 \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

8.499. $\begin{cases} 2 \cos x=3 \operatorname{tg} y, \\ 2 \cos y=3 \operatorname{tg} z, \\ 2 \cos z=3 \operatorname{tg} x. \end{cases}$

8.500. Raskite x, y, z, kai $\frac{\sin x}{1}=\frac{\sin y}{\sqrt{3}}=\frac{\sin z}{2}$, $x+y+z=\pi$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

9 SKYRIUS
NELYGYBĖS

KAIP SPRĘSTI NELYGYBES SU VIENU KINTAMUOJU

1⁰. Nelygybių su vienu kintamuoju išraiška yra tokia:

$f(x)>g(x)$; $f(x)<g(x)$; $f(x)\geqslant g(x)$; $f(x)\leqslant g(x)$.

Nelygybės sprendiniu vadinama aibė kintamojo reikšmių, su kuriomis duotoji nelygybė virsta teisinga skaitine nelygybe.

Dvi nelygybės, kurių sprendinių aibės sutampa, vadinamos *ekvivalenčiomis*.

Svarbiausia sprendžiant nelygybę yra ją pakeisti paprastesne, tačiau ekvivalenčia nelygybe.

2⁰. Sprendžiant nelygybes, taikomos šios nelygybės pakeitimo ekvivalenčia taisyklės:

a) kurį nors nelygybės narį galima perkelti iš vienos jos pusės į kitą pakeičiant to nario ženklą priešingu, o nelygybės ženklą paliekant nepakeistą;

b) abi nelygybės puses galima padauginti arba padalyti iš to paties teigiamo skaičiaus paliekant nelygybės ženklą nepakeistą;

c) abi nelygybės puses galima padauginti arba padalyti iš to paties neigiamojo skaičiaus pakeičiant nelygybės ženklą priešingu;

d) jeigu su tam tikromis x reikšmėmis teisingos nelygybės $f(x)>0$, $g(x)>0$ ir $f(x)>g(x)$, tai su tomis pačiomis x reikšmėmis teisinga nelygybė $(f(x))^n>(g(x))^n$, $n\in N$.

3⁰. Sakykime, duotoji nelygybė yra $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ išraiškos (vietoj ženklo $>$ gali būti ženklai $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, o vardiklyje esanti funkcija — pastovi) arba pakeista $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ išraiškos nelygybe remiantis 2⁰ taisyklėmis.

Nelygybę galima spręsti intervalų metodu, kurio esmė tokia:

a) skaičių ašyje pažymimi taškai x_1, x_2, ..., x_n, dalijantys ją į atkarpas, kuriose reiškinys $\frac{f(x)}{g(x)}$ apibrėžtas ir nekeičia ženklo (pliuso arba minuso). Tokie taškai gali būti lygčių $f(x)=0$ ir $g(x)=0$ šaknys. Šias šaknis atitinkantys taškai pažymimi skaičių ašyje: juodais skritulėliais — taškai, tenkinantys duotąją nelygybę, o šviesiais skritulėliais — netenkinantys jos;

b) nustatomas ir skaičių ašyje pažymimas ženklas, kurį įgyja reiškinys $\frac{f(x)}{g(x)}$ su x reikšmėmis, priklausančiomis kiekvienam iš gautų intervalų. Jeigu funkcijos $f(x)$ arba $g(x)$ yra daugianariai, kuriuose nėra dauginamųjų $(x-a)^{2n}$ (čia $n\in N$), tai reikia nustatyti funkcijos $\frac{f(x)}{g(x)}$ ženklą bet kuriame tokiame intervale, kuriame nėra a, o kituose intervaluose pliuso ir minuso ženklai kaitaliosis.

Jeigu trupmenos $\frac{f(x)}{g(x)}$ skaitiklyje ir vardiklyje yra dauginamasis $(x-a)^{2n}$ (čia $n\in N$), tai laikoma, jog $x\neq a$, ir abi duotosios nelygybės pusės dalijamos iš dauginamojo $(x-a)^{2n}$, kuris yra teigiamas su visomis reikšmėmis $x\neq a$ (žr. 2⁰ nurodymą). Po to tiesiogiai patikrinama, ar reikšmė $x=a$ tenkina duotąją nelygybę.



9.1 pav.

1 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $\frac{(x+3)(5-x)}{2x-5}>0.$

△ Lygčių $(x+3)(5-x)=0$ ir $2x-5=0$ šaknys — skaičiai $x_1=-3$, $x_2=2{,}5$, $x_3=5$, kurie nėra duotosios nelygybės sprendiniai. Todėl juos skaičių ašyje pažymime šviesiais skrituléliais (9.1 pav.). Šie taškai padalija skaičių ašį į keturis intervalus. Nustatome, kad su reikšmėmis $x>5$ kairioji nelygybės pusė yra neigiama. Tada į dešinę nuo taško 5 rašome minuso ženklą ir, eidami kairėn, kaitaliojame pliuso bei minuso ženklus. Ženklų keitimąsi patogu vaizduoti banguota kreive (*ženklų kreive*). Ji brėžiama per pažymėtus taškus aukščiau arba žemiau skaičių ašies atsižvelgiant į nelygybės ženklą nagrinėjamame intervale. Remdamiesi 9.1 paveikslu, gauname atsakymą: $(-\infty;\ -3)\cup(2{,}5;\ 5)$. ▲

2 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $\frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+4)^5(2x-6)^4}\leqslant 0.$

△ Tarkime, kad $x\neq 0$ ir $x\neq 3$, ir padalykime abi nelygybės puses iš teigiamos trupmenos $\frac{x^2}{(2x-6)^4}$. Iš karto matome, jog $x=0$ tenkina duotąją nelygybę, o $x=3$ jos netenkina. Be to, dauginamuosius su nelyginiais laipsnio rodikliais pakeiskime atitinkamais pirmojo laipsnio dauginamaisiais (aišku, dėl to kairėje nelygybės pusėje esančio reiškinio ženklas nepasikeis). Gausime paprastesnę nelygybę, ekvivalenčią duotajai su visais $x\neq 0$ ir $x\neq 3$:

$$\frac{(2x-9)(x-1)}{x+4}\leqslant 0.$$



9.2 pav.

Nubrėžę ženklų kreivę, subrūkšniuokime intervalus, tenkinančius šią nelygybę, ir toje pačioje ašyje pažymėkime taškus $x=0$ ir $x=3$ (9.2 pav.). Kadangi reikšmė $x=0$ yra pradinės nelygybės sprendinys, bet nepriklauso subrūkšniuotam intervalui, tai ir ją reikia įtraukti į atsakymą. Reikšmė $x=3$ nėra nelygybės sprendinys, tačiau priklauso subrūkšniuotam intervalui; vadinasi, ją reikia atmesti. Taigi gauname atsakymą: $(-\infty;\ -4)\cup[1;\ 3)\cup(3;\ 4{,}5]\cup 0$. ▲

4°. Aptarkime kvadratinės nelygybės

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (9.1)$$

sprendimą, kai kvadratinio trinario ax^2+bx+c diskriminantas neigiamas ($D=b^2-4ac<0$).

Kai $a>0$, (9.1) nelygybė teisinga su visomis x reikšmėmis; kai $a<0$, ji neteisinga su visomis x reikšmėmis.

5°. Iracionalioji nelygybė

$$\sqrt{f(x)}<g(x) \qquad (9.2)$$

ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,\\ (\sqrt{f(x)})^2>g(x). \end{cases} \qquad (9.3)$$

6°. Iracionalioji nelygybė

$$\sqrt{f(x)}>g(x) \qquad (9.4)$$

ekvivalenti dviejų nelygybių sistemų visumai:

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0,\\ (\sqrt{f(x)})^2>(g(x))^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ g(x)<0. \end{cases} \qquad (9.5)$$

7°. Rodiklinė nelygybė

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}, \qquad (9.6)$$

kai $a>1$, ekvivalenti nelygybei

$$f(x)>g(x), \qquad (9.7)$$

o kai $0<a<1$, — nelygybei

$$f(x)<g(x). \qquad (9.8)$$

8°. Logaritminė nelygybė

$$\log_a f(x)>\log_a g(x), \qquad (9.9)$$

kai $a>1$, ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x), \end{cases} \qquad (9.10)$$

o kai $0<a<1$, — nelygybių sistemai

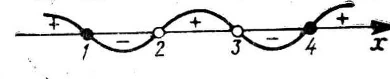
$$\begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g(x). \end{cases} \qquad (9.11)$$

3 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $\frac{1}{x^2-5x+6}\leqslant\frac{1}{2}$.

△ Duotąją nelygybę pakeičiame jai ekvivalenčia:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{2}\leqslant 0, \quad \frac{x^2-5x+4}{2(x^2-5x+6)}\geqslant 0.$$

Lygties $x^2-5x+4=0$ šaknys $x_1=1$, $x_2=4$ yra nelygybės sprendiniai (9.3 paveiksle jos pažymėtos juodais skrituléliais); lygties $x^2-5x+6=0$ šaknys $x_3=2$, $x_4=3$ nėra nelygybės sprendiniai (9.3 paveiksle jos pažymėtos šviesiais skrituléliais). Remdamiesi ženklų kreive (9.3 pav.), gauname atsakymą: $(-\infty;\ 1]\cup(2;3)\cup[4;\infty)$. ▲



9.3 pav.

4 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}>0.$

△ Atsižvelgdami į tai, kad x negali įgyti neigiamų reikšmių, taškais $x_1=2$ (lygties $x-2=0$ šaknis) ir $x_2=9$ (lygties $\sqrt{x}-3=0$ šaknis) padalykime į intervalus ne visą skaičių ašį, o tik jos dalį $[0;\ \infty)$. Remdamiesi ženklų kreive (9.4 pav.), gauname atsakymą: $[0;\ 2)\cup(9;\ \infty)$. ▲



9.4 pav.

5 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $\sqrt{x+61}<x+5.$

△ Pagal 5° nurodymą ši iracionalioji nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x+61\geqslant 0,\\ x+5>0,\\ x+61<x^2+10x+25, \text{ t. y.} \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-61,\\ x>-5,\\ x^2+9x-36>0, \text{ t. y.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-5,\\ x^2+9x-36>0. \end{cases}$$

Išsprendę kvadratinę lygtį $x^2+9x-36=0$, randame: $x_1=-12$, $x_2=3$. Brėžiame ženklų kreivę (šiuo atveju — parabolės šaką) ir rodykle, nukreipta į de-



9.5 pav.

šinę nuo taško -5, pažymime intervalą $x>-5$ (9.5 pav.). Sistemos pirmosios ir antrosios nelygybės sprendiniai sutampa intervale $(3;\ \infty)$. Taigi gauname atsakymą: $(3;\ \infty)$. ▲

6 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $x-3<\sqrt{x-2}$.

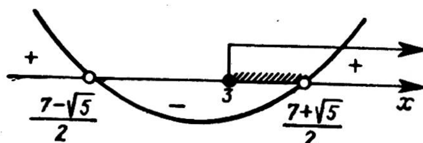
△ Pagal 6^0 nurodymą ši iracionalioji nelygybė ekvivalenti tokiai dviejų nelygybių sistemų visumai:

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-3\geqslant 0, \\ x^2-6x+9<x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-3<0, \end{cases}$$

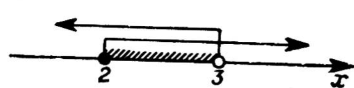
arba

$$\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\geqslant 3, \\ x^2-7x+11<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x<3. \end{cases}$$

Pirmosios sistemos sprendinys yra intervalas $3\leqslant x<\frac{7+\sqrt{5}}{2}$ (9.6 pav.), antrosios — intervalas $2\leqslant x<3$ (9.7 pav.). Sujungę šiuos sprendinius, gauname atsakymą: $2\leqslant x<\frac{7+\sqrt{5}}{2}$. ▲



9.6 pav.



9.7 pav.

7 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x}-81}{x^2+2x+5}<0$.

△ Kadangi reiškinys x^2+2x+5 yra teigiamas su bet kuria x reikšme, tai, abi nelygybės puses padauginę iš to reiškinio, gausime ekvivalenčią nelygybę

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x}-81<0, \text{ arba } 3^{-(8+x)}<3^4.$$

Laipsnio pagrindas $3>1$, todėl, remdamiesi 7^0 nurodymu, gauname: $-8-x<4$; iš čia $x>-12$. Taigi gauname atsakymą: $(-12;\ \infty)$. ▲

8 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $0{,}4^{\log_2^2 x+1}<6{,}25^{2-\log_2 x^3}$.

△ Kadangi $0{,}4=\frac{2}{5}$ ir $6{,}25=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, suvienodiname nelygybės kairiosios ir dešiniosios pusės pagrindus:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x+1}<\left(\frac{2}{5}\right)^{2\log_2 x^3-4}.$$

Pagrindas $0<\frac{2}{5}<1$, todėl, remdamiesi 7^0 nurodymu, gauname: $\log_2^2 x+1>2\log_2 x^3-4$. Funkcija $f(x)=\log_2 x$ apibrėžta su $x>0$; vadinasi, $2\log_2 x^3=6\log_2 x$. Tarkime, kad $y=\log_2 x$. Tuomet gausime nelygybę $y^2-6y+5>0$. Lygtis $y^2-6y+5=0$ turi šaknis $y_1=1$, $y_2=5$. Pažiūrėję į 9.8 paveikslą, matome, jog $y<1$ ir $y>5$.

9.8 pav.

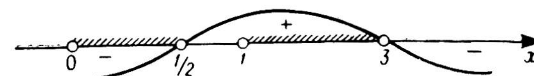
Taigi duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybių $\log_2 x<1$ ir $\log_2 x>5$ visumai, kurią galima užrašyti taip: $\log_2 x<\log_2 2$; $\log_2 x>\log_2 2^5$. Logaritmo pagrindas $2>1$, todėl, remdamiesi 8^0 nurodymu, sužinome, kad pirmosios nelygybės sprendinys yra intervalas $0<x<2$, o antrosios — intervalas $x>2^5$, t. y. $x>32$. Taigi gauname atsakymą: $(0;\ 2)\cup(32;\ \infty)$. ▲

9 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $x^{\frac{2x-1}{3-x}}>1$.

△ Nelygybę užrašykime tokia išraiška: $x^{\frac{2x-1}{3-x}}>x^0$. Išnagrinėkime du atvejus: $0<x<1$ ir $1<x<3$, $3<x<\infty$. Pogal 7^0 nurodymą išsprendžiame nelygybių sistemų visumą:

$$\begin{cases} 0<x<1, \\ \dfrac{2x-1}{3-x}<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1<x<3,\ 3<x<\infty, \\ \dfrac{2x-1}{3-x}>0. \end{cases}$$

Intervalų metodą taikome iš karto dviem sistemoms (9.9 pav.). Remdamiesi paveikslu ir atsižvelgdami į trupmeninės nelygybės ženklą (<0 pirmuoju atveju ir >0 antruoju atveju), gauname atsakymą: $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup(1;\ 3)$. ▲



9.9 pav.

10 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $\log_{1/3}\log_{1/2}\dfrac{x+4}{2x-3}<0$.

△ Pagal (7.3) formulę $0=\log_{1/3}1$. Kadangi logaritmo pagrindas $0<\frac{1}{3}<1$, tai, remdamiesi 8^0 nurodymu, gauname duotajai nelygybei ekvivalenčią nelygybę $\log_{1/2}\dfrac{x+4}{2x-3}>1$ (šiuo atveju sąlyga $\log_{1/2}\dfrac{x+4}{2x-3}>0$ tenkinama). Pritaikę (7.2) formulę, gauname: $1=\log_{1/2}\frac{1}{2}$. Kadangi $0<\frac{1}{2}<1$, tai, dar kartą remdamiesi 8^0 nurodymu, gauname nelygybei ekvivalenčią sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3}>0, \\ \dfrac{x+4}{2x-3}<\dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{ t. y. } \begin{cases} \dfrac{x+4}{2x-3}>0, \\ \dfrac{11}{2(2x-3)}<0. \end{cases}$$

Iš sistemos antrosios nelygybės išplaukia, kad $2x-3<0$; vadinasi, $x+4<0$, ir reikia išspręsti ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 2x-3<0, \\ x+4<0, \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} x<\dfrac{3}{2}, \\ x<-4; \end{cases} \text{ iš čia } x<-4.$$

Taigi gauname atsakymą: $(-\infty;\ -4)$. ▲

11 pavyzdys. Raskite funkcijos $y=\sqrt{1-\log_8(x^2-4x+3)}$ apibrėžimo sritį.

△ Kadangi logaritminė funkcija apibrėžta tik su teigiamaisiais skaičiais, o kvadratinė šaknis — su neneigiamaisiais skaičiais, tai reikia išspręsti nelygybių sistemą

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ 1-\log_8(x^2-4x+3)\geqslant 0. \end{cases}$$

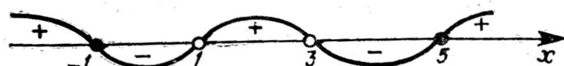
Pirmosios nelygybės kairiąją pusę išskaidykime dauginamaisiais, o antrosios nelygybės skaičių 1 pakeiskime skaičiumi $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ \log_8(x^2-4x+3)\leqslant \log_8 8. \end{cases}$$

Logaritmo pagrindas $8>1$, todėl, remdamiesi 8^0 nurodymu, gauname sistemą

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ x^2-4x+3\leqslant 8, \end{cases} \quad \text{t. y.} \quad \begin{cases} (x-3)(x-1)>0, \\ (x-5)(x+1)\leqslant 0. \end{cases}$$

Paskutinioji sistema ekvivalenti nelygybei $(x-3)(x-1)(x-5)(x+1)\leqslant 0$, kurią sprendžiame intervalų metodu. Remdamiesi 9.10 paveikslu, gauname atsakymą: $[-1;\ 1)\cup(3;\ 5]$. ▲



9.10 pav.

A grupė

9.001. Įrodykite, kad su visais teigiamaisiais skaičiais a ir b teisinga nelygybė $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

9.002. Jeigu $a>0$ ir $b>0$, tai

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leqslant\sqrt[4]{ab}.$$

Įrodykite.

9.003. Jeigu $p>0$ ir $q>0$, tai

$$(p+2)(q+2)(p+q)\geqslant 16pq.$$

Įrodykite.

9.004. Jeigu $a\neq 2$, tai

$$\frac{1}{a^2-4a+4}>\frac{2}{a^3-8}.$$

Įrodykite.

9.005. Jeigu m, n ir p yra trikampio kraštinių ilgiai, tai

$$m^2+n^2+p^2<2(mn+mp+np).$$

Įrodykite.

9.006. Jeigu $m\geqslant 0$ ir $n\geqslant 0$, tai

$$mn(m+n)\leqslant m^3+n^3.$$

Įrodykite.

9.007. Įrodykite, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais x ir y teisinga nelygybė

$$x^2+2y^2+2xy+6y+10>0.$$

9.008. Su kuriomis a reikšmėmis lygties $x^2-(a+1)x+a+4=0$ abi šaknys yra neigiamos?

9.009. Įrodykite, kad bet kurių dviejų teigiamųjų skaičių sumos ir jų atvirkštinių dydžių sumos sandauga yra ne mažesnė už 4.

9.010. Raskite sveikąsias teigiamas x reikšmes, tenkinančias nelygybę $\frac{5x+1}{x-1}>2x+2$.

9.011. Raskite nelygybių sistemos

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{2x+3}{3}+\frac{x}{6}<2-\frac{x+5}{2}, \\ 1-\frac{x+5}{8}+\frac{4-x}{2}<3x-\frac{x+1}{4} \end{cases}$$

sveikuosius sprendinius.

9.012. Raskite natūraliąsias x reikšmes, tenkinančias nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1)<4, \\ \frac{x}{x-3}+\frac{x-5}{x}<\frac{2x}{3-x}. \end{cases}$$

9.013. Su kuriomis x reikšmėmis funkcija $y=\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}$ įgyja teigiamas reikšmes?

9.014. Raskite aibę sveikųjų x reikšmių, tenkinančių nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x+2}>2, \\ \lg(x-1)<1. \end{cases}$$

9.015. Kokios turi būti m reikšmės, kad nelygybė $x^2-mx>\frac{2}{m}$ būtų teisinga su visomis x reikšmėmis?

Raskite funkcijų apibrėžimo sritį (**9.016—9.021**):

9.016. $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$. **9.017.** $y=0{,}5^{\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}}$.

9.018. $y=\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}$.

9.019. $y=\sqrt{\log_{1/2}\log_3\frac{x+1}{x-1}}$.

9.020. $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$. **9.021.** $y=\sqrt{-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$.

Išspręskite nelygybes (**9.022—9.095**):

9.022. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$. 9.023. $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2}<1$.

11. Užsak. Nr. 1941.

9.024. $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leqslant 1.$

9.025. $\log_\pi (x+27) - \log_\pi (16-2x) < \log_\pi x.$

9.026. $\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}(x^2+4).$

9.027. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0.$

9.028. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$

9.029. $\frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$

9.030. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}.$

9.031. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} > 0.$

9.032. $|2x^2-9x+15| \geqslant 20.$

9.033. $|x^2-5x| < 6.$

9.034. $5x-20 \leqslant x^2 \leqslant 8x.$

9.035. $\frac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)} \leqslant 0.$

9.036. $\frac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)} > 0.$

9.037. $(0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}.$

9.038. $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0.$

9.039. $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x} < 0.$

9.040. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0.$

9.041. $x^6-9x^3+8 > 0.$

9.042. $0,3^{2+4+6+\ldots+2x} > 0,3^{72}$ $(x \in N).$

9.043. $\sqrt{x^2-x-12} < x.$

9.044. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$

9.045. $\sqrt{9x-20} < x.$

9.046. $1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2.$

9.047. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0.$

9.048. $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}.$

9.049. $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1+\lg x.$

9.050. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1.$

9.051. $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x} \geqslant 1.$

9.052. $2^{1-2^{1/x}} < 0,125.$

9.053. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0.$

9.054. $5^{2x+1} > 5^x+4.$

9.055. $0,5^{x-2} > 6.$

9.056. $\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3} 100 - \log_{0,3} 9} < 1.$

9.057. $0,3^{\log_{1/3} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}} > 1.$

9.058. $2^{\log_{0,4} x \log_{0,4} \frac{5x}{2}} > 1.$

9.059. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52.$

9.060. $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}.$

9.061. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5.$

9.062. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leqslant 2,5.$

9.063. $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leqslant 0.$

9.064. $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot 12,25^{\frac{4x+1}{2}} \geqslant 1.$

9.065. $\frac{15}{4+3x-x^2} > 1.$

9.066. $0,64 < \sqrt{0,8^{x(x-3)}} < 1.$

9.067. $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{1/3}(x+3).$

9.068. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0.$

9.069. $(\log_{0,2}(x-1))^2 > 4.$

9.070. $\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < 0.$

9.071. $\log_{0,3}(x^2-5x+7) > 0.$

9.072. $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0.$

9.073. $a^4 + a^3 - a - 1 < 0.$

9.074. $m^3 + m^2 - m - 1 > 0.$

9.075. $\log_2(1+\log_{1/9} x - \log_9 x) < 1.$

9.076. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2.$

9.077. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$

9.078. $0,3^{2x^2-3x+6} < 0,00243.$

9.079. $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0.$

9.080. $\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} < 0.$

9.081. $\log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < \log_{1,2} 5.$

9.082. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1.$

9.083. $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}.$

9.084. $\log_x(\log_9(3^x-9)) < 1.$

9.085. $0,2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25.$

9.086. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}.$

9.087. $|3-\log_2 x| < 2.$

9.088. $5 \cdot 0,2^{\lg x} > 0,04^{\lg 2}.$

9.089. $\log_2 \log_{1/3} \log_5 x > 0.$

9.090. $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11.$

9.091. $0,5^x \leqslant 0,25^{x^2}.$

9.092. $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5} x-2\leqslant 0$. **9.093.** $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}}<1$.

9.094. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{1/3} x<6$.

9.095. $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$.

B grupė

9.096. Įrodykite, kad trijų teigiamųjų skaičių sumos ir atvirkštinių skaičių sumos sandauga yra ne mažesnė už 9.

9.097. Jeigu a — bet kuris realusis skaičius, tai teisinga nelygybė $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}\geqslant 2$. Įrodykite.

9.098. Raskite visas p reikšmes, su kuriomis reiškinys

$$\lg((p-1)x^2+2px+3p-2)$$

yra apibrėžtas, kai x įgyja bet kurią reikšmę.

9.099. Raskite visas a reikšmes, su kuriomis reiškinys

$$\sqrt{(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3}$$

turi prasmę, kai $x\in \boldsymbol{R}$.

9.100. Raskite aibę sveikųjų x reikšmių, tenkinančių nelygybę

$$4^{2+\sqrt{x-1}}+3\cdot 2^{2+\sqrt{x-1}}-16<15\cdot 4^{\sqrt{x-1}}+2^{3+\sqrt{x-1}}+5\cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}.$$

9.101. Su kuriomis p reikšmėmis kvadratinio trinario $x^2+2(p+1)x+9p-5$ abi šaknys yra neigiamos?

9.102. Su kuriomis n reikšmėmis lygties $(n-2)x^2-2nx+n+3=0$ abi šaknys yra teigiamos?

9.103. Su kuriomis m reikšmėmis lygties $4x^2-(3m+1)x-m-2=0$ šaknys yra intervale tarp -1 ir 2?

9.104. Kokios turi būti a reikšmės, kad kvadratinis trinaris $ax^2-7x+4a$ įgytų neigiamas reikšmes su visomis realiosiomis x reikšmėmis?

9.105. Raskite sveikuosius skaičius x, tenkinančius nelygybę $\left|\frac{2}{x-13}\right|>\frac{8}{9}$.

9.106. Jeigu $2y+5x=10$, tai nelygybė $3xy-x^2-y^2<7$ yra teisinga. Įrodykite.

9.107. Jeigu $4b+a=1$, tai nelygybė $a^2+4b^2\geqslant \frac{1}{5}$ yra teisinga. Įrodykite.

9.108. Įrodykite, kad su visomis realiosiomis m reikšmėmis daugianaris $m^6-m^5+m^4+m^2-m+1$ įgyja teigiamas reikšmes.

9.109. Nustatykite funkcijos $f(x)=\sqrt[6]{4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4}$ apibrėžimo sritį.

9.110. Nustatykite funkcijos $f(x)=\sqrt{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}$ apibrėžimo sritį.

9.111. Raskite sveikąsias neneigiamas a reikšmes, tenkinančias nelygybę $\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}$.

9.112. Kokios turi būti a reikšmės, kad nelygybė $\frac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ būtų teisinga su visais $x\in \boldsymbol{R}$?

9.113. Nustatykite funkcijos $f(x)=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)+4}$ apibrėžimo sritį.

9.114. Su kuriomis x reikšmėmis apibrėžtas reiškinys $\log_3(1-\log_{0,5}(x^2-2x-2{,}5))$?

9.115. Kokios turi būti m reikšmės, kad nelygybė

$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$$

būtų teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis?

9.116. Su kuriomis x reikšmėmis skirtumas $\frac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x$ įgyja tik neigiamas reikšmes?

9.117. Kokios turi būti m reikšmės, kad nelygybė $\frac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$ būtų teisinga su bet kuriomis x reikšmėmis?

9.118. Kokios turi būti m reikšmės, kad nelygybė $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$ būtų teisinga su bet kuriomis x reikšmėmis?

9.119. Su kuriomis a reikšmėmis suma $a+\frac{-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10}$ įgyja tik teigiamas reikšmes?

9.120. Raskite sveikąsias x reikšmes, tenkinančias nelygybę $\log_4 x+\log_2(\sqrt{x}-1)<\log_2\log_{\sqrt{5}}5$.

9.121. Įrodykite, kad su visomis realiosiomis x reikšmėmis funkcija $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ įgyja reikšmes, ne mažesnes už $\frac{1}{2}$ ir ne didesnes už $\frac{3}{2}$.

Raskite funkcijų apibrėžimo sritį (**9.122—9.129**):

9.122. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$ **9.123.** $y=\frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}$.

9.124. $y=\log_3\left(0{,}64^{2-\log_{\sqrt{2}}x}-1{,}25^{8-(\log_2 x)^2}\right)$.

9.125. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\log_3|x-3|}$.

9.126. $y=\sqrt{\log^2_{\frac{1}{2}}(x-3)-1}$. **9.127.** $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

9.128. $y=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0{,}5}-1\right)+\frac{1}{\log_3(2x-6)}$.

9.129. $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}+\frac{1}{\log_8(x-4)}$.

Išspręskite nelygybes (**9.130—9.205**):

9.130. $\left|\frac{3x+1}{x-1}\right|<3$. **9.131.** $\log_{|x-1|}0{,}5>0{,}5$.

9.132. $\log_x\frac{3x-1}{x^2+1}>0$. **9.133.** $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$.

9.134. $0{,}5^{\sqrt{3}}<0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}}<0{,}5$.

9.135. a) $\frac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$; b) $\log_2\log_4 x+\log_4\log_2 x\leqslant -4$.

9.136. $\left(\frac{x^2}{8}+\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)\left(1-x-\frac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0$.

9.137. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{8}\right)^2+9\log_2\frac{32}{x^2}\ \ldots\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2$.

9.138. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 2$. **9.139.** $\frac{m^2x+1}{2}-\frac{m^2x+3}{3}<\frac{m+9x}{6}$.

9.140. $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

9.141. $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$. **9.142.** $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

9.143. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

9.144. $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$. **9.145.** $\sqrt{3}\cos^{-2}x<4\operatorname{tg}x$.

9.146. $\sin 4x+\cos 4x\operatorname{ctg}2x>1$.

9.147. $2+\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x<0$. **9.148.** $\frac{x^4+3x^3+4x^2-8}{x^2}<0$.

9.149. $\frac{3}{6x^2-x-12}<\frac{25x-47}{10x-15}-\frac{3}{3x+4}$.

9.150. $\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$. **9.151.** $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

9.152. $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$. **9.153.** $\log_{4/3}\left(\sqrt{x+3}-x\right)>0$.

9.154. $\frac{2-x}{x^3+x^2}>\frac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

9.155. $0{,}2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}}>\sqrt[3]{0{,}008^{2\log_4 x-1}}$.

9.156. $2{,}25^{\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{1/2}(x^2+4x+4)}$.

9.157. $\log_{0,5}(x+3)<\log_{0,25}(x+15)$.

9.158. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$.

9.159. $2\log_3\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}\log_3(9\sqrt[3]{x})\geqslant 1$.

9.160. $0{,}008^x+5^{1+3x}+0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)}<30{,}04$.

9.161. $0{,}4^{\log_3\frac{3}{x}\log_3 3x}>6{,}25^{\log_3 x^2+2}$.

9.162. $0{,}3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots}<\sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}}<1$.

9.163. $\frac{\lg 7-\lg(-8x-x^2)}{\lg(x+3)}>0$.

9.164. $\log_3\log_4\frac{4x-1}{x+1}-\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{4}}\frac{x+1}{4x-1}<0$.

9.165. $2^{\log^2_{0,5}x}+x^{\log_{0,5}x}>2{,}5$.

9.166. $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$.

9.167. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leqslant\frac{1-2x}{x^3+1}$.

9.168. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$.

9.169. $\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6}\leqslant\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

9.170. $\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}\geqslant\frac{5(6-x)}{x-2}$.

9.171. $0{,}6^{\lg^2(-x)+3}\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^{2\lg x^2}$.

9.172. $(x-3)\sqrt{x^2+4}\leqslant x^2-9$.

9.173. $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2}\leqslant\left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36}<\left(\frac{3}{5}\right)^{12x^2}$.

9.174. $|x-3|^{2x^2-7x}>1$.

9.175. $\log_{1/5} x+\log_4 x>1$.

9.176. $-9<x^4-10x^2<56$.

9.177. $216x^6+19x^3<1$.

9.178. $x^{0,5 \log_{0,5} x-3} \geqslant 0,5^{3-2,5 \log_{0,5} x}$.

9.179. $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

9.180. $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0$.

9.181. $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4}<0$.

9.182. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

9.183. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9>0$.

9.184. $\log_{0,25}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$.

9.185. $x^2(x^4+36)-6\sqrt{3}(x^4+4)<0$.

9.186. $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}<0$.

9.187. $2 \log_{\log_2 x} 3<1$.

9.188. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4}>0$.

9.189. $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5>1$.

9.190. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}>0$.

9.191. $2 \cos x(\cos x-\sqrt{8} \operatorname{tg} x)<5$.

9.192. $\sqrt{x^3+3x+4}>-2$.

9.193. $\log_2^2 (x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)>5$.

9.194. $25 \cdot 2^x-10^x+5^x>25$.

9.195. $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4>0$.

9.196. $0,5^{2\sqrt{x}}+2>3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}$.

9.197. $x^2(x+3\sqrt{5})+5(3x+\sqrt{5})>0$.

9.198. $9^{\log_2(x-1)-1}-8 \cdot 5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-16 \cdot 5^{\log_2(x-1)-1}$.

9.199. $\frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\frac{1}{2}$.

9.200. $\frac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)}<\frac{1}{2}$.

9.201. $\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$.

9.202. $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17$.

9.203. $5^{\log_{\frac{2}{5}} x}+x^{\log_5 x}<10$.

9.204. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1$.

9.205. $(x^2+4x+10)^2-7(x^2+4x+11)+7<0$.

9.206. Parašykite didėjimo tvarka tris skaičius: $a_1=\log_{1/2} \sin 2x$, $a_2=-1-\log_2 \sin x$, $a_3=\log_{1/2}(1-\cos 2x)$, kai $0<x<\frac{\pi}{4}$.

Išspręskite nelygybių sistemas (**9.207—9.214**):

9.207. $\begin{cases} 0,2^{\cos x} \leqslant 1, \\ \frac{x-1}{2-x}+\frac{1}{2}>0. \end{cases}$

9.208. $\sqrt{x^2-9x+20} \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2-13}$.

9.209. $\begin{cases} \frac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0, \\ \lg \sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2 \lg 2. \end{cases}$

9.210. $\frac{5x-7}{x-5}<4-\frac{x}{5-x}+\frac{3x}{x^2-25}<4$.

9.211. $\begin{cases} \sqrt{4x-7}<x, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4. \end{cases}$

9.212. $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{8}{9}\right)^{-x}>\frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}. \end{cases}$

9.213. $\begin{cases} |x^2+5x|<6, \\ |x+1| \leqslant 1. \end{cases}$

9.214. $\begin{cases} |x^2-4x|<5, \\ |x+1|<3. \end{cases}$

9.215. Raskite funkcijos

$$y=\sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\frac{2}{x^2-49}$$

apibrėžimo sritį.

C grupė

Išspręskite nelygybes (**9.216—9.220**):

9.216. $\log_5 x+\log_x \frac{x}{3}<\frac{\log_5 x(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

9.217. $\frac{\sin x-2}{4 \sin^2 x-1}>2$.

9.218. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x+1}<3$.

9.219. $\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$.

9.220. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

9.221. Įrodykite, kad iš stačiakampių gretasienių, kurių visų briaunų suma yra vienoda, kubo tūris yra didžiausias. (Įrodant galima remtis, pavyzdžiui,

nelygybė $\frac{a+b+c+d}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, kuri teisinga su visais teigiamaisiais skaičiais.)

9.222. Kokios turi būti p reikšmės, kad nelygybių sistema

$$-9<\frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1}<6$$

būtų teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis?

9.223. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2+\lg(2^{x+1}+1)<\lg(7\cdot 2^x+12), \\ \log_x(x+2)>2. \end{cases}$$

9.224. Raskite funkcijos

$$y=\sqrt{\sin x-0{,}5}+\log_3(25-x^2)$$

apibrėžimo sritį.

9.225. Įrodykite: kai $a>0$, $b>0$, $c>0$ ir $d>0$, yra teisinga nelygybė

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

9.226. Kokios turi būti m reikšmės, kad nelygybė

$$-6<\frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1}<4$$

būtų teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis?

Įrodykite, kad šios nelygybės yra teisingos **(9.227—9.230):**

9.227. $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\geqslant 8$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

9.228. $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ $(a>0,\ b>0)$.

9.229. $\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

9.230. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2$.

9.231. Nesinaudodami lentelėmis, įrodykite, kad $2<\log_3 2+\log_2 3<3$.

9.232. Sakykime, skaičius $x_1>0$ yra lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknis. Įrodykite, kad egzistuoja tokia lygties $cx^2+bx+a=0$ šaknis x_2, su kuria $x_1+x_2\geqslant 2$.

9.233. Jeigu $(x^2+5x+6)(x^2+11x+30)<0$, tai $\sin 2x>0$. Įrodykite.

9.234. Nurodykite tas x reikšmes, tenkinančias nelygybę $\log_{1,3}(2x-2)<\log_{1,3}(x+1)$, su kuriomis $\sin 2x<0$.

9.235. Skaičiai x_1 ir x_2 yra atitinkamai lygčių $5x^3-6=0$ ir $6x^3-5=0$ realiosios šaknys. Įrodykite, kad $x_1+x_2>2$.

Išspręskite nelygybes **(9.236—9.290):**

9.236. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}} 2>0$.

9.237. $\log_x \log_2(4^x-12)\leqslant 1$.

9.238. $10\cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x)}}>3$.

9.239. $2<2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2}<8$.

9.240. $3^{\frac{2\cos^2 x-6}{2\cos^2 x-1}}>3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2 x}}$.

9.241. $0{,}2^{\cos 2x}-\frac{1}{25^{\cos^2 x}}<4\cdot 125^{-1/2}$.

9.242. $\log_x \log_3(9^x-6)\geqslant 1$.

9.243. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2+4x-4)}<1$ $(x\in \boldsymbol{Z})$.

9.244. $\sqrt{1-9(\log_{1/8} x)^2}>1-4\log_{1/8} x$.

9.245. $\log_{1/2} x+\sqrt{1-4(\log_{1/2} x)^2}<1$.

9.246. $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

9.247. $\log_3(4^x+1)+\log_{(4^x+1)} 3>2{,}5$.

9.248. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{1/3}(3^{x+2}-9)>-3$.

9.249. $\log_p \frac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x}<0$.

9.250. $|x^3-1|>1-x$.

9.251. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x$.

9.252. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1} x>2$.

9.253. $\log_x(x+1)<\log_{1/x}(2-x)$.

9.254. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5}>0$.

9.255. $\log_x(x^2+3x-3)>1$.

9.256. $|x-1|+|2-x|>3+x$.

9.257. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\frac{1}{x}$.

9.258. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

9.259. $\sqrt{4-4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$.

9.260. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$.

9.261. $\log_{1/2}\frac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2}\leqslant 0$.

9.262. $\log_{x^2}\frac{2x}{|x-3|}\leqslant\frac{1}{2}$.

9.263. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}>1$.

9.264. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)-1}}>1$.

9.265. $1<3^{|x^2-x|}<9$.

9.266. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}}>25$.

9.267. $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$.

9.268. $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1$.

9.269. $\frac{1}{\log_{1/2}\sqrt{x+3}}\leqslant\frac{1}{\log_{1/2}(x+1)}$.

9.270. $\log_x \frac{3}{8-2x}\geqslant -2$.

9.271. $\log_{1/2}(x-3)-\log_{1/2}(x+3)-\log_{\frac{x+2}{x-3}} 2>0$.

9.272. $|2^{4x^2-1}-5|\leqslant 3$.

9.273. $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\geqslant 9^{\sqrt{x}}$.

9.274. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\geqslant (x^2+x+1)^3$.

9.275. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$.

9.276. $\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x$.

9.277. $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+12^\circ\right)+\operatorname{tg}(x+12^\circ)>0$.

9.278. $\left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|}<\left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$

9.279. $\log_x 10-0{,}5\log_a 10>0\quad (0<a<1)$.

9.280. $\log_7 x-\log_3 7\cdot\log_3 x>\log_2 0{,}25$.

9.281. $x^{\log_a x+4}<a^4x\quad (0<a<1)$.

9.282. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

9.283. $\log_x^2\sqrt{5}-\log_x 5\sqrt{5}+\frac{5}{4}<0$.

9.284. $|\log_3 x|<\left|\log_3\frac{x}{9}\right|$.

9.285*. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$.

9.286*. $\sin^3 x\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3 x\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)>\frac{3\sqrt{3}}{8}$

9.287*. $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$.

9.288*. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x>8\sqrt{3}$.

9.289*. $4\sin x\sin 2x\sin 3x>\sin 4x$.

9.290*. $\sin(2x+10^\circ)+\sin(x+10^\circ)-\sin x<0$.

9.291. Įrodykite, kad $\frac{1}{8}<\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 70^\circ<\frac{1}{4}$.

9.292*. Išspręskite nelygybę $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\geqslant 3\operatorname{tg} x$.

9.293. Įrodykite, kad $\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 45^\circ+\operatorname{tg} 50^\circ>3$.

9.294*. Jeigu $360^\circ k-45^\circ<\alpha<360^\circ k+45^\circ$ ir $k\in Z$, tai yra teisinga nelygybė $\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg} 45^\circ+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)\geqslant 3$. Įrodykite.

9.295*. Išspręskite nelygybę $3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x<\frac{1}{2}$.

9.296*. Išspręskite nelygybę $\frac{\cos x+2\cos^2 x+\cos 3x}{\cos x+2\cos^2 x-1}>1$.

9.297*. Išspręskite nelygybę $8\sin^4 x-8\sin^2 x+\sin x-1<0$.

9.298. Įrodykite, kad $2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\sqrt{2}+1$.

9.299. Įrodykite, kad $\frac{1}{8}<\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ<\frac{1}{4}$.

9.300. Išspręskite nelygybę $\log_{x^2-3} 729>3$.

9.301. Išspręskite nelygybę $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}>3$.

9.302. Raskite funkcijos

$$y=\sqrt{\log_{1/4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1}$$

apibrėžimo sritį.

9.303. Raskite aibę sveikųjų x reikšmių, tenkinančių nelygybę $\log_{0,3}(\sqrt{x+5}-x+1)>0$.

9.304. Raskite tokias x reikšmes, kad nelygybė $y^2-(5^x-1)(y-1)>0$ būtų teisinga su visomis y reikšmėmis.

9.305. Nelygybė $x^2-2^{a+2}\cdot x-2^{a+3}+12>0$ teisinga su visomis x reikšmėmis. Raskite a.

10 SKYRIUS
PLANIMETRIJOS UŽDAVINIAI

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

1⁰. P r a ž u l n u s i s   t r i k a m p i s (a, b, c — kraštinės; α, β, γ — prieš jas esantys kampai; p — pusperimetris; R — apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys; r — į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys; S — plotas; h_a — į kraštinę a nubrėžta aukštinė):

$$S=\frac{1}{2}ah_a; \quad (10.1) \qquad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha; \quad (10.2)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (10.3)$$

$$r=\frac{S}{p}; \quad (10.4) \qquad R=\frac{abc}{4S}; \quad (10.5)$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \text{ (kosinusų teorema)}; \qquad (10.6)$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \text{ (sinusų teorema)}. \qquad (10.7)$$

2⁰. S t a t u s i s   t r i k a m p i s (a, b — statiniai; c — įžambinė; a_c, b_c — statinių projekcijos įžambinėje):

$$S=\frac{1}{2}ab; \quad (10.8) \qquad S=\frac{1}{2}ch_c; \quad (10.9)$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}; \quad (10.10) \qquad R=\frac{c}{2}; \quad (10.11)$$

$$a^2+b^2=c^2 \text{ (Pitagoro teorema)}; \qquad (10.12)$$

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c}; \quad (10.13) \qquad \frac{a_c}{a}=\frac{a}{c}; \quad (10.14) \qquad \frac{b_c}{b}=\frac{b}{c}; \quad (10.15)$$

$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{ctg}\beta. \qquad (10.16)$$

3⁰. L y g i a k r a š t i s   t r i k a m p i s:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad (10.17) \qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad (10.18) \qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad (10.19)$$

4⁰. B e t   k o k s   i š k i l a s i s   k e t u r k a m p i s (d_1 ir d_2 — įstrižainės; φ — kampas tarp jų; S — plotas):

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi. \qquad (10.20)$$

5⁰. L y g i a g r e t a i n i s (a ir b — gretimos kraštinės; α — kampas tarp jų; h_a — aukštinė, nubrėžta į kraštinę a):

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi. \qquad (10.21)$$

6⁰. R o m b a s:

$$S=ah_a=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2. \qquad (10.22)$$

7⁰. S t a č i a k a m p i s:

$$S=ab=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi. \qquad (10.23)$$

8⁰. K v a d r a t a s (d — įstrižainė):

$$S=a^2=\frac{d^2}{2}. \qquad (10.24)$$

9⁰. T r a p e c i j a (a ir b — pagrindai; h — atstumas tarp jų; l — vidurinė linija):

$$l=\frac{a+b}{2}; \quad (10.25) \qquad S=\frac{a+b}{2}\cdot h=lh. \quad (10.26)$$

10⁰. A p i b r ė ž t i n i s   d a u g i a k a m p i s (p — pusperimetris; r — įbrėžtinio apskritimo spindulys):

$$S=pr. \qquad (10.27)$$

11⁰. T a i s y k l i n g a s i s   d a u g i a k a m p i s (a_n — taisyklingojo n-kampio kraštinė; R — apibrėžtinio apskritimo spindulys; r — įbrėžtinio apskritimo spindulys:

$$a_3=R\sqrt{3}; \qquad a_4=R\sqrt{2}; \qquad a_6=R; \qquad (10.28)$$

$$S=\frac{na_nr}{2}. \qquad (10.29)$$

12⁰. A p s k r i t i m a s, s k r i t u l y s (r — spindulys; C — apskritimo ilgis; S — skritulio plotas):

$$C=2\pi r; \quad (10.30) \qquad S=\pi r^2. \quad (10.31)$$

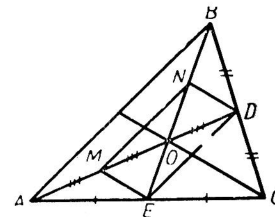
13⁰. I š p j o v a (l — išpjovą ribojančio lanko ilgis; n^0 — centrinio kampo laipsninis matas; α — centrinio kampo radianinis matas):

$$l=\frac{\pi rn^0}{180^\circ}=r\alpha; \quad (10.32) \qquad S=\frac{\pi r^2n^0}{360^\circ}=\frac{1}{2}r^2\alpha. \quad (10.33)$$

KITOS FIGŪRŲ ELEMENTŲ SĄSAJOS

1⁰. Trys trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, kuris dalija kiekvieną pusiaukraštinę santykiu 2 : 1 skaičiuojant nuo trikampio viršūnės.

☐ Sakykime, pusiaukraštinės AD ir BE susikerta taške O (10.1 pav.). Nubraižykime keturkampį $MNDE$; čia M ir N — atkarpų AO ir BO vidurio taškai. Tada $MN \parallel AB$ ir $MN=\frac{1}{2}AB$ kaip trikampio AOB vidurinė linija; $ED \parallel AB$ ir $ED=\frac{1}{2}AB$ kaip trikampio ABC vidurinė linija. Todėl $MN \parallel ED$ ir $MN=ED$, t. y. figūra $MNDE$ — lygiagretainis, kurio įstrižainės MD ir NE. Vadinasi, $MO=OD$; kadangi $MO=AM$, tai $AM=MO=OD$. Taigi taškas O dalija pusiaukraštinę AD santykiu $OA:OD=2:1$. Tokiu pačiu santykiu šis taškas dalija ir pusiaukraštinę BE.



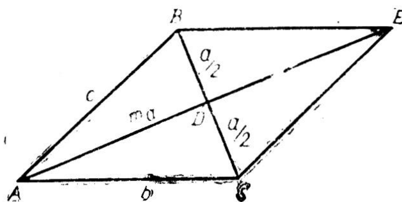
10.1 pav.

Tuo pačiu santykiu turi dalyti ir trečiąją pusiaukraštinę jos susikirtimo su pirmąja bei antrąja pusiaukraštine taškas. Be to, trečioji pusiaukraštinė negali kirsti pirmųjų dviejų taškuose, kurie skiriasi nuo taško O, nes tada kiekvienoje pusiaukraštinėje būtų du skirtingi taškai, kurie dalytų ją santykiu 2 : 1 skaičiuojant nuo viršūnės. Tačiau tai neįmanoma. ■

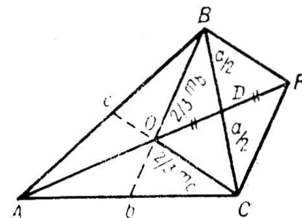
2⁰. Trikampio pusiaukraštinės ilgis išreiškiamas formule

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2};$$

čia a, b, c — trikampio kraštinių ilgiai.



10.2 pav.



10.3 pav.

□ Pratęskime pusiaukraštinę AD (10.2 pav.) taip, kad $DE=AD$, ir nubrėžkime atkarpas BE ir EC. Gauto keturkampio $ABEC$ įstrižainių $AE=2m_a$ ir $BC=a$ susikirtimo taškas D dalija kiekvieną jų pusiau; vadinasi, $ABEC$ yra lygiagretainis. Dabar pritaikykime tokią teoremą: lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma lygi jo kraštinių ilgių kvadratų sumai. Sudarę lygtį ir išsprendę ją m_a atžvilgiu, gauname ieškomąjį sąryšį. ■

3⁰. Trikampio kraštinės ilgis išreiškiamas formule

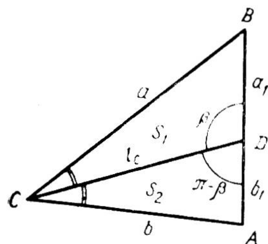
$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}\ ;$$

čia m_a, m_b, m_c — trikampio pusiaukraštinių ilgiai.

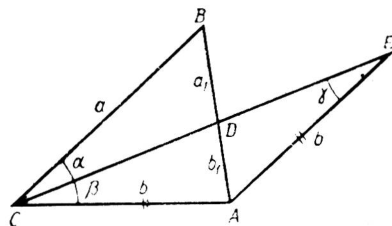
□ Pusiaukraštinėje AD pažymėkime trikampio pusiaukraštinių susikirtimo tašką O (10.3 pav.); pagal 1⁰ savybę jis dalija AD santykiu $AO:OD=2:1$. Pratęskime OD taip, kad $DF=OD=\frac{1}{3}m_a$, ir tašką F sujunkime su B ir C.

Dabar sudarykime lygtį, siejančią lygiagretainio $OBFC$ kraštinių $BO=\frac{2}{3}m_b$, $CO=\frac{2}{3}m_c$ ilgius ir įstrižainių $OF=\frac{2}{3}m_a$, $BC=a$ ilgius. Išsprendę ją a atžvilgiu, gauname ieškomąjį sąryšį. ■

4⁰. Pusiaukampinė dalija trikampio kraštinę į atkarpas, proporcingas kitoms dviem jo kraštinėms.



10.4 pav.



10.5 pav.

□ I būdas. Sakykime, CD — trikampio ABC pusiaukampinė (10.4 pav.). Trikampiai BDC ir ADC, kurių pagrindai a_1 ir b_1, turi bendrą aukštinę. Jų plotą pažymėkime atitinkamai S_1 ir S_2; tada $S_1:S_2=a_1:b_1$. Antra vertus, pagal (10.2) formulę $S_1=\frac{1}{2}a\cdot CD\sin\frac{C}{2}$, $S_2=\frac{1}{2}b\cdot CD\sin\frac{C}{2}$; iš čia $S_1:S_2=a:b$. Palyginę gautas proporcijas, darome išvadą, kad $a_1:b_1=a:b$.

II būdas. Sakykime, $\angle BDC=\beta$ (10.4 pav.); tada $\angle ADC=\pi-\beta$. Pagal sinusų teoremą (10.7) $a_1:a=\sin\frac{C}{2}:\sin\beta$ (iš $\triangle BCD$) ir $b_1:b=\sin\frac{C}{2}:\sin(\pi-\beta)=\sin\frac{C}{2}:\sin\beta$ (iš $\triangle ACD$). Palyginę šias proporcijas, darome išvadą, kad $a_1:a=b_1:b$; iš čia $a_1:b_1=a:b$.

III būdas. Pusiaukampinę CD pratęskime, kol ji taške E susikirs su tiese $AE\parallel CB$ (10.5 pav.). Pagal sąlygą $\angle\alpha=\angle\beta$ ir $\angle\alpha=\angle\gamma$ (kampai tarp lygiagrečių tiesių CB ir AE bei kirstinės CE). Sugretinę šias lygybes, gauname: $\angle\beta=\angle\gamma$. Vadinasi, $\triangle ACE$ — lygiašonis ir $AE=AC=b$; $\triangle AED\sim\triangle BCD$ (nes kampai lygūs); iš čia $a_1:b_1=a:b$. ■

5⁰. Trikampio pusiaukampinės ilgis išreiškiamas formule

$$l_c=\sqrt{ab-a_1b_1};$$

čia a ir b — trikampio ABC dviejų kraštinių ilgiai; a_1 ir b_1 — trečiosios kraštinės atkarpos (10.4 pav.).

□ Pritaikę kosinusų teoremą (10.6) trikampiams, kurių kampai BCD ir ACD lygūs, sudarome lygtį

$$\frac{l_c^2+a^2-a_1^2}{2al_c}=\frac{l_c^2+b^2-b_1^2}{2bl_c}\ ;$$

iš čia

$b(l_c^2+a^2-a_1^2)=a(l_c^2+b^2-b_1^2)$, arba $l_c^2(b-a)-ab(b-a)=(a_1b)a_1-(ab_1)b_1$.

Remdamiesi lygybe $ab_1=a_1b$ (išplaukiančia iš 4⁰ savybės), gauname:

$$(b-a)(l_c^2-ab)=ab_1a_1-a_1bb_1,\ \text{arba}\ (b-a)(l_c^2-ab)=-a_1b_1(b-a).$$

Laikydami, jog $b\neq a$, padalykime paskutiniosios lygybės abi puses iš $b-a$. Gausime: $l_c^2=ab-a_1b_1$. ■

6⁰. Trikampio pusiaukampinės ilgis išreiškiamas jo kraštinių ilgiais a, b ir c pagal formulę

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}\ .$$

□ 5⁰ punkte pateiktą sąsają užrašykime taip: $l_c^2=ab-a_1(c-a_1)$. Pritaikę 4⁰ savybę, gauname: $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{c-a_1}$, t. y. $a_1=\frac{ac}{a+b}$. Iš čia randame: $l_c^2=ab-\frac{ac}{a+b}\left(c-\frac{ac}{a+b}\right)$ir l_c reikšmę. ■

7⁰. Kiekvieno trikampio aukštinių h_a, h_b, h_c ir įbrėžtinio apskritimo spindulio r priklausomybė išreiškiama formule

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}\ .$$

□ Taikydami (10.4) ir (10.1) formules, užrašome: $S=rp$, $2S=ah_a=bh_b=ch_c$. Iš čia

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{1}{S}=p\cdot\frac{1}{S}=\frac{1}{r}\ .\ ■$$

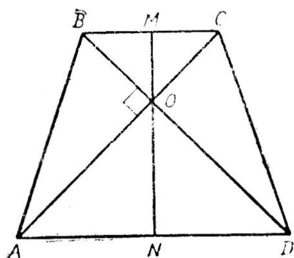
8⁰. Lygiašonės trapecijos, kurios įstrižainės statmenos viena kitai, plotas S lygus jos aukštinės kvadratui, t. y. $S=h^2$.

□ Lygiašonės trapecijos simetrijos ašis yra į trapecijos pagrindus nubrėžtas statmuo MN, einantis per įstrižainių susikirtimo tašką O (10.6 pav.). Kadangi $\angle AOD=90°$, tai $AD=2ON$ ir $BC=2OM$. Vadinasi,

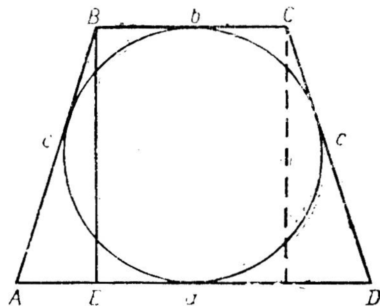
$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot MN=(ON+OM)MN=MN^2=h^2.\ ■$$

9⁰. Lygiašonės trapecijos, į kurią galima įbrėžti apskritimą, aukštinė lygi pagrindų geometriniam vidurkiui.

12. Užsak. Nr. 1941.



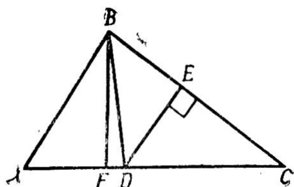
10.6 pav.



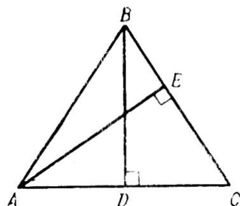
10.7 pav.

☐ Kadangi apie apskritimą apibrėžto keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai $a+b=2c$ (10.7 pav.); iš čia $AB=\frac{a+b}{2}$. $AE=$ $=\frac{a-b}{2}$, ir iš stačiojo trikampio ABE randame: $BE^2=AB^2-AE^2$, t. y. $h^2=$ $=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$ ■

1 pavyzdys. Trikampio ABC plotas lygus 30 cm². Kraštinėje AC pasirinktas taškas D, kuris ją dalija santykiu $AD:DC=2:3$. Į kraštinę BC nuleisto statmens DE ilgis lygus 9 cm. Raskite BC.



10.8 pav.



10.9 pav.

△ Nubrėžkime BD (10.8 pav.). Trikampiai ABD ir BDC turi bendrą aukštinę BF; vadinasi, jų plotų santykis lygus pagrindų ilgių santykiui, t. y. $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BDC}=AD:DC=2:3$. Iš čia $S_{\triangle BDC}=\frac{3}{5}S_{\triangle ABC}=18$ cm². Antra vertus, pagal (10.1) formulę $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC\cdot DE$, arba $18=\frac{1}{2}BC\cdot 9$; iš čia $BC=4$ cm. ▲

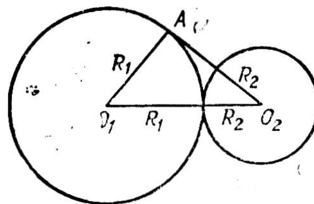
2 pavyzdys. Lygiašonio trikampio aukštinės, nubrėžtos į pagrindą ir į šoninę kraštinę, lygios atitinkamai 10 cm ir 12 cm. Apskaičiuokite pagrindo ilgį.

△ Trikampio ABC $AB=BC$, $BD\perp AC$, $AE\perp BC$, $BD=10$ cm ir $AE=$ $=12$ cm (10.9 apv.). Sakykime, $AC=x$, $AB=BC=y$. Statieji trikampiai AEC ir BDC yra panašūs (kampas C — bendras); vadinasi, $BC:AC=BD:AE$, arba $y:x=10:12=5:6$. Trikampiui BDC pritaikę Pitagoro teoremą (10.12), gauname: $BC^2=BD^2+DC^2$, t. y. $y^2=100+\frac{x^2}{4}$. Išsprendę lygčių sistemą

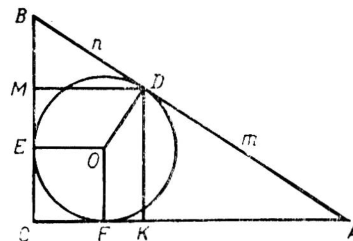
$$\begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ y^2=100+\frac{x^2}{4}, \end{cases}$$ randame: $x=15$. Taigi $AC=15$ cm. ▲

3 pavyzdys. Du apskritimai liečiasi iš išorės. Pirmojo apskritimo liestinė eina per antrojo centrą. Atstumas nuo lietimosi taško iki antrojo apskritimo centro lygus trigubam to apskritimo spinduliui. Kiek kartų pirmojo apskritimo ilgis didesnis už antrojo?

△ Sakykime, O_1 ir O_2 — apskritimų centrai, A — lietimosi taškas (10.10 pav.). Tada $O_1A=R_1$, $O_1O_2=R_1+R_2$, $O_2A=3R_2$ (pagal sąlygą). Reikia rasti santykį $2\pi R_1:2\pi R_2=R_1:R_2$. Stačiojo trikampio O_1AO_2 ($\angle A=90°$) $O_1O_2^2=$ $=O_1A^2+O_2A^2$, arba $(R_1+R_2)^2=R_1^2+(3R_2)^2$. Suprastinę šią lygybę, gauname: $R_1=4R_2$; iš čia $R_1:R_2=4$. ▲



10.10 pav.



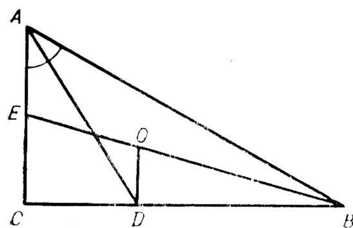
10.11 pav.

4 pavyzdys. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo lietimosi taškas dalija įžambinę į m ir n ilgio atkarpas. Įrodykite, kad trikampio plotas $S=mn$. Raskite į šį trikampį įbrėžto stačiakampio plotą, žinodami, kad viena jo viršūnė sutampa su stačiojo kampo viršūne, o priešinga viršūnė — su apskritimo ir įžambinės lietimosi tašku.

△ Sakykime, D, E, F — lietimosi taškai (10.11 pav.); tada $AD=AF=m$, $BD=BE=n$, $CE=CF=OD=r$ — įbrėžtinio apskritimo spindulys, $p=r+m+$ $+n$ — pusperimetris. Remdamiesi (10.8) formule, randame: $S=\frac{(r+m)(r+n)}{2}$, arba $2S=r^2+r(m+n)+mn=r(r+m+n)+mn=rp+mn$. Kadangi pagal (10.4) lygybę $rp=S$, tai $2S=S+mn$; iš čia $S=mn$.

Sakykime, $CMDK$ — įbrėžtinis keturkampis. Kadangi $DK\parallel BC$, tai, pritaikę homotetiją, kurios centras A ir koeficientas $k=\frac{m}{m+n}$, randame trikampio ADK plotą S_1: $S_1=S_{\triangle ABC}\cdot\frac{m^2}{(m+n)^2}=\frac{m^3n}{(m+n)^2}$. Analogiškai trikampio BDM plotas $S_2=S_{\triangle ABC}\cdot\frac{n^2}{(m+n)^2}=\frac{mn^3}{(m+n)^2}$. Ieškomasis plotas $S_{CMDK}=$ $=mn-\frac{m^3n+mn^3}{(m+n)^2}=\frac{2m^2n^2}{(m+n)^2}$. ▲

5 pavyzdys. Nubrėžta stačiojo trikampio smailiojo kampo pusiaukampinė; atkarpa, jungianti jos pagrindą su pusiaukraštinių susikirtimo tašku, statmena statiniui. Raskite trikampio kampus.



10.12 pav.

△ Sakykime, BE — pusiaukraštinė, O — pusiaukraštinių susikirtimo taškas, AD — pusiaukampinė ir $OD \perp BC$ (10.12 pav.). Pagal pusiaukraštinių susikirtimo taško savybę $EO : OB = 1 : 2$. Kadangi $OD \parallel EC$, tai pagal Talio teoremą $CD : DB = EO : OB = 1 : 2$. Pritaikę trikampio pusiaukampinės savybę, gauname: $CD : DB = AC : AB$, t. y. $AC : AB = 1 : 2$. Vadinasi, $\sin B = \frac{1}{2}$; iš čia $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$. ▲

A grupė

10.001. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo lietimosi taškas dalija įžambinę į 5 cm ir 12 cm ilgio atkarpas. Raskite trikampio statinius.

10.002. Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 20 cm ir 12 cm. Apie trapeciją apibrėžto apskritimo centras priklauso ilgesniajam jos pagrindui. Apskaičiuokite trapecijos įstrižainę ir šoninę kraštinę.

10.003. Lygiašonės trapecijos pagrindas $a = 21$ cm, pagrindas $b = 9$ cm ir aukštinė $h = 8$ cm. Apskaičiuokite apibrėžtinio skritulio spindulį.

10.004. Rombo aukštinė, nubrėžta iš bukojo kampo viršūnės, dalija jo kraštinę į m ir n ilgio atkarpas. Raskite rombo įstrižaines.

10.005. Į statųjį trikampį, kurio statiniai a ir b, įbrėžtas kvadratas, turintis su trikampiu bendrą statųjį kampą. Raskite kvadrato perimetrą.

10.006. Du apskritimai, kurių spinduliai $R = 3$ cm ir $r = 1$ cm, liečiasi iš išorės. Apskaičiuokite atstumus nuo apskritimų lietimosi taško iki jų bendrų liestinių.

10.007. Apie apskritimą, kurio skersmuo 15 cm, apibrėžta lygiašonė trapecija. Jos šoninė kraštinė lygi 17 cm. Apskaičiuokite trapecijos pagrindus.

10.008. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė 4 cm, o jos pusiaukraštinė 3 cm. Apskaičiuokite trikampio pagrindą.

10.009. Lygiašonio trikampio pagrindas 16 cm, o šoninė kraštinė 10 cm. Apskaičiuokite įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulius bei atstumą tarp tų apskritimų centrų.

10.010. Taisyklingojo trikampio kiekviena kraštinė padalyta santykiu 1 : 2 ir atitinkami dalijimo taškai, skaičiuojant viena kryptimi, sujungti tarpusavyje. Į susidariusį taisyklingąjį trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys $r = 6$ cm. Apskaičiuokite trikampių kraštines.

10.011. Lygiašonio trikampio pagrindas $4\sqrt{2}$ cm, o šoninės kraštinės pusiaukraštinė 5 cm. Apskaičiuokite šoninių kraštinių ilgį.

10.012. Iš taško A, nepriklausančio apskritimui, nubrėžta apskritimo liestinė ir kirstinė. Atstumas nuo taško A iki lietimosi taško 16 cm, o iki vieno iš kirstinės susikirtimo su apskritimu taškų 32 cm. Kirstinė nuo apskritimo centro nutolusi per 5 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.013. Trikampio kraštinės lygios 12 cm, 15 cm ir 18 cm. Apskritimas liečia abi trumpesnes kraštines, o jo centras priklauso ilgiausiai kraštinei. Raskite atkarpas, į kurias apskritimo centras dalija ilgiausią trikampio kraštinę.

10.014. Apskritimo styga lygi 10 cm. Per vieną jos galą nubrėžta liestinė, o per kitą — liestinei lygiagreti kirstinė. Vidinė kirstinės atkarpa yra 12 cm ilgio. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.015. Per apskritimo 120° lanko galus nubrėžtos liestinės ir į jų bei duotojo lanko ribojamą figūrą įbrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad jo ilgis lygus pradinio lanko ilgiui.

10.016. Į nuopjovą AOB, kurios spindulys R ir kampas lygus 90°, įbrėžtas apskritimas. Jis liečia atkarpas OA ir OB bei lanką AB. Raskite apskritimo spindulį.

10.017. Apskritimo spindulys 11 cm. Taškas P nuo apskritimo centro nutolęs per 7 cm. Per tą tašką nubrėžta 18 cm ilgio styga. Į kokio ilgio atkarpas taškas P dalija stygą?

10.018. Trikampio ABC kraštinė $BC = 8$ cm, o į kraštines AC ir BC nubrėžtos aukštinės lygios atitinkamai 6,4 cm ir 4 cm. Apskaičiuokite kraštinių AB ir AC ilgį.

10.019. Į apskritimą įbrėžto lygiakraščio trikampio plotas lygus Q^2. Įrodykite, kad apskritimo spindulys lygus $\frac{2Q\sqrt[4]{3}}{3}$.

10.020. Į dviejų lygių skritulių sankirtą įbrėžtas rombas, kurio įstrižainės 12 cm ir 6 cm. Apskaičiuokite apskritimų spindulius.

10.021. Pusiaukraštinė, nubrėžta į stačiojo trikampio įžambinę, lygi m ir dalija statųjį kampą santykiu 1 : 2. Raskite trikampio kraštines.

10.022. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į jo įžambinę, dalija statųjį kampą santykiu 1 : 2. Apskaičiuokite smailiuosius trikampio kampus.

10.023. Dvi kvadrato viršūnės priklauso apskritimui, kurio spindulys R, o kitos dvi — to apskritimo liestinei. Raskite kvadrato įstrižainės ilgį.

10.024. Trapecijos lygiagrečios kraštinės lygios 25 cm ir 4 cm, o nelygiagrečios — 20 cm ir 13 cm. Apskaičiuokite trapecijos aukštinę.

10.025. Dviejų apskritimų bendra styga yra į vieną jų įbrėžto kvadrato kraštinė ir į kitą įbrėžto šešiakampio kraštinė. Mažesnio apskritimo spindulys r. Raskite atstumą tarp apskritimų centrų (išnagrinėkite du galimus apskritimų padėties atvejus).

10.026. Iš šalia apskritimo esančio taško nubrėžta 12 cm ilgio kirstinė ir liestinė, kurios ilgis sudaro $\frac{2}{3}$ kirstinės vidinės atkarpos. Apskaičiuokite liestinės ilgį.

10.027. Kiekvienas iš trijų r spindulio apskritimų liečia kitus du. Tų apskritimų bendros išorinės liestinės sudaro trikampį. Apskaičiuokite jo plotą.

10.028. Lygiašonės trapecijos pagrindai a ir b, šoninė jos kraštinė c, o įstrižainė d. Įrodykite, kad $d^2=ab+c^2$.

10.029. Dviejų susikertančių apskritimų bendra styga a kartu yra į vieną tų apskritimų įbrėžto taisyklingojo trikampio kraštinė, o į kitą įbrėžto kvadrato kraštinė. Raskite atstumą tarp apskritimų centrų (išnagrinėkite du galimus atvejus).

10.030. Ant kvadrato kraštinių išorėje nubraižyti taisyklingieji trikampiai ir jų viršūnės nuosekliai sujungtos. Apskaičiuokite susidariusio keturkampio ir duotojo kvadrato perimetrų santykį.

10.031. Į rombą, kurio įstrižainė dalija jį į du lygiakraščius trikampius, įbrėžtas apskritimas. Jo spindulys lygus 2. Raskite rombo kraštinę.

10.032. Trikampio dvi kraštinės lygios 6 cm ir 3 cm. Į jas nubrėžtų aukštinių pussumė lygi trečiajai aukštinei. Apskaičiuokite trečiąją kraštinę.

10.033. Į lygiašonį trikampį, kurio pagrindas 12 cm ir aukštinė 8 cm, įbrėžtas apskritimas. Nubrėžta to apskritimo liestinė, lygiagreti pagrindui. Apskaičiuokite tarp trikampio kraštinių esančios liestinės atkarpos ilgį.

10.034. Iš vieno taško nubrėžtos dvi apskritimo liestinės. Kiekvienos jų ilgis 12 cm, o atstumas tarp lietimosi taškų 14,4 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.035. Iš taško A nubrėžtos dvi tiesės, kurios liečia apskritimą taškuose B ir C. Trikampis ABC — lygiakraštis, apskritimo spindulys R. Raskite trikampio plotą.

10.036. Į statųjį trikampį, kurio vienas kampas 60°, įbrėžtas rombas taip, kad 60° kampas yra bendras, o visos rombo viršūnės priklauso trikampio kraštinėms. Rombo kraštinė lygi 6 cm. Apskaičiuokite trikampio kraštines.

10.037. Duotas taisyklingasis trikampis ABC. Taškas K dalija kraštinę AC santykiu 2 : 1, o taškas M — kraštinę AB santykiu 1 : 2 (abiem atvejais skaičiuojama nuo viršūnės A). Įrodykite, kad atkarpos KM ilgis lygus apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spinduliui.

10.038. Lygiagretainio perimetras lygus 90 cm, o smailusis kampas 60°. Įstrižainė dalija bukąjį kampą santykiu 1 : 3. Apskaičiuokite lygiagretainio kraštines.

10.039. Per lygiašonės trapecijos šonines kraštines nubrėžtos tiesės susikerta stačiuoju kampu. Trapecijos plotas 12 cm², o aukštinė 2 cm. Apskaičiuokite trapecijos kraštines.

10.040. Į statųjį trikampį įbrėžtas pusapskritimis, kurio skersmuo yra įžambinėje, o centras dalija ją į 15 cm ir 20 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trikampio plotą ir įbrėžtinio pusapskritimio ilgį.

10.041. Lygiagretainio vienas kampas lygus 60°, o trumpesnioji įstrižainė $2\sqrt{31}$ cm. Statmuo, nubrėžtas iš įstrižainių susikirtimo taško į ilgesniąją kraštinę, lygus $\frac{\sqrt{75}}{2}$ cm. Apskaičiuokite lygiagretainio kraštines ir ilgesniąją įstrižainę.

10.042. Trapecijos vienas kampas lygus 30°, o tiesės, nubrėžtos per jos šonines kraštines, susikerta stačiuoju kampu. Trapecijos vidurinė linija lygi 10 cm, vienas iš pagrindų 8 cm. Apskaičiuokite trapecijos trumpesniosios šoninės kraštinės ilgį.

10.043. Į apskritimą, kurio skersmuo $\sqrt{12}$, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Jo aukštinę laikant kraštine, nubraižytas kitas taisyklingasis trikampis, o į jį įbrėžtas naujas apskritimas. Raskite to apskritimo spindulį.

10.044. Nubrėžtos dvi apskritimo stygos: $AB=a$ ir $AC=b$. Lankas AC dvigubai ilgesnis už lanką AB. Raskite apskritimo spindulį.

10.045. Dviejų susikertančių apskritimų bendra styga matoma iš jų centrų 90° ir 60° kampais. Atstumas tarp apskritimų centrų lygus $\sqrt{3}+1$. Apskaičiuokite apskritimų spindulius.

10.046. Apskritimas liečia stačiojo trikampio ilgesnįjį statinį ir eina per priešais esančio smailiojo kampo viršūnę; jo centras yra trikampio įžambinėje. Statinių ilgiai lygūs 5 ir 12. Kam lygus apskritimo spindulys?

10.047. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C=90°$) perimetras 72 cm, o pusiaukraštinės CK bei aukštinės CM ilgių skirtumas 7 cm. Apskaičiuokite pusiaukampinės ilgį.

10.048. Į 60° smailųjį kampą įbrėžti du apskritimai, kurie liečiasi iš išorės. Mažesnio apskritimo spindulys r. Raskite didesnio apskritimo spindulį.

10.049. Pusiaukampinės taškas, vienodai nutolęs nuo abiejų statinių, dalija ją į 30 cm ir 40 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trikampio statinius.

10.050. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 3 cm, o statinis 10 cm. Apskaičiuokite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.

10.051. Trys nevienodo spindulio apskritimai liečiasi poromis. Tiesės, jungiančios jų centrus, sudaro statųjį trikampį. Didžiausio ir vidurinio apskritimų spinduliai atitinkamai lygūs 6 cm ir 4 cm. Apskaičiuokite mažiausio apskritimo spindulį.

10.052. Apskritimas liečia vieną lygiašonio stačiojo trikampio statinį ir eina per priešais esančio smailiojo kampo viršūnę. Apskritimo centras yra trikampio įžambinėje, o trikampio statinis lygus a. Apskaičiuokite to apskritimo spindulį.

10.053. Lygiagretainio $ABCD$ aukštinė, nubrėžta iš bukojo kampo viršūnės B į kraštinę DA, dalija ją santykiu $5:3$ skaičiuojant nuo viršūnės D. $AD:AB=2$. Raskite santykį $AC:BD$.

10.054. Lygiašonio trikampio pagrindą, kuris lygus 8 cm, laikant styga, nubrėžtas apskritimas, liečiantis šonines trikampio kraštines. Aukštinė, nubrėžta į trikampio pagrindą, lygi 3 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.055. Į lygiašonį trikampį, kurio viršūnės kampas 120°, o šoninė kraštinė a, įbrėžtas apskritimas. Raskite jo spindulį.

10.056. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio taško, esančio taisyklingojo daugiakampio viduje, iki visų tiesių, nubrėžtų per jo kraštines, suma yra pastovus dydis.

10.057. Stačiosios trapecijos aukštinė lygi 2 cm, šoninė kraštinė 4 cm. Šios trapecijos įstrižainė lygi šoninei kraštinei. Apskaičiuokite vidurinės linijos ilgį.

10.058. Į taisyklingąjį trikampį įbrėžtas kvadratas, kurio kraštinė m. Raskite trikampio kraštinę.

10.059. Apskritimo, kurio spindulys r, styga lygi $\frac{r}{2}$. Per vieną jos galą nubrėžta liestinė, o per kitą — liestinei lygiagreti kirstinė. Raskite atstumą tarp liestinės ir kirstinės.

10.060. Į statųjį trikampį įbrėžto ir apie jį apibrėžto apskritimo spindulys lygus atitinkamai 2 cm ir 5 cm. Apskaičiuokite trikampio statinius.

10.061. Statmuo, nubrėžtas iš lygiagretainio viršūnės į jo įstrižainę, dalija tą įstrižainę į 6 cm ir 15 cm ilgio atkarpas. Lygiagretainio kraštinių ilgių skirtumas 7 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio kraštinių ir įstrižainių ilgį.

10.062. Du koncentriniai skrituliai sudaro žiedą, kurio plotis 8 cm. Didesnio skritulio styga lygi 32 cm ir liečia mažesnį skritulį. Apskaičiuokite kiekvieno skritulio spindulį.

10.063. Į trikampį įbrėžtas rombas taip, kad vienas jų kampas yra bendras, o priešinga viršūnė dalija trikampio kraštinę santykiu $2:3$. Rombo įstrižainės lygios m ir n. Apskaičiuokite tas trikampio kraštines, kurioms priklauso rombo kraštinės.

10.064. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė 10 cm, o pagrindas 12 cm. Į trikampį įbrėžto apskritimo liestinės lygiagrečios trikampio aukštinei ir nukerta nuo duotojo trikampio du stačiuosius trikampius. Apskaičiuokite tų trikampių kraštines.

10.065. Į lygiakraštį trikampį įbrėžtas apskritimas. Tą apskritimą ir trikampio kraštines liečia trys maži apskritimai, kurių spindulys r. Raskite trikampio kraštinę.

10.066. Stačiojo trikampio vienas statinis lygus 15 cm, o kito statinio projekcija įžambinėje lygi 16 cm. Apskaičiuokite į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

10.067. 15 cm spindulio skritulyje 13 cm atstumu nuo centro pažymėtas taškas M. Per jį nubrėžta 18 cm ilgio styga. Apskaičiuokite ilgį atkarpų, į kurias taškas M dalija stygą.

10.068. Trikampio pagrindas lygus 36 cm. Tiesė, lygiagreti pagrindui, dalija šį trikampį į dvi lygiaplotes figūras. Raskite tos tiesės atkarpos, esančios tarp trikampio kraštinių, ilgį.

10.069. Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys 15 cm, o į jį įbrėžto apskritimo spindulys 6 cm. Raskite trikampio kraštines.

10.070. Į skritulio išpjovą, kurios centrinis kampas 120°, įbrėžtas skritulys. Duotojo skritulio spindulys lygus R. Raskite įbrėžtinio skritulio spindulį.

10.071. Lygiašonės trapecijos pagrindai 20 cm ir 12 cm, apie ją apibrėžto apskritimo centras priklauso ilgesniajam trapecijos pagrindui. Apskaičiuokite trapecijos šoninę kraštinę ir įstrižainę.

10.072. Lygiašonio trikampio pagrindas 30 cm, o šoninė kraštinė 39 cm. Apskaičiuokite įbrėžtinio skritulio spindulį.

10.073. Kvadrato, kurio kraštinė a, gretimų kraštinių vidurio taškai sujungti vienas su kitu ir su priešinga kvadrato viršūne. Apskaičiuokite susidariusio trikampio plotą.

10.074. Viena iš dviejų lygiagrečių tiesių liečia R spindulio apskritimą taške A, o kita tų tiesių kerta šį apskritimą taškuose B ir C. Trikampio ABC plotą išreikškite atstumu x tarp tiesių.

10.075. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 9 cm ir 12 cm. Apskaičiuokite atstumą tarp jo pusiaukampinių ir pusiaukraštinių susikirtimo taškų.

10.076. Raskite į lygiašonį statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio bei į įžambinę nuleistos aukštinės santykį.

10.077. Lygiašonio trikampio pagrindas ir šoninė kraštinė atitinkamai lygūs 5 cm ir 20 cm. Raskite kampo prie pagrindo pusiaukampinę.

10.078. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 6 cm ir 8 cm. Apskaičiuokite atstumą nuo įbrėžto į trikampį apskritimo centro iki apibrėžto apie jį apskritimo centro.

10.079. Apskaičiuokite stačiojo trikampio, kurio statiniai 24 cm ir 18 cm, smailiųjų kampų pusiaukampines.

10.080. Jeigu keturkampio įstrižainės priklauso jo kampų pusiaukampinėms, tai toks keturkampis yra rombas. Įrodykite.

10.081. Stačiakampio plotas 9 cm^2, o vienas iš kampų, kurį sudaro įstrižainės, lygus 120°. Apskaičiuokite stačiakampio kraštines.

10.082. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas lygus S, o jos aukštinė perpus trumpesnė už šoninę kraštinę. Raskite įbrėžtinio skritulio spindulį.

10.083. Rombo įstrižainių ilgių suma lygi m, o jo plotas S. Raskite rombo kraštinę.

10.084. Rombo perimetras 2 m, įstrižainių santykis lygus $3:4$. Apskaičiuokite rombo plotą.

10.085. Į lygiašonę trapeciją įbrėžtas R spindulio apskritimas. Viršutinis trapecijos pagrindas perpus trumpesnis už aukštinę. Raskite trapecijos plotą.

10.086. Trikampio kiekvienoje pusiaukraštinėje pažymėtas taškas, kuris ją dalija santykiu $3:1$ skaičiuojant nuo viršūnės. Kiek kartų trikampio, kurio viršūnės yra tuose taškuose, plotas mažesnis už pradinio trikampio plotą?

10.087. Į lygiašonį trikampį įbrėžtas vienetinio ploto kvadratas, kurio viena kraštinė priklauso trikampio pagrindui. Trikampio ir kvadrato sunkio centrai sutampa (trikampio sunkio centras yra jo pusiaukraštinių susikirtimo taške). Raskite trikampio plotą.

10.088. Į R spindulio apskritimą įbrėžta trapecija, kurios apatinis pagrindas dvigubai ilgesnis už kiekvieną kitų kraštinių. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.089. Lygiašonio trikampio pagrindas 24 cm, o šoninė kraštinė 13 cm. Apskaičiuokite apie šį trikampį apibrėžto skritulio plotą.

10.090. Atstumas nuo skritulio centro iki 16 cm ilgio stygos lygus 15 cm. Apskaičiuokite apie tą skritulį apibrėžto trikampio plotą, kai trikampio perimetras lygus 200 cm.

10.091. Lygiašonės trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus a, o kampas prie trumpesniojo pagrindo sudaro 120°. Apskaičiuokite į tą trapeciją įbrėžto skritulio plotą.

10.092. Į R spindulio apskritimą įbrėžtas trikampis, kurio kampai 15° ir 60°. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.093. Stačiojo trikampio perimetras lygus $2p$, o įžambinė c. Apskaičiuokite į tą trikampį įbrėžto skritulio plotą.

10.094. Stačiojo trikampio statinių projekcijos įžambinėje lygios 9 m ir 16 m. Apskaičiuokite į trikampį įbrėžto skritulio plotą.

10.095. Lygiašonio trikampio pagrindą laikant kraštine, nubrėžtas kvadratas. Trikampio plotas lygus $\frac{1}{3}$ kvadrato ploto, o jo šoninės kraštinės 1 cm trumpesnės už pagrindą. Apskaičiuokite trikampio kraštines ir į pagrindą nubrėžtą aukštinę.

10.096. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas $32\sqrt{3}$ cm². Smailusis jos kampas prie pagrindo lygus $\frac{\pi}{3}$. Apskaičiuokite trapecijos šoninę kraštinę.

10.097. Stačiojo trikampio plotas $2\sqrt{3}$ cm². Aukštinė, nubrėžta į įžambinę, dalija statųjį kampą santykiu $1:2$. Apskaičiuokite trikampio aukštinę.

10.098. Tiesė, lygiagreti trikampio pagrindui, dalija jį į dalis, kurių plotų santykis, skaičiuojant nuo viršūnės, $2:1$. Kokiu santykiu ji dalija šonines kraštines?

10.099. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas 8 cm², kampas prie pagrindo 30°. Apskaičiuokite trapecijos kraštines.

10.100. Lygiakraštį šešiakampį $ABCDEF$ sudaro dvi trapecijos, turinčios bendrą pagrindą CF. $AC=13$ cm, $AE=10$ cm. Apskaičiuokite šešiakampio plotą.

10.101. Į kvadratą, kurio kraštinė a, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Viena jo viršūnė sutampa su kvadrato viršūne. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.102. Lygiašonės trapecijos įstrižainė dalija jos bukąjį kampą pusiau. Trumpesnysis trapecijos pagrindas 3 cm, perimetras 42 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.103. Stačiojo trikampio aukštinė, nubrėžta į įžambinę, dalija ją į 25,6 cm ir 14,4 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite į tą trikampį įbrėžto skritulio plotą.

10.104. Stačiojo trikampio perimetras 24 cm, plotas 24 cm². Apskaičiuokite apibrėžtinio skritulio plotą.

10.105. Į skritulį, kurio spindulys $\sqrt{12}$ cm, įbrėžtas lygiašonis trikampis. Vienas jo kampas lygus 120°. Apskaičiuokite to trikampio plotą.

10.106. Lygiašonio stačiojo trikampio, kurio įžambinė c, išorėje ant jo kraštinių nubraižyti kvadratai. Jų centrai sujungti vienas su kitu. Apskaičiuokite gauto trikampio plotą.

10.107. Į kvadratą įbrėžtas kitas kvadratas, kurio viršūnės yra pirmojo kvadrato kraštinėse, o kampai tarp abiejų kvadratų kraštinių lygūs 60°. Kurią duotojo kvadrato ploto dalį sudaro įbrėžtinio kvadrato plotas?

10.108. Į taisyklingąjį trikampį, kurio kraštinė a, įbrėžtas kvadratas. Apskaičiuokite jo plotą.

10.109. Lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė a, išorėje ant jo kraštinių nubraižyti kvadratai. Jų viršūnės, nepriklausančios trikampiui, sujungtos tarpusavyje. Raskite gauto trikampio plotą.

10.110. Kvadrato, kurio kraštinė a, kampai nupjauti taip, kad susidaro taisyklingasis aštuoniakampis. Raskite jo plotą.

10.111. Į apskritimą įbrėžto taisyklingojo trikampio kraštinė lygi a. Raskite į tą patį apskritimą įbrėžto kvadrato plotą.

10.112. Į tą patį apskritimą įbrėžtas kvadratas, taisyklingasis trikampis ir taisyklingasis šešiakampis. Apskaičiuokite jų plotų santykį.

10.113. Į apskritimą įbrėžto lygiakraščio trikampio kraštinė lygi a. Raskite jos nukirstos nuopjovos plotą.

10.114. Į apskritimą įbrėžto kvadrato kraštinė lygi a. Apskaičiuokite jos nukirstos nuopjovos plotą.

10.115. Pusapskritimio skersmenį $2R$ laikant kraštine, nubrėžtas taisyklingasis trikampis. Jis yra toje pačioje skersmens pusėje, kaip ir pusapskritimis. Raskite skrituliui nepriklausančios trikampio dalies plotą.

10.116. R spindulio skritulį gaubia keturi lygūs skrituliai. Jie liečia duotąjį skritulį, ir kiekvieni du gretimi skrituliai iš keturių liečiasi tarpusavyje. Raskite vieno tų skritulių plotą.

10.117. Per dviejų apskritimų, kurių spinduliai 4 cm ir 8 cm, susikirtimo taškus nubrėžtos jų liestinės yra viena kitai statmenos. Apskaičiuokite figūros O_1ABO_2 plotą; čia AB — apskritimų bendra liestinė, O_1 ir O_2 — jų centrai.

10.118. Rombo plotas S, o jo įstrižainės sutinka kaip $m:n$. Raskite rombo kraštinę.

10.119. Rombo perimetras $2p$, įstrižainės sutinka kaip $m:n$. Apskaičiuokite rombo plotą.

10.120. Du apskritimai, kurių spindulys lygus R, o centrai — taškai O_1 ir O_2, liečiasi. Tiesė kerta juos taškuose A, B, C ir D taip, kad $AB=BC=CD$. Apskaičiuokite keturkampio O_1ADO_2 plotą.

10.121. Stačiosios trapecijos smailusis kampas lygus 60°, trumpesnysis pagrindas a, o ilgesnioji šoninė kraštinė b. Apskaičiuokite tos trapecijos plotą.

10.122. Trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus 24 cm, atstumas tarp jos įstrižainių vidurio taškų 4 cm. Apskaičiuokite trapecijos trumpesnįjį pagrindą.

10.123. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas S, smailusis kampas prie pagrindo lygus $\frac{\pi}{6}$. Apskaičiuokite trapecijos šoninę kraštinę.

10.124. Įstrižainės dalija trapeciją į keturis trikampius. Įrodykite, kad prie šoninių kraštinių esantys trikampiai yra lygiapločiai.

10.125. Ilgesnįjį trikampio statinį laikant skersmeniu, nubrėžtas pusapskritimis. Trumpesnysis statinis lygus 30 cm, o styga, jungianti stačiojo kampo viršūnę su įžambinės bei pusapskritimio susikirtimo tašku, lygi 24 cm. Apskaičiuokite pusapskritimio ilgį.

10.126. Pusskritulio skersmenį laikant kraštine, nubraižytas taisyklingasis trikampis. Kam lygus pusskritulio viduje ir išorėje esančių trikampio dalių plotų santykis?

10.127. Į taisyklingąjį trikampį, kurio kraštinė a, įbrėžtas apskritimas, o į jį — taisyklingasis šešiakampis. Apskaičiuokite šešiakampio plotą.

10.128. Apie kvadratą, kurio kraštinė a, apibrėžtas apskritimas, o apie apskritimą — taisyklingasis šešiakampis. Apskaičiuokite šešiakampio plotą.

10.129. Į lygiašonę trapeciją įbrėžtas skritulys. Lietimosi taškas dalija vieną šoninių kraštinių į m ir n ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.130. Į apskritimą įbrėžto kvadrato kraštinė nukerta nuopjovą, kurios plotas $(2\pi-4)$ cm^2. Apskaičiuokite kvadrato plotą.

10.131. Į rombą, kurio smailusis kampas 30°, įbrėžtas skritulys. Jo plotas Q. Apskaičiuokite rombo plotą.

10.132. Į skritulio išpjovą, kurios lankas 60°, įbrėžtas skritulys. Raskite to skritulio ir išpjovos plotų santykį.

10.133. Iš taško M, nutolusio nuo apskritimo atstumu a, nubrėžta $2a$ ilgio apskritimo liestinė. Raskite į tą apskritimą įbrėžto taisyklingojo šešiakampio plotą.

10.134. Lygiašonės trapecijos vienas pagrindas lygus 40 cm, o kitas 24 cm. Jos įstrižainės viena kitai statmenos. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.135. Trikampio pagrindas lygus 30 cm, o šoninės kraštinės 26 cm ir 28 cm. Aukštinė padalyta santykiu 2 : 3 (skaičiuojant nuo viršūnės), ir per dalijimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti pagrindui. Apskaičiuokite gautosios trapecijos plotą.

10.136. Stačiojo trikampio smailiojo kampo pusiaukampinė dalija priešingą statinį į 4 cm ir 5 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.137. Pastovaus ilgio stygos AB galai slenka apskritimu, kurio spindulys R. Kai styga apsisuka vieną kartą, jos taškas C, nutolęs nuo galų A ir B atstumu a ir b, nubrėžia apskritimą. Apskaičiuokite plotą žiedo, kurį sudaro duotasis apskritimas ir taško C nubrėžtas apskritimas.

10.138. Trys vienodi apskritimai, kurių spindulys r, liečiasi poromis. Apskaičiuokite plotą figūros, kuri yra apskritimų išorėje ir apribota jų lankų, esančių tarp lietimosi taškų.

10.139. Rombo kraštines laikant skersmenimis, nubrėžti pusapskritimiai (rombo viduje). Rombo įstrižainės lygios a ir b. Apskaičiuokite susidariusios roželės plotą.

10.140. Jeigu per keturkampio viršūnes nubrėžtume tieses, lygiagrečias jo įstrižainėms, tai tų tiesių sudaryto lygiagretainio plotas būtų dvigubai didesnis už duotojo keturkampio plotą. Įrodykite.

10.141. Lygiašonės trapecijos pagrindai ir plotas atitinkamai lygūs 8 cm, 14 cm ir 44 cm^2. Apskaičiuokite jos šonines kraštines.

10.142. Į taisyklingąjį trikampį įbrėžtas apskritimas, o į jį — taisyklingasis šešiakampis. Apskaičiuokite trikampio ir šešiakampio plotų santykį.

10.143. Dviejų skritulių bendra styga jungia 60° ir 120° kampus. Apskaičiuokite tų skritulių plotų santykį.

10.144. Nubrėžtos stačiakampio dviejų kampų, esančių prie ilgesnės kraštinės, pusiaukampinės. Stačiakampio kraštinės lygios 2 m ir 4 m. Kaip šios pusiaukampinės padalija stačiakampio plotą?

10.145. Rombo aukštinė 12 cm, o viena jo įstrižainių 15 cm. Apskaičiuokite rombo plotą.

10.146. Į lygiašonio trikampio pagrindą nubrėžta aukštinė lygi 25 cm, įbrėžtinio apskritimo spindulys lygus 8 cm. Apskaičiuokite trikampio pagrindą.

10.147. Nubrėžtos lygiagretainio, kurio perimetras 32 cm, įstrižainės. Dviejų gretimų trikampių perimetrų skirtumas lygus 8 cm. Apskaičiuokite lygiagretainio kraštines.

10.148. Lygiašonės trapecijos aukštinė lygi h, o jos šoninė kraštinė matoma iš apibrėžtinio apskritimo centro 60° kampu. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.149. Skritulio spindulys R. Styga, kuri lygi įbrėžtinio kvadrato kraštinei, dalija skritulį į dvi nuopjovas. Apskaičiuokite mažesnės nuopjovos plotą.

10.150. Du koncentriniai apskritimai, kurių ilgis C_1 ir C_2 ($C_1 > C_2$), sudaro skritulinį žiedą. Apskaičiuokite jo plotą.

10.151. Styga, kuri lygi įbrėžtinio taisyklingojo trikampio kraštinei, dalija skritulį į dvi nuopjovas. Apskaičiuokite jų plotų santykį.

10.152. Į taisyklingąjį šešiakampį, kurio kraštinė a, įbrėžtas apskritimas, ir apie tą šešiakampį apibrėžtas apskritimas. Apskaičiuokite tų apskritimų sudaryto skritulinio žiedo plotą.

10.153. Du koncentriniai apskritimai dalija koncentrinį skritulį, kurio spindulys R, į tris lygiaplotes figūras. Apskaičiuokite tų apskritimų spindulius.

10.154. Skritulinio žiedo plotas S. Didesnio apskritimo spindulys lygus mažesnio apskritimo ilgiui. Raskite mažesnio apskritimo spindulį.

10.155. Abiejose skritulio, kurio spindulys R, pusėse nubrėžtos dvi lygiagrečios stygos. Viena jų lygi taisyklingojo įbrėžtinio trikampio kraštinei, o kita — taisyklingojo įbrėžtinio šešiakampio kraštinei. Raskite tarp stygų esančios skritulio dalies plotą.

10.156. Į R spindulio skritulį du taisyklingieji trikampiai įbrėžti taip, kad kiekviena kraštinė, susikirsdama su kitomis, pasidalija į tris lygias atkarpas. Apskaičiuokite trikampių sankirtos plotą.

10.157. Per lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB ir AD taškus R ir E ($AR=\frac{2}{3}AB$ $AE=\frac{1}{3}AD$) nubrėžta tiesė. Raskite lygiagretainio ir gauto trikampio plotų santykį.

10.158. Trys apskritimai, kurių spinduliai $R_1=6$ cm, $R_2=7$ cm, $R_3=8$ cm, liečiasi poromis. Apskaičiuokite plotą trikampio, kurio viršūnės sutampa su tų apskritimų centrais.

10.159. Lygiakraščio trikampio, kvadrato ir taisyklingojo šešiakampio kraštinės vienodo ilgio. Apskaičiuokite jų plotų santykį.

10.160. Trapecijos plotas 594 m^2, aukštinė 22 m, o lygiagrečių kraštinių skirtumas 6 m. Apskaičiuokite kiekvieną iš lygiagrečių kraštinių.

10.161. Stačiojo trikampio statiniai 6 cm ir 8 cm. Per jo stačiojo kampo viršūnę nubrėžtas statmuo įžambinei. Apskaičiuokite susidariusių trikampių plotus.

10.162. Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę, lygi 12 cm, o pagrindas 15 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.163. Trikampio kraštinės 13 cm, 14 cm ir 15 cm. Apskaičiuokite į trikampį įbrėžto ir apie trikampį apibrėžto skritulių plotų santykį.

10.164. Trapecijos $ABCD$ ($AD \parallel BC$) pagrindų santykis $5:3$, trikampio ADM (čia M — tiesių AB ir CD susikirtimo taškas) plotas 50 cm^2. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.165. Į taisyklingąjį trikampį, kurio kraštinė a, įbrėžtas apskritimas ir apie tą trikampį apibrėžtas apskritimas. Raskite susidariusio žiedo plotą.

10.166. Stačiojo trikampio vienas statinis 15 cm, o į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys 3 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.167. Įrodykite, kad trapecijos plotas lygus vienos iš nelygiagrečių kraštinių ilgio ir statmens, nubrėžto iš kitos šoninės kraštinės vidurio taško į pirmąją kraštinę, ilgio sandaugai.

10.168. Pusskritulio skersmuo padalytas į dvi dalis ir, kiekvieną jų laikant skersmeniu, nubrėžti pusskrituliai (duotojo pusskritulio viduje). Įrodykite, kad tarp trijų pusskritulių esančios figūros plotas lygus skritulio plotui. To skritulio skersmuo lygus ilgiui statmens, iškelto dalijimo taške pusskritulio skersmeniui.

10.169. Į R spindulio skritulį įbrėžtas stačiakampis, kurio plotas perpus mažesnis už skritulio. Raskite stačiakampio kraštines.

10.170. Į R spindulio skritulio išpjovą, kurios styga $2a$, įbrėžtas skritulys. Apskaičiuokite jo plotą.

10.171. Trapecijos pagrindai a ir b, kampai prie ilgesniojo pagrindo $\frac{\pi}{6}$ ir $\frac{\pi}{4}$. Raskite trapecijos plotą.

10.172. Į rombą, kurio smailusis kampas 30°, įbrėžtas skritulys, o į jį — kvadratas. Raskite rombo ir kvadrato plotų santykį.

10.173. Stačiojo trikampio kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas 1 cm. Apskaičiuokite įžambinės ilgį.

10.174. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas S, kampas prie pagrindo 30°. Apskaičiuokite skritulio spindulį.

10.175. Lygiašonio trikampio pagrindas a, o į jį nubrėžtos aukštinės ilgis lygus atkarpos, jungiančios pagrindo ir šoninės kraštinės vidurio taškus, ilgiui. Raskite trikampio plotą.

10.176. Įrodykite, kad atstumai nuo lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės AC bet kurio taško iki tiesių BC ir CD atvirkščiai proporcingi tų kraštinių ilgiams.

10.177. Įrodykite, kad trikampio perimetro ir vienos jo kraštinės santykis lygus į tą kraštinę nubrėžtos aukštinės ir įbrėžtinio apskritimo spindulio santykiui.

10.178. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas yra AC, o aukštinių AN ir BM ilgis lygus atitinkamai n ir m. Raskite to trikampio kraštinių ilgį.

10.179. Rombas, kurio kraštinė lygi trumpesniajai įstrižainei, lygiaplotis R spindulio skrituliui. Raskite rombo kraštinę.

10.180. Trapecijos pagrindų skirtumas 14 cm, dvi nelygiagrečios kraštinės lygios 13 cm ir 15 cm. Į trapeciją galima įbrėžti apskritimą. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.181. Kvadrato, kurio kraštinė a, dviejų gretimų kraštinių vidurio taškai sujungti vienas su kitu ir su priešinga kvadrato viršūne. Raskite vidinio trikampio plotą.

10.182. Apie kvadratą, kurio kraštinė a, apibrėžtas apskritimas. Į vieną iš susidariusių nuopjovų įbrėžtas kvadratas. Raskite jo plotą.

10.183. Į lygiašonę trapeciją įbrėžtas skritulys. Įrodykite, kad skritulio ir trapecijos plotų santykis lygus apskritimo ilgio ir trapecijos perimetro santykiui.

10.184. Trapecijos lygiagrečios kraštinės lygios 16 cm ir 44 cm, o nelygiagrečios — 17 cm ir 25 cm. Apskaičiuokite šios trapecijos plotą.

10.185. Lygiašonės trapecijos vidurinės linijos ilgis lygus 5, o įstrižainės viena kitai statmenos. Raskite trapecijos plotą.

10.186. Lygiašonės trapecijos pagrindų santykis 5 : 12, aukštinė 17 cm, o vidurinė linija lygi aukštinei. Apskaičiuokite apie tą trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį.

10.187. Aukštinė, nubrėžta į lygiašonio trikampio pagrindą, lygi H ir dvigubai ilgesnė už jos projekciją šoninėje kraštinėje. Raskite trikampio plotą.

10.188. Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ir į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulio santykis 5 : 2. Vienas trikampio statinis lygus a. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.189. Į nuopjovą, kurios lankas 60°, įbrėžtas kvadratas. Skritulio spindulys lygus $2\sqrt{3}+\sqrt{17}$. Apskaičiuokite kvadrato plotą.

10.190. Trikampio kraštinių santykis 2 : 3 : 4. Į trikampį įbrėžtas pusskritulis, kurio skersmuo yra ilgiausioje kraštinėje. Raskite pusskritulio ir trikampio plotų santykį.

B grupė

10.191. Į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo centras nutolęs nuo jos šoninės kraštinės galų per 3 cm ir 9 cm. Apskaičiuokite trapecijos kraštines.

10.192. Du apskritimai liečiasi iš išorės. Jų spindulių santykis 3 : 1, o bendros išorinės liestinės ilgis $6\sqrt{3}$. Raskite figūros, kurią sudaro išorinės liestinės ir išorinės apskritimų dalys, perimetrą.

10.193. Stačiojo kampo viduje pažymėtas taškas M, kurio atstumai iki kampo kraštinių 4 cm ir 8 cm. Tiesė, einanti per tašką M, nukerta nuo stačiojo kampo trikampį, kurio plotas 100 cm². Apskaičiuokite trikampio statinius.

10.194. Taškas C_1 — trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas; kampas COC_1 (čia O — apie trikampį apibrėžto apskritimo centras) yra status. Įrodykite, kad $|\angle B-\angle A|=90°$.

10.195. Apskritimas liečia dvi gretimas kvadrato kraštines ir dalija kiekvieną iš kitų dviejų jo kraštinių į 2 cm ir 23 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.196. Duotas trikampio ABC, kurio $2h_c=AB$ ir $\angle A=75°$. Raskite kampo C didumą.

10.197. Į statųjį trikampį, kurio kraštinės 6 cm, 8 cm ir 10 cm, įbrėžtas apskritimas. Per jo centrą nubrėžtos tiesės, lygiagrečios trikampio kraštinėms. Jos dalija tas kraštines į tris atkarpas. Apskaičiuokite vidurinių atkarpų ilgius.

10.198. Prie pagrindo esančių trapecijos bukųjų kampų pusiaukampinės susikerta kitame pagrinde. Trapecijos aukštinė 12 cm, o pusiaukampinės 15 cm ir 13 cm. Raskite visas trapecijos kraštines.

10.199. Trapecijos pagrindai 4 cm ir 16 cm. Raskite į trapeciją įbrėžto ir apie ją apibrėžto apskritimų spindulius.

10.200. Į trikampį įbrėžtas rombas taip, kad vienas jų kampas yra bendras, o priešinga rombo viršūnė priklauso trikampio kraštinei ir dalija ją į p ir q ilgio atkarpas. Rombo kraštinė lygi m. Raskite trikampio kraštines.

10.201. Duotas trikampis ABC, kurio $AB=15$ cm, $BC=12$ cm ir $AC=18$ cm. Apskaičiuokite, kokiu santykiu į trikampį įbrėžto apskritimo centras dalija kampo C pusiaukampinę.

10.202. Duotas lygiašonis trikampis, kurio pagrindas a ir šoninė kraštinė b. Įrodykite, kad įbrėžtinio apskritimo centras dalija kampo prie pagrindo pusiaukampinę santykiu $(a+b):b$ skaičiuojant nuo kampo viršūnės.

10.203. Iš apskritimo vieno taško nubrėžtos 9 cm ir 17 cm ilgio stygos. Atstumas tarp jų vidurio taškų 5 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.204. Iš apskritimo vieno taško nubrėžtos 10 cm ir 12 cm ilgio stygos. Atstumas nuo trumpesnės stygos vidurio taško iki ilgesnės stygos 4 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.205. Į kampą įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys 5 cm. Lietimosi taškus jungianti styga 8 cm ilgio. Nubrėžtos dvi apskritimo liestinės, lygiagrečios stygai. Apskaičiuokite gautos trapecijos kraštines.

10.206. Į lygiašonį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus $\frac{3}{2}$ cm, o apie jį apibrėžto apskritimo spindulys $\frac{25}{8}$ cm. Kokiais sveikaisiais skaičiais išreikštos trikampio kraštinės?

13. Užsak. Nr. 1941.

10.207. Trikampio kraštinės 10 cm, 17 cm ir 21 cm. Į jį įbrėžtas stačiakampis, kurio viena kraštinė yra ilgiausioje trikampio kraštinėje. Stačiakampio perimetras 24 cm. Apskaičiuokite stačiakampio kraštines.

10.208. Iš rombo smailiojo kampo viršūnės nubrėžti statmenys tiesėms. Jose yra rombo kraštinės, kurioms nepriklauso toji viršūnė. Kiekvieno statmens ilgis 3 cm, o atstumas tarp pagrindų $3\sqrt{3}$ cm. Apskaičiuokite rombo įstrižaines.

10.209. Duotas trikampis, kurio kraštinės 10, 24 ir 26. Dvi trumpesnės kraštinės liečia apskritimą, kurio centras yra ilgiausioje kraštinėje. Raskite apskritimo spindulį.

10.210. Apie lygiašonę trapeciją, kurios pagrindai 2 ir 14, o šoninė kraštinė 10, apibrėžtas apskritimas. Raskite jo spindulį.

10.211. Stačiojo trikampio ilgesnį statinį laikant skersmeniu, nubrėžtas apskritimas. Trikampio trumpesnysis statinis lygus 7,5 cm, o styga, jungianti stačiojo kampo viršūnę su įžambinės bei apskritimo susikirtimo tašku, lygi 6 cm. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.212. Į apskritimą įbrėžto stačiakampio viršūnės dalija apskritimą į keturis lankus. Stačiakampio kraštinės 24 cm ir 7 cm. Raskite atstumą nuo vieno iš didesnių lankų vidurio taško iki stačiakampio viršūnių.

10.213. Į statųjį trikampį įbrėžtas pusapskritimis, kurio skersmuo priklauso įžambinei. Pusapskritimio centras dalija įžambinę į atkarpas, lygias 30 ir 40. Raskite pusapskritimio lanko, esančio tarp apskritimo ir statinių lietimosi taškų, ilgį.

10.214. Apie skritulį apibrėžtas lygiašonis trikampis. Skritulio spindulys lygus 3, o trikampio smailusis kampas prie pagrindo 30°. Raskite trikampio kraštines.

10.215. Stačiojo trikampio statinių pusiaukraštinės lygios $\sqrt{52}$ ir $\sqrt{73}$. Raskite trikampio įžambinę.

10.216. Du apskritimai, kurių spinduliai 4 ir 8, susikerta stačiuoju kampu. Apskaičiuokite jų bendros liestinės ilgį.

10.217. Kokią būtiną ir pakankamą sąlygą turi tenkinti trapecija, kad į ją būtų galima įbrėžti ir apie ją apibrėžti apskritimą?

10.218. Tiesė, lygiagreti trapecijos pagrindams, eina per jos įstrižainių susikirtimo tašką. Trapecijos pagrindai 4 cm ir 12 cm. Apskaičiuokite tos tiesės atkarpos, esančios tarp šoninių kraštinių, ilgį.

10.219. Nubrėžtos R spindulio apskritimo dvi stygos AB ir CD, kurios susikerta ir yra viena kitai statmenos. Įrodykite, kad $AC^2+BD^2=4R^2$.

10.220. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio taisyklingojo trikampio kraštinės taško iki kitų dviejų kraštinių suma yra pastovus dydis.

10.221. Dvi trikampio kraštinės lygios 6 cm ir 8 cm. Į jas nubrėžtos pusiaukraštinės yra viena kitai statmenos. Raskite trečiąją trikampio kraštinę.

10.222. Apskritimai, kurių spinduliai R ir r, liečiasi iš išorės. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės yra jų bendros liestinės, o pagrindas liečia didesnįjį apskritimą. Raskite trikampio pagrindą.

10.223. Stačiojo trikampio perimetras 60 cm, o aukštinė, nubrėžta į įžambinę, 12 cm. Apskaičiuokite trikampio kraštines.

10.224. Duotas lygiašonis trikampis, kurio pagrindas 12 cm, o šoninė kraštinė 18 cm. Kokio ilgio atkarpas reikia atidėti nuo trikampio viršūnės jo šoninėse kraštinėse, kad, sujungę jų galus, gautume trapeciją, kurios perimetras 40 cm?

10.225. Du nevienodo spindulio apskritimai liečiasi iš išorės. Raskite kampą, kurį sudaro stygos, jungiančios apskritimų lietimosi tašką su jų bendros išorinės liestinės lietimosi taškais.

10.226. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas. Lietimosi taškas dalija įžambinę santykiu 2 : 3. Įbrėžtinio apskritimo centras nutolęs nuo stačiojo kampo viršūnės per $\sqrt{8}$ cm. Raskite trikampio kraštines.

10.227. Lygiakraščio trikampio viduje pažymėtas taškas M, nutolęs nuo kraštinių atstumais b, c, d. Raskite trikampio aukštinę.

10.228. Pusapskritimio skersmens vienas galas sutampa su lygiašonio trikampio kampo prie pagrindo viršūne, o kitas galas priklauso tam pagrindui. Pusapskritimis liečia vieną šoninę kraštinę ir dalija kitą kraštinę į 5 cm ir 4 cm ilgio atkarpas skaičiuojant nuo pagrindo. Raskite pusapskritimio spindulį.

10.229. Į trikampį įbrėžtas lygiagretainis, kurio kraštinės 3 cm ir 5 cm, o įstrižainė 6 cm. Lygiagretainio įstrižainės lygiagrečios trikampio šoninėms kraštinėms, o trumpesnioji jo kraštinė priklauso trikampio pagrindui. Raskite trikampio kraštines.

10.230. Trikampio aukštinė, pagrindas ir šoninių kraštinių suma lygi atitinkamai 24 cm, 28 cm ir 56 cm. Raskite šonines kraštines.

10.231. Į stačiąją trapeciją įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys r. Trapecijos trumpesnysis pagrindas lygus $\frac{4r}{3}$. Raskite tos trapecijos kraštines.

10.232. Trikampio šoninės kraštinės 9 cm ir 15 cm. Į tą trikampį įbrėžtas lygiagretainis taip, kad viena jo kraštinė, kurios ilgis 6 cm, priklauso trikampio pagrindui, o lygiagretainio įstrižainės lygiagrečios trikampio šoninėms kraštinėms. Raskite kitą lygiagretainio kraštinę ir trikampio pagrindą.

10.233. Lygiašonės trapecijos aukštinė h, o šoninė kraštinė matoma iš apibrėžtinio apskritimo centro 120° kampu. Raskite trapecijos vidurinę liniją.

10.234. Apskritimas, kurio spindulys 13 cm, liečia dvi gretimas 18 cm ilgio kvadrato kraštines. Į kokias dvi atkarpas apskritimas dalija kiekvieną iš kitų dviejų kvadrato kraštinių?

10.235. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo 72°, o to kampo pusiaukampinė m ilgio. Raskite trikampio kraštinių ilgį.

10.236. Lygiašonio trikampio viršūnės kampas 36°, o kampo prie pagrindo pusiaukampinė lygi $\sqrt{20}$. Raskite trikampio kraštines.

10.237. Keturkampio įstrižainės lygios, o jo vidurinės linijos p ir q ilgio. Raskite keturkampio plotą.

10.238. Trapecijos vienas pagrindas du kartus ilgesnis už kitą. Per įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti pagrindams. Raskite kiekvienos iš dviejų gautų trapecijų aukštinės bei duotosios trapecijos aukštinės santykį.

10.239. Į skritulio nuopjovą, kurią atitinka 6 cm ilgio styga, įbrėžtas kvadratas. Jo kraštinė lygi 2 cm. Raskite skritulio spindulį.

10.240. Lygiašonio trikampio pagrindas 12 cm, o šoninė kraštinė 18 cm. Į šonines trikampio kraštines nubrėžtos aukštinės. Apskaičiuokite ilgį atkarpos, kurios galai sutampa su aukštinių pagrindais.

10.241. Nubrėžtos lygiašonio trikampio, kurio šoninė kraštinė b, kampų prie pagrindo pusiaukampinės. Tiesės atkarpa tarp pusiaukampinių ir šoninių kraštinių susikirtimo taškų yra m ilgio. Raskite trikampio pagrindą.

10.242. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 8, o šoninė kraštinė 12. Raskite ilgį atkarpos, jungiančios trikampio kampų prie pagrindo pusiaukampinių ir šoninių kraštinių susikirtimo taškus.

10.243. 60° kampo viduje yra taškas, nutolęs nuo kampo kraštinių per $\sqrt{7}$ cm ir $2\sqrt{7}$ cm. Raskite to taško atstumą nuo kampo viršūnės.

10.244. Į trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys 3 cm. Lietimosi taškas vieną iš trikampio kraštinių dalija į 4 cm ir 3 cm atkarpas. Apskaičiuokite trikampio kraštinių ilgį.

10.245. Į kampą įbrėžti trys apskritimai — mažas, vidutinis ir didelis. Didelis apskritimas eina per vidutinio centrą, o vidutinis — per mažojo centrą. Mažojo apskritimo spindulys r, o atstumas nuo jo centro iki kampo viršūnės a. Raskite vidutinio ir didžiojo apskritimo spindulius.

10.246. Į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo centras nutolęs nuo šoninės kraštinės galų per 8 cm ir 4 cm. Raskite trapecijos vidurinę liniją.

10.247. Dviejų taisyklingųjų trikampių, kurių kraštinės a ir $3a$, pagrindai priklauso tai pačiai tiesei. Trikampiai yra priešingose tiesės pusėse ir neturi bendrų taškų. Atstumas tarp artimiausių jų pagrindų galų lygus $2a$. Raskite atstumą tarp trikampių viršūnių.

10.248. Du apskritimai, kurių spinduliai R ir r, liečiasi iš išorės. Jų kirstinė nubrėžta taip, kad apskritimai padalija ją į tris lygias atkarpas. Raskite tų atkarpų ilgį.

10.249. Įrodykite, kad atstumas nuo ortocentro (aukštinių susikirtimo taško) iki trikampio viršūnės du kartus didesnis už atstumą nuo apibrėžtinio apskritimo centro iki kraštinės, esančios prieš tą viršūnę.

10.250. Atkarpoje AB pažymėtas taškas M ir, atkarpas AM bei MB laikant kraštinėmis, vienoje tiesės AB pusėje nubraižyti kvadratai. Apie juos apibrėžti apskritimai susikerta taške N. Įrodykite, kad tiesė AN eina per antrojo kvadrato viršūnę ir trikampis ANB yra statusis.

10.251. Į 60° kampą įbrėžti penki apskritimai, kurių kiekvienas tolesnis (pradedant antruoju) liečia prieš jį esantį. Kiek kartų visų penkių atitinkamų skritulių plotų suma didesnė už mažiausio skritulio plotą?

10.252. Trikampio kraštinių santykis 5 : 4 : 3. Raskite atkarpų, į kurias įbrėžtinio apskritimo lietimosi taškas dalija kraštines, santykį.

10.253. Trikampio kraštinės 26 cm, 28 cm ir 30 cm. Apskaičiuokite apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimo spindulių sandaugą.

10.254. Trikampio ABC pusiaukraštinės AL ir BM susikerta taške K. Viršūnė C priklauso apskritimui, einančiam per taškus K, L, M. Kraštinės AB ilgis lygus a. Raskite pusiaukraštinės CN ilgį.

10.255. Per apskritimo, kurio spindulys 10 cm, tašką A nubrėžtos dvi viena kitai statmenos stygos AB ir AC. Apskaičiuokite spindulį apskritimo, liečiančio duotąjį apskritimą ir nubrėžtas stygas, kai $AB=16$ cm.

10.256. Smailiojo trikampio dviejų kraštinių ilgis lygus $\sqrt{13}$ cm ir $\sqrt{10}$ cm. Raskite trečiosios kraštinės ilgį, kai ji lygi į tą kraštinę nubrėžtai aukštinei.

10.257. Per apskritimo skersmens tašką P nubrėžta styga AB, kuri su skersmeniu sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite apskritimo spindulį, kai $AP=a$ ir $BP=b$.

10.258. Atstumai nuo taško M, esančio trikampio ABC viduje, iki jo kraštinių AC ir BC atitinkamai lygūs 2 cm ir 4 cm. Apskaičiuokite taško M atstumą iki tiesės AB, kai $AB=10$ cm, $BC=17$ cm, $AC=21$ cm.

10.259. 12 cm ilgio atkarpoje AC taškas B pažymėtas taip, kad $AB=4$ cm. Atkarpas AB ir AC laikant skersmenimis, vienoje pusplokštumėje su riba AC nubrėžti pusapskritimiai. Apskaičiuokite spindulį apskritimo, liečiančio nubrėžtus pusapskritimius ir atkarpą AC.

10.260. Trikampio kraštinė 48 cm, o į ją nubrėžta aukštinė 8,5 cm. Į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys 4 cm. Raskite atstumą nuo to apskritimo centro iki viršūnės, esančios prieš duotąją kraštinę.

10.261. Lygiašonio trikampio ABC $(AB=BC)$ kraštinėje BC taškas D pažymėtas taip, kad $BD:DC=1:4$. Kokiu santykiu tiesė AD dalija trikampio ABC aukštinę BE skaičiuojant nuo viršūnės B?

10.262. Stačiojo trikampio aukštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi h; įbrėžtinio apskritimo spindulys r. Raskite įžambinę.

10.263. Trikampio pusiaukraštinės lygios 5 cm, $\sqrt{52}$ cm ir $\sqrt{73}$ cm. Įrodykite, kad trikampis yra statusis.

10.264. Įrodykite, kad bet kurio stačiojo trikampio pusperimetrio ir į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulio suma lygi jo statinių sumai.

10.265. Įrodykite, kad apie bet kurį statųjį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimo skersmenų suma lygi statinių sumai.

10.266. Smailiojo trikampio kraštinės lygios a ir b, o jų pusiaukraštinės susikerta stačiuoju kampu. Raskite trečiąją to trikampio kraštinę.

10.267. Atkarpoje AB pažymėtas taškas C ir, atkarpos AB dalis AC ir CB laikant skersmenimis, nubrėžti pusapskritimiai. Įrodykite, kad tų pusapskritimių ilgių suma nepriklauso nuo taško C padėties atkarpoje AB.

10.268. Taškas C juda l ilgio atkarpa AB. Atkarpas AC ir CB laikant pagrindais, vienoje AB pusėje nubraižyti taisyklingieji trikampiai. Kur reikia pažymėti tašką C, kad atstumas tarp trikampių viršūnių būtų trumpiausias?

10.269. Trikampio aukštinės 12 cm, 15 cm ir 20 cm. Įrodykite, kad trikampis yra statusis.

10.270. Raskite trikampio visų pusiaukraštinių kvadratų sumos ir visų jo kraštinių kvadratų sumos santykį.

10.271. Trikampio aukštinės 12 cm, 15 cm ir 20 cm. Raskite jo plotą.

10.272. Skaičiai m_1, m_2 ir m_3 išreiškia trikampio pusiaukraštinių ilgį. Jeigu lygybė $m_1^2+m_2^2=5m_3^2$ yra teisinga, tai trikampis — statusis. Įrodykite.

10.273. Aukštinė, nubrėžta į stačiojo trikampio įžambinę, dalija trikampį į du trikampius, kurių plotai Q ir q. Raskite statinius.

10.274. Skaičiai h_1, h_2 ir h_3 išreiškia trikampio aukštinių ilgį. Jeigu lygybė $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2+\left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2=1$ yra teisinga, tai trikampis — statusis. Įrodykite.

10.275. Per trapecijos įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta pagrindams lygiagreti tiesė, kuri kerta šonines kraštines taškuose M ir N. Įrodykite, kad $MN=\frac{2ab}{a+b}$; čia a ir b — pagrindų ilgiai.

10.276. Aukštinė CD, nubrėžta į įžambinę, dalija statųjį trikampį ABC į trikampius BCD ir ACD. Į juos įbrėžtų apskritimų spinduliai atitinkamai lygūs 4 cm ir 3 cm. Apskaičiuokite į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulį.

10.277. Raskite trikampio, kurio statiniai a ir b, stačiojo kampo pusiaukampinę.

10.278. Duotas kvadratas, kurio kraštinė a. Šis kvadratas yra lygiaplotis lygiašoniam trikampiui, kurio pagrindo bei aukštinės ilgių suma lygi dviejų šoninių kraštinių ilgių sumai. Raskite trikampio kraštines.

10.279. Taškai M, N, P, Q yra rombo $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškai. Rombo plotas lygus 100 cm². Apskaičiuokite plotą figūros, kuri yra keturkampių $ABCD$, $ANCQ$ ir $BPDM$ sankirta.

10.280. Lygiašonio trikampio ploto ir kvadrato, nubraižyto trikampio pagrindą laikant kraštine, ploto santykis $\sqrt{3}:12$. Raskite trikampio kampus.

10.281. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis, kurio kampai 120°, 90°, 60° ir 90°. Keturkampio plotas $9\sqrt{3}$ cm², o įstrižainės viena kitai statmenos. Apskaičiuokite apskritimo spindulį.

10.282. Trikampyje ABC nubrėžta tiesė DE, lygiagreti pagrindui AC. Trikampio ABC plotas 8 kv. vnt., o trikampio DEC — 2 kv. vnt. Raskite atkarpos DE ir trikampio ABC pagrindo ilgių santykį.

10.283. Stačiojo trikampio plotas 24 cm², o įžambinė 10 cm ilgio. Raskite įbrėžtinio apskritimo spindulį.

10.284. Apie R spindulio skritulį apibrėžtas kvadratas ir lygiakraštis trikampis. Viena kvadrato kraštinė priklauso trikampio kraštinei. Apskaičiuokite trikampio ir kvadrato bendros dalies plotą.

10.285. Skritulio, kurio spindulys R, centro priešingose pusėse nubrėžtos dvi lygiagrečios stygos. Viena jų jungia 60° lanką, o kita — 120° lanką. Raskite tarp šių stygų esančios skritulio dalies plotą.

10.286. Du apskritimai, kurių spinduliai r ir $3r$, liečiasi iš išorės. Raskite plotą figūros, esančios tarp apskritimų ir bendros išorinės jų liestinės.

10.287. Į 2 cm spindulio skritulį įbrėžtas trikampis, kurio du kampai lygūs $\frac{\pi}{3}$ ir $\frac{\pi}{4}$. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.288. Trapecijos įstrižainės lygios 7 cm ir 8 cm, o pagrindai — 3 cm ir 6 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.289. Į rombą, kurio kraštinė a ir smailusis kampas 60°, įbrėžtas apskritimas. Apskritimo ir rombo kraštinių lietimosi taškai yra keturkampio viršūnės. Apskaičiuokite to keturkampio plotą.

10.290. Du apskritimai, kurių spinduliai R ir r, liečiasi iš išorės. Nubrėžta bendra išorinė jų liestinė, ir į gautą kreivinį trikampį įbrėžtas skritulys. Apskaičiuokite jo plotą.

10.291. Į stačiąją trapeciją įbrėžto skritulio centras nutolęs nuo šoninės kraštinės galų per 1 cm ir 2 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.292. Apskritimas, kurio spindulys R, padalytas į šešis vienodus lankus, ir jo sudaromo skritulio viduje per kiekvienus gretimus du dalijimo taškus nubrėžti vienodi lankai. Jų spindulys toks, kad lankai liečiasi apskritimo taškuose. Apskaičiuokite duotojo skritulio vidinės dalies, esančios tarp nubrėžtų lankų, plotą.

10.293. Į tam tikrą kampą įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys R, o lietimosi taškus jungiančios stygos ilgis a. Nubrėžus dvi apskritimo liestines, lygiagrečias šiai stygai, gauta trapecija. Raskite jos plotą.

10.294. Du apskritimai, kurių spinduliai R ir r, liečiasi iš išorės. Jų dvi bendros liestinės ir lietimosi taškus jungiančios tiesės sudaro trapeciją. Raskite jos plotą.

10.295. Stačiojo trikampio statiniai 6 cm ir 8 cm. Per trumpesniojo statinio ir įžambinės vidurio taškus nubrėžtas apskritimas, kuris liečia įžambinę. Raskite to apskritimo apriboto skritulio plotą.

10.296. Žinomi apie statųjį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto skritulio spinduliai. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.297. Trikampio kraštinių ilgių santykis $m:n:m$. Raskite to trikampio ploto ir trikampio, kurio viršūnės yra duotojo trikampio pusiaukampinių bei kraštinių susikirtimo taškai, ploto santykį.

10.298. Nuopjovos perimetras p, o lankas sudaro 120°. Apskaičiuokite tos nuopjovos plotą.

10.299. Atkarpą AB ir kiekvieną jos pusę laikant skersmenimis, nubrėžti pusskrituliai (vienoje atkarpos AB pusėje). Nubrėžus skritulį, liečiantį visus tris duotus pusskritulius, gaunami kreiviniai trikampiai. Didžiojo pusskritulio spindulys lygus R. Raskite kreivinių trikampių plotų sumą.

10.300. Taisyklingojo trikampio kraštinė a. Raskite plotą trikampio dalies, nesančios $\frac{a}{3}$ spindulio skritulyje, kurio centras sutampa su trikampio centru.

10.301. Į nuopjovą, kurios lankas 180°, įbrėžtas vienas kvadratas, o į to paties skritulio nuopjovą, kurios lankas 90°,— kitas kvadratas. Raskite abiejų kvadratų plotų santykį.

10.302. Keturkampio plotas S. Apskaičiuokite plotą lygiagretainio, kurio kraštinės lygios ir lygiagrečios keturkampio įstrižainėms.

10.303. Nubrėžtos trikampio ABC pusiaukraštinės BD ir CE; M — jų susikirtimo taškas. Įrodykite, kad trikampis BCM ir keturkampis $ADME$ yra lygiapločiai.

10.304. Du skrituliai yra koncentriniai. Mažesnio skritulio apskritimas dalija didesnį skritulį į lygiaplotes dalis. Įrodykite, kad žiedo dalis, esanti tarp lygiagrečių mažesnio spindulio apskritimo liestinių, ir į mažesnį skritulį įbrėžtas kvadratas yra lygiapločiai.

10.305. Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra lygties ax^2+bx+ $+c=0$ šaknys. Raskite apie tą trikampį apibrėžto skritulio plotą.

10.306. Tiesė kerta apskritimą, kurio spindulys R, taškuose A ir B taip, kad $\smile AB=45°$, o tiesę, statmeną apskritimo skersmeniui AM ir einančią per jo centrą,— taške K. Tiesė, einanti per tašką B statmenai AM, kerta apskritimą taške C. Apskaičiuokite trapecijos $OCBK$ plotą.

10.307. Per dvi gretimas kvadrato viršūnes nubrėžtas apskritimas, kurio liestinė, einanti iš trečiosios viršūnės, yra tris kartus ilgesnė už kvadrato kraštinę a. Apskaičiuokite skritulio plotą.

10.308. Duotas kvadratas, kurio kraštinė a. Kvadrato išorėje ties kiekviena jo kraštine nubraižytos trapecijos, kurių viršutiniai pagrindai ir šoninės kraštinės sudaro taisyklingąjį dvylikakampį. Apskaičiuokite jo plotą.

10.309. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas 32 cm², smailusis kampas 30°. Raskite trapecijos kraštines.

10.310. Lygiašonės trapecijos aukštinė 14 cm, o pagrindai 16 cm ir 12 cm. Apskaičiuokite apibrėžtinio skritulio plotą.

10.311. Rombo įstrižainių ilgių santykis 3 : 4. Kiek kartų rombo plotas didesnis už įbrėžto į jį skritulio plotą?

10.312. Į R spindulio skritulį įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Jo aukštinės pratęstos tiek, kad susikirstų su apskritimu. Šiuos susikirtimo taškus sujungus, gautas naujas trikampis. Apskaičiuokite trikampiams nepriklausančios skritulio dalies plotą.

10.313. Du R spindulio apskritimai susikerta taip, kad kiekvienas jų eina per kito centrą. Kitų dviejų to paties spindulio apskritimų centrai yra pirmųjų dviejų apskritimų susikirtimo taškai. Raskite visų keturių skritulių bendros dalies plotą.

10.314. Rombo $ABCD$ įstrižainės lygios 3 cm ir 4 cm. Iš bukojo kampo viršūnės B nubrėžtos dvi aukštinės BE ir BF. Apskaičiuokite keturkampio $BFDE$ plotą.

10.315. Trikampio dviejų kampų didumų santykis lygus 2, o jiems priešingų kraštinių ilgių skirtumas lygus 2 cm; trečiosios trikampio kraštinės ilgis 5 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.316. Atstumas nuo stačiojo trikampio įžambinės vidurio taško iki vieno iš statinių 5 cm, o atstumas nuo to statinio vidurio taško iki įžambinės 4 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.317. Trikampio ABC kraštinė $a=15$ cm, $b=14$ cm, $c=$ $=13$ cm. Iš viršūnės B nubrėžta aukštinė ir pusiaukampinė. Apskaičiuokite tarp jų esančio trikampio plotą.

10.318. Trapecijos pagrindai a ir b. Raskite ilgį atkarpos, lygiagrečios pagrindams ir dalijančios trapeciją į lygiaplotes dalis.

10.319. Lygiašonės trapecijos įstrižainės statmenos viena kitai, o jos plotas lygus a^2. Raskite trapecijos aukštinę.

10.320. Vieno trikampio pusiaukraštinės lygios kito trikampio kraštinėms. Raskite tų trikampių plotų santykį.

10.321. Trikampio pusiaukraštinės 3 cm, 4 cm ir 5 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.322. Apskritimo, kurio centras O, styga AB kerta skersmenį taške M ir sudaro su juo 60° kampą. $AM=10$ cm, o $BM=$ $=4$ cm. Raskite OM.

10.323. Lygiašonės trapecijos įstrižainė 10 cm, o plotas 48 cm². Apskaičiuokite trapecijos aukštinę.

10.324. Į trikampį įbrėžtas skritulys. Tiesės, jungiančios jo centrą su viršūnėmis, dalija trikampį į 4 cm², 13 cm² ir 15 cm² dalis. Raskite trikampio kraštines.

10.325. Trikampio pagrindas lygus 20 cm, šoninių kraštinių pusiaukraštinės 18 cm ir 24 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.326. Trikampio pusiaukraštinės 5 m, 6 m ir 5 m. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.327. Dvi trikampio kraštinės lygios 1 cm ir $\sqrt{15}$ cm, o trečiosios kraštinės pusiaukraštinė lygi 2 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.328. Trikampio kraštinės lygios 3 cm, 4 cm ir 5 cm. Apskaičiuokite plotus trikampių, į kuriuos duotąjį trikampį dalija aukštinė ir pusiaukraštinė, nubrėžtos į ilgiausią kraštinę.

10.329. Trikampio kraštinės 13 cm, 14 cm ir 15 cm. Apskaičiuokite plotus trikampių, į kuriuos duotąjį trikampį dalija jo pusiaukraštinės.

10.330. Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra lygties ax^2+bx+ $+c=0$ šaknys. Raskite į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

10.331. Nubrėžtos stačiakampio, kurio kraštinės a ir b, visų kampų pusiaukampinės. Raskite jų sudaryto keturkampio plotą.

10.332. Stačiojo trikampio perimetras $2p$, o plotas m^2. Raskite trikampio kraštines.

10.333. Lygiagretainio $ABCD$ $AB=153$ cm, $AD=180$ cm, $BE=135$ cm (BE — aukštinė). Tiesės, statmenos AD, dalija lygiagretainį į tris lygiaplotes figūras. Kokiu atstumu nuo taško A yra tų statmenų susikirtimo su tiese AD taškai?

10.334. Kvadrato, kurio kraštinė a, viduje, kiekvieną kraštinę laikant skersmeniu, nubrėžti pusapskritimiai. Raskite jų lankų apribotos rožełės plotą.

10.335. Išpjovos perimetras 28 cm, o jos plotas 49 cm². Apskaičiuokite išpjovos lanko ilgį.

10.336. Į lygiakraštį trikampį ABC, kurio kraštinė $a=2$ cm, įbrėžtas skritulys. Taškas A yra kito skritulio, kurio spindulys 1 cm, centras. Raskite tų skritulių sankirtos plotą.

10.337. Taisyklingojo trikampio, kurio kraštinė a, viduje nubrėžti trys lygūs apskritimai. Kiekvienas jų liečia dvi trikampio kraštines ir kitus du apskritimus. Raskite šiems apskritimams nepriklausančios trikampio dalies plotą.

10.338. Kreivinį trikampį sudaro trys lygūs ir poromis besiliečiantys apskritimų lankai. Apskritimų spindulys lygus R. Raskite to trikampio plotą.

10.339. Lygiakraščio trikampio centras sutampa su apskritimo centru. Trikampio kraštinė 6 cm, apskritimo spindulys 2 cm. Apskaičiuokite už apskritimo esančios trikampio dalies plotą.

10.340. Į rombą įbrėžtas R spindulio apskritimas. Rombo ilgesnioji įstrižainė 4 kartus ilgesnė už įbrėžtinio apskritimo spindulį. Apskaičiuokite rombo plotą.

10.341. Stačiojo trikampio įžambinė c. Stačiojo kampo viršūnės projekcija įžambinėje ją dalija į dvi atkarpas, kurių trumpesniosios bei ilgesniosios santykis lygus ilgesniosios atkarpos ir visos įžambinės santykiui. Raskite trikampio plotą.

10.342. Lygiagretainio kraštinės bei įstrižainės atitinkamai lygios a, b, c ir f. Raskite lygiagretainio kampus, kai $a^4+b^4=c^2f^2$.

10.343. Dvi trikampio kraštinės lygios 35 cm ir 14 cm, o kampo tarp jų pusiaukampinė 12 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.344. Vieno rombo įstrižainės lygios 4 cm ir 6 cm, o antras rombas gautas pasukus pirmąjį 90° kampu apie jo centrą. Apskaičiuokite abiejų rombų bendros dalies plotą.

10.345. Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys 2 cm. To apskritimo lietimosi taškas dalija vieną iš kraštinių į 4 cm ir 6 cm ilgio atkarpas. Nustatykite trikampio rūšį ir apskaičiuokite jo plotą.

10.346. Skersmuo dalija skritulį į du pusskritulius. Į vieną jų įbrėžti du nauji pusskrituliai, kurie remiasi į duotojo skritulio spindulį kaip į savo skersmenį. Į kreivinę figūrą, apribotą šių trijų pusskritulių kontūrų, įbrėžtas skritulys. Kiek kartų jo plotas mažesnis už duotojo skritulio plotą?

10.347. Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės vienodai pasvirusios į kraštines BC ir AC. Nustatykite kampų A ir B priklausomybę.

10.348. Keturkampį įstrižainės dalija į keturis trikampius. Trijų trikampių plotai lygūs 10 cm², 20 cm² ir 30 cm²; kiekvieno plotas mažesnis už ketvirtojo trikampio plotą. Apskaičiuokite keturkampio plotą.

10.349. R spindulio apskritimo visas lankas padalytas į 4 dideles ir 4 mažas dalis, kurios kaitaliojasi viena su kita. Didelė dalis dvigubai ilgesnė už mažąją. Raskite plotą aštuoniakampio, kurio viršūnės yra apskritimo lanko dalijimo taškai.

10.350. Trikampio ABC, kurio plotas S, pusiaukraštinėje BD pažymėtas taškas E taip, kad $DE=\frac{1}{4}BD$. Per tašką E nubrėžta tiesė AE, kertanti kraštinę BC taške F. Raskite trikampio AFC plotą.

10.351. Sakykime, BD — trikampio ABC aukštinė, E — kraštinės BC vidurio taškas. $AB=30$ cm, $BC=26$ cm, $AC=28$ cm. Apskaičiuokite apie trikampį BDE apibrėžto skritulio spindulį.

10.352. Trikampio įžambinę laikant kraštine, nubraižytas lygiakraštis trikampis. Jo plotas dvigubai didesnis už duotojo trikampio plotą. Raskite statinių santykį.

10.353. Kiekvienoje trikampio pusiaukraštinėje pažymėtas taškas, kuris ją dalija santykiu 1 : 3 skaičiuojant nuo viršūnės. Kiek kartų trikampio, kurio viršūnės yra šiuose taškuose, plotas mažesnis už duotojo trikampio plotą?

10.354. Taškas M yra lygiakraščio trikampio ABC viduje. Žinoma, kad $AM=BM=2$ cm, o $CM=1$ cm. Apskaičiuokite to trikampio plotą.

10.355. Lygiašonio trikampio kraštinės lygios 8, 5 ir 5. Iš tam tikro taško į kraštines nubrėžti statmenys dalija trikampį į tris lygiaplotes dalis. Raskite atstumą nuo to taško iki kiekvienos duotojo trikampio kraštinės.

10.356. Įrodykite, kad iš visų stačiakampių, įbrėžtų į tą patį apskritimą, kvadrato plotas yra didžiausias.

10.357. Trapecijos $ABCD$ pagrindas $AD=24$ cm, $BC=8$ cm, o įstrižainė $AC=13$ cm, $BD=5\sqrt{17}$ cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.358. Trapecijos $ABCD$ pagrindas $AD=a$, $BC=b$. BC tęsinyje taškas M pažymėtas taip, kad tiesė AM nukerta nuo trapecijos dalį, kurios plotas lygus $\frac{1}{4}$ trapecijos ploto. Raskite atkarpos CM ilgį.

10.359. Trapecijos $ABCD$ pagrindas $AD=12$ cm, o $BC=8$ cm. Spindulyje BC pažymėtas taškas M taip, kad AM dalija trapeciją į dvi lygiaplotes figūras. Raskite CM.

10.360. Apie lygiašonę trapeciją apibrėžto apskritimo centras dalija jos aukštinę santykiu 3 : 4. Apskritimo spindulys lygus 10, o trapecijos vidurinė linija lygi aukštinei. Raskite trapecijos pagrindus.

C grupė

10.361. Trikampio ABC kampas A dvigubai didesnis už kampą B, o prieš tuos kampus esančios kraštinės atitinkamai lygios 12 cm ir 8 cm. Apskaičiuokite trečiąją trikampio kraštinę.

10.362. Stačiojo trikampio įžambinė m, įbrėžtinio apskritimo spindulys r. Raskite statinius. Kaip turi būti susiję dydžiai r ir m, kad uždavinys turėtų sprendinį?

10.363. Į lygiašonį trikampį, kurio pagrindas 12 cm, įbrėžtas apskritimas, taip pat nubrėžtos trys jo liestinės, kurios nukerta nuo duotojo trikampio tris mažus trikampius. Jų perimetrų suma lygi 48 cm. Raskite duotojo trikampio šoninę kraštinę.

10.364. Į lygiašonį trikampį įbrėžtas apskritimas. Lietimosi taškai dalija kiekvieną šoninę kraštinę į m ir n ilgio atkarpas skaičiuojant nuo viršūnės. Nubrėžtos trys apskritimo liestinės, lygiagrečios kiekvienai iš trikampio kraštinių. Raskite liestinių atkarpų, esančių tarp trikampio kraštinių, ilgį.

10.365. Apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimo spindulių santykis lygus $\sqrt{3}+1$. Raskite stačiojo trikampio smailiuosius kampus.

10.366. Du apskritimai iš išorės liečiasi taške A. Stygos, kurios jungia tašką A su vienos iš bendrų išorinių liestinių lietimosi taškais, lygios 6 cm ir 8 cm. Raskite apskritimų spindulius.

10.367. Taisyklingojo dešimtkampio kraštinę išreikškite apibrėžtinio apskritimo spinduliu R.

10.368. Trikampio ABC kraštinė $a=18$ cm, $b=15$ cm, $c=12$ cm. Apskaičiuokite kampo A pusiaukampinės ilgį.

10.369. Į trikampį, kurio perimetras 20 cm, įbrėžtas apskritimas. Jo liestinės, lygiagrečios pagrindui, atkarpa, esanti tarp trikampio kraštinių, yra 2,4 cm ilgio. Raskite trikampio pagrindą.

10.370. Ilgesnioji iš lygiagrečių trapecijos kraštinių lygi a, trumpesnioji b, nelygiagrečios kraštinės lygios c ir d. Raskite trapecijos plotą.

10.371. Taškas C_1 — trikampio ABC aukštinės CC_1 pagrindas. Nustatykite kampų A ir B priklausomybę, kai $CC_1^2=C_1A\cdot C_1B$.

10.372. Trikampio ABC kampo A pusiaukampinė kerta apibrėžtinį apskritimą taške D. Į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras nutolęs nuo taško D atstumu n. Raskite stygos DC ilgį.

10.373. Į trikampį, kurio kraštinės 6 cm, 10 cm ir 12 cm, įbrėžtas apskritimas. Jo liestinė kerta dvi ilgesnes kraštines. Raskite nukirsto trikampio perimetrą.

10.374. Lygiašonės trapecijos pagrindai 4 cm ir 8 cm, plotas 21 cm². Ką kerta prie ilgesniojo pagrindo esančio kampo pusiaukampinė: trapecijos trumpesnį pagrindą ar šoninę kraštinę?

10.375. Į apskritimą įbrėžtas taisyklingasis trikampis ABC. Pasuktas apie apskritimo centrą 90° kampu, jis atsiduria padėtyje $A_1B_1C_1$. Apskritimo spindulys lygus R. Apskaičiuokite šešiakampio $AA_1BB_1CC_1$ plotą.

10.376. Trapecijos $ABCD$ pagrindai AB ir DC lygūs a ir b. Tiesė, lygiagreti AB, kerta kraštines BC ir AD taškuose M ir N. Trapecijos $ABMN$ ir $NMCD$ yra lygiaplotės. Apskaičiuokite MN.

10.377. Trikampio kampo pusiaukampinė dalija priešais esančią kraštinę į 4 cm ir 2 cm ilgio atkarpas. Į tą pačią kraštinę nubrėžta aukštinė lygi $\sqrt{15}$ cm. Koks yra sveikuoju skaičiumi išreikštas trikampio kraštinių ilgis?

10.378. Du apskritimai liečiasi iš išorės. Jų spinduliai R ir r. Apskritimų bendrų išorinių liestinių lietimosi taškai A, B, C, D sujungti nuosekliai. Įrodykite, kad į keturkampį $ABCD$ galima įbrėžti apskritimą, ir raskite jo spindulį.

10.379. Trikampio aukštinė bei pusiaukraštinė, nubrėžtos jo viduje iš vienos viršūnės, nesutampa ir sudaro lygius kampus su kraštinėmis, išeinančiomis iš tos pačios viršūnės. Pusiaukraštinė lygi m. Apskaičiuokite apibrėžtinio apskritimo spindulį.

10.380. Per trikampio ABC kraštinės AB tašką D nubrėžta tiesė, lygiagreti AC ir kertanti kraštinę BC taške E. Įrodykite, kad AE, CD ir pusiaukraštinė, nubrėžta per viršūnę B, susikerta viename taške.

10.381. 2 cm ilgio trikampio aukštinė dalija jo kampą santykiu 2 : 1, o pagrindą — į dalis, kurių trumpesnioji lygi 1 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.382. Duoti du koncentriniai apskritimai. Įrodykite, kad atstumų nuo vieno apskritimo taško iki kito apskritimo skersmens galų kvadratų suma nepriklauso nei nuo pasirinkto taško, nei nuo pasirinkto skersmens.

10.383. Trikampio ABC pusiaukraštinės AL ir BM susikerta taške K. Viršūnė C priklauso apskritimui, kuris nubrėžtas per taškus K, L, M. Įrodykite, kad pusiaukraštinė CN sudaro su kraštinėmis AC ir BC tokius pat kampus, kaip ir pusiaukraštinės BM ir AL su kraštine AB.

10.384. Trikampio ABC pusiaukampinės AD ir CE susikerta taške F. Taškai B, D, E, F priklauso vienam apskritimui. Įrodykite, kad kampas B lygus 60°.

10.385. Trikampio plotas S. Kiekviena trikampio kraštinė padalyta į tris dalis santykiu $m:n:m$. Apskaičiuokite plotą šešiakampio, kurio viršūnės yra dalijimo taškai.

10.386. Atstumai nuo apskritimo, įbrėžto į statųjį trikampį, centro iki jo smailiųjų kampų viršūnių lygūs $\sqrt{5}$ ir $\sqrt{10}$. Raskite statinius.

10.387. Trikampio ABC kiekviena aukštinė h_c ir h_b yra ne mažesnė už kraštinę, į kurią ji nubrėžta. Raskite trikampio kampus.

10.388. Trikampio ABC kraštinė BC lygi a; kiekviena iš dviejų aukštinių, nubrėžtų į kraštines AB ir AC, yra ne mažesnė už kraštinę, į kurią ji nuleista. Raskite kraštines AB ir AC.

10.389. Lygiašonio trikampio ABC $AB=BC=25$ cm ir $AC=14$ cm. Skritulys liečia kraštinę BC taške D (aukštinės AD pagrinde) ir eina per kraštinės AC vidurio tašką. Apskaičiuokite skritulio spindulį.

10.390. Trikampio ABC kraštinė $a=14$ cm, $b=15$ cm, $c=13$ cm. Raskite atstumą nuo aukštinių susikirtimo taško iki viršūnės A.

10.391. Atkarpoje AC duotas taškas B, be to, $AB=14$ cm, $BC=28$ cm. Atkarpas AB, BC ir AC laikant skersmenimis, vienoje pusplokštumėje ribos AB atžvilgiu nubrėžti pusapskritimiai. Raskite spindulį apskritimo, liečiančio visus tris pusapskritimius.

10.392. Į R spindulio skritulį įbrėžtas lygiakraštis trikampis ir kvadratas, turintys bendrą viršūnę. Apskaičiuokite trikampio ir kvadrato bendros dalies plotą.

10.393. Apie apskritimą, kurio spindulys $R=1$ cm, apibrėžta lygiašonė trapecija. Jos plotas 5 cm². Raskite plotą keturkampio, kurio viršūnės yra apskritimo ir trapecijos lietimosi taškai.

10.394. Trikampio ABC viduje pasirinktas bet kuris taškas ir per jį nubrėžtos trys tiesės, lygiagrečios trikampio kraštinėms. Jos dalija trikampį ABC į šešias dalis, kurių trys yra trikampiai. Jų plotai S_1, S_2 ir S_3. Įrodykite, kad trikampio ABC plotas lygus $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

10.395. Keturių skritulių centrai išsidėstę kvadrato, kurio kraštinė a, viršūnėse. Tų skritulių spinduliai lygūs a. Apskaičiuokite skritulių bendros dalies plotą.

10.396. Į R spindulio apskritimą įbrėžti trys lygūs apskritimai, kurie liečia išorinį apskritimą ir patys liečiasi poromis. Apskaičiuokite tų trijų apskritimų apribotos figūros plotą.

10.397. Į R spindulio apskritimą įbrėžti šeši lygūs apskritimai, kurių kiekvienas liečia duotąjį apskritimą ir du gretimus. Apskaičiuokite šių šešių apskritimų apribotos figūros plotą.

10.398. Į R spindulio apskritimą įbrėžti keturi lygūs apskritimai, kurių kiekvienas liečia duotąjį apskritimą ir du gretimus. Apskaičiuokite šių keturių apskritimų apribotos figūros plotą.

10.399. Taisyklingojo trikampio kraštinė a. Iš jo centro nubrėžtas apskritimas, kurio spindulys $\frac{a}{3}$. Apskaičiuokite apskritimui nepriklausančios trikampio dalies plotą.

10.400. Žinomos dvi trikampio kraštinės a ir b bei kampo tarp jų pusiaukampinė l. Apskaičiuokite trikampio plotą.

10.401. Skritulio plotas Q kv. vnt. didesnis už įbrėžto į jį taisyklingojo dvylikakampio plotą. Apskaičiuokite trikampio spindulį.

10.402. Taškai A, B, C, D, E, F dalija apskritimą, kurio spindulys R ir centras taške O, į šešias lygias dalis. Apskaičiuokite plotą figūros COE, kurią riboja lankas OC (jo centras taške B), lankas OE (jo centras taške F) ir lankas CE (jo centras taške A).

10.403. Nubrėžta stačiojo trikampio ABC ($\angle C=90°$) aukštinė CD. Į trikampius ACD ir BCD įbrėžtų apskritimų spinduliai lygūs 0,6 cm ir 0,8 cm. Raskite į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulį.

10.404. Trikampio ABC plotas S_1; trikampio AOB (čia O — aukštinių susikirtimo taškas) plotas S_2. Tiesėje CO taškas K pažymėtas taip, kad trikampis ABK — statusis. Įrodykite, kad trikampio ABK plotas lygus plotų S_1 ir S_2 geometriniam vidurkiui.

10.405. Į lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė a, įbrėžtas apskritimas. Jo liestinė nubrėžta taip, kad jos atkarpa trikampio viduje lygi b. Raskite plotą trikampio, kurį ši liestinė nukerta nuo duotojo trikampio.

10.406. Smailiojo trikampio ABC aukštinių pagrindai yra kito trikampio viršūnės. Pastarojo trikampio perimetras lygus $2p$. Raskite trikampio ABC plotą, kai apie jį apibrėžto apskritimo spindulys lygus R.

10.407. Taškai M, N ir P dalija trikampio ABC kraštines santykiu $AM:MB=BN:NC=CP:PA=1:4$. Apskaičiuokite tiesių AN, BP ir CM apriboto trikampio ir trikampio ABC plotų santykį.

10.408. Apie 5 cm spindulio apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija. Atstumas tarp jos šoninių kraštinių lietimosi taškų lygus 8 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.409. Trikampio kraštinės lygios 13, 14 ir 15. Tiesės, statmenos ilgiausiai kraštinei, dalija trikampį į tris lygiaplotes dalis. Raskite atstumus iki šių tiesių nuo artimiausių joms trikampio viršūnių, esančių ilgiausioje kraštinėje.

10.410. Į trapeciją, kurios trumpesnysis pagrindas lygus a, įbrėžtas apskritimas. Lietimosi taškas dalija vieną trapecijos šoninių kraštinių į m ir n ilgio atkarpas skaičiuojant nuo ilgesniojo pagrindo. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

10.411. Duoti du taisyklingieji trikampiai, kurių plotas S. Antrasis jų gautas pasukus pirmąjį apie jo centrą 30° kampu. Apskaičiuokite tų trikampių sankirtos plotą.

10.412. Stačiojo trikampio plotas lygus $\frac{2r^2}{3}$; čia r — apskritimo, liečiančio vieną statinį ir kito statinio bei įžambinės tęsinius, spindulys. Raskite trikampio kraštines.

10.413. Trapecijos įstrižainės dalija ją į keturis trikampius. Jeigu dviejų iš jų, esančių prie trapecijos pagrindų, plotai lygūs p^2 ir q^2, tai trapecijos plotas lygus $(p+q)^2$. Įrodykite.

10.414. Per keturkampio $ABCD$ įstrižainės BD vidurio tašką nubrėžta tiesė, lygiagreti kitai įstrižainei AC ir kertanti kraštinę AD taške E. Įrodykite, kad atkarpa CE dalija keturkampį $ABCD$ į lygiaplotes dalis.

10.415. Tiesė, lygiagreti stačiosios trapecijos pagrindams, dalija ją į dvi trapecijas. Į kiekvieną šių trapecijų galima įbrėžti apskritimą. Raskite pradinės trapecijos pagrindus, kai jos šoninės kraštinės lygios c ir d, be to, $c<d$.

10.416. Apskaičiuokite trikampio plotą žinodami tris jo aukštines h_1, h_2 ir h_3.

10.417. Į statųjį trikampį ABC ($\angle C=90°$) įbrėžtas apskritimas, liečiantis šonines kraštines taškuose A_1, B_1, C_1. $AC=4$ cm, $BC=3$ cm. Raskite trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ plotų santykį.

10.418. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis, kurio kraštinių ilgiai a, b, c ir d. Apskaičiuokite to keturkampio įstrižainių ilgių santykį.

10.419. Skritulys, kurio centras yra trikampio ABC kraštinėje AB, liečia kitas dvi jo kraštines. Apskaičiuokite skritulio plotą, kai $a=13$ cm, $b=14$ cm, $c=15$ cm; čia a, b ir c — trikampio kraštinių ilgiai.

10.420. Į trikampį, kurio pagrindas a, įbrėžtas kvadratas. Viena jo kraštinė priklauso trikampio pagrindui. Kvadrato plotas sudaro 1/6 trikampio ploto. Apskaičiuokite trikampio aukštinę ir kvadrato kraštinę.

10.421. Trikampio aukštinė, lygi 2 cm, dalija trikampio kampą santykiu $2:1$, o trikampio pagrindą — į dvi dalis, kurių trumpesnioji lygi 1 cm. Apskaičiuokite to trikampio plotą.

10.422. Stačiojo trikampio stačiojo kampo pusiaukampinė dalija įžambinę į a ir b ilgio atkarpas. Raskite plotą kvadrato, kurio kraštinė yra ta pusiaukampinė.

10.423. Apie $R=1$ cm spindulio apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios plotas 5 cm². Apskritimo ir trapecijos lietimosi taškai yra keturkampio viršūnės. Apskaičiuokite to keturkampio plotą.

10.424. Iš lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė a, abiejų pagrindo viršūnių nubrėžti du spinduliai, sudarantys su tais pagrindais 15° ir 30° kampus. Raskite plotą keturkampio, kurio viršūnės yra nubrėžtų spindulių susikirtimo taškai.

10.425. Per apskritimo skersmens tašką M nubrėžta styga AB, kuri su skersmeniu sudaro 30° kampą. Apskritimo spindulys lygus 4 cm. Per tašką B nubrėžta styga BC, statmena duotajam skersmeniui. Raskite trikampio ABC plotą, kai $AM:MB=2:3$.

11 SKYRIUS
STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

1⁰. Bet kokia prizmė (l — šoninė briauna; P — pagrindo perimetras; S — pagrindo plotas; H — aukštinė; P_{pj} — statmenojo pjūvio perimetras; $S_{šon}$ — šoninio paviršiaus plotas, arba šoninis paviršius; V — tūris):

$S_{šon}=P_{pj}l$; (11.1) $V=SH$. (11.2)

2⁰. Stačioji prizmė:

$S_{šon}=Pl$. (11.3)

3⁰. Stačiakampis gretasienis (a, b, c — jo matmenys; d — įstrižainė):

$S_{šon}=PH$; (11.4) $V=abc$; (11.5) $d^2=a^2+b^2+c^2$. (11.6)

4⁰. Kubas (a — briauna):

$V=a^3$; (11.7) $d=a\sqrt{3}$. (11.8)

5⁰. Bet kokia piramidė (S — pagrindo plotas; H — aukštinė; V — tūris):

$$V=\frac{1}{3}SH. \quad (11.9)$$

6⁰. Taisyklingoji piramidė (P — pagrindo perimetras; l — apotema; $S_{šon}$ — šoninis paviršius):

$S_{šon}=\frac{1}{2}Pl$; (11.10) $V=\frac{1}{3}SH$. (11.11)

7⁰. Bet kokia nupjautinė piramidė (S_1 ir S_2 — pagrindų plotai; h — aukštinė; V — tūris):

$$V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}). \quad (11.12)$$

8⁰. Taisyklingoji nupjautinė piramidė (P_1 ir P_2 — pagrindų perimetrai; l — apotema; $S_{šon}$ — šoninis paviršius):

$$S_{šon}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)l. \quad (11.13)$$

9⁰. Ritinys (R — pagrindo spindulys; H — aukštinė; $S_{šon}$ — šoninis paviršius; V — tūris):

$S_{šon}=2\pi RH$; (11.14) $V=\pi R^2H$. (11.15)

10⁰. Kūgis (R — pagrindo spindulys; H — aukštinė; l — sudaromoji; $S_{šon}$ — šoninis paviršius; V — tūris):

$S_{šon}=\pi Rl$; (11.16) $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. (11.17)

11⁰. Rutulys, sfera (R — rutulio spindulys; S — rutulio paviršiaus plotas; V — tūris):

$S=4\pi R^2$; (11.18) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. (11.19)

14. Užsak. Nr. 1941.

12^0. **Rutulio nuopjova** (R — rutulio spindulys; h — nuopjovos aukštinė; S — nuopjovos sferinio paviršiaus plotas; V — tūris):

$$S=2\pi Rh; \quad (11.20) \qquad V=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right). \quad (11.21)$$

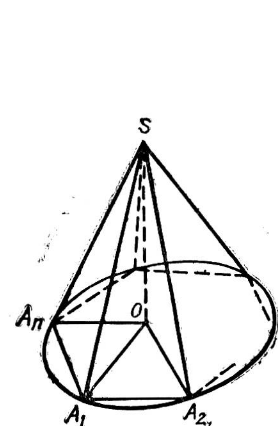
13^0. **Rutulio išpjova** (R — rutulio spindulys; h — išpjovos aukštinė; V — tūris):

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h. \qquad (11.22)$$

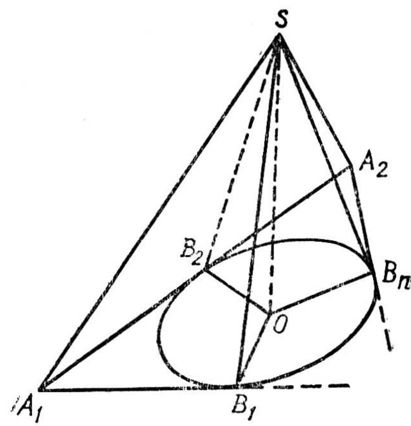
PAPILDOMOS PRIZMĖS IR PIRAMIDĖS ELEMENTŲ SĄSAJOS

1^0. Tarkime, kad piramidei galioja viena iš šių dviejų sąlygų: a) visos šoninės briaunos sudaro su pagrindo plokštuma lygius kampus; b) visos šoninės briaunos vienodo ilgio. Tada piramidės viršūnė projektuojama į centrą apskritimo, apibrėžto apie piramidės pagrindą (tas taškas kartu yra ir vidurio statmenų piramidės pagrindo kraštinėms susikirtimo taškas).

□ Sakykime, O — n-kampės piramidės $SA_1A_2\ldots A_n$ aukštinės pagrindas (11.1 pav.); SA_1, SA_2, ..., SA_n — jos šoninės briaunos; OA_1, OA_2, ..., OA_n —



11.1 pav.



11.2 pav.

jų projekcijos pagrindo plokštumoje; SA_1O, SA_2O, ..., SA_nO — kampai, kuriuos sudaro piramidės briaunos su pagrindo plokštuma. Pagal a) sąlygą tie kampai yra lygūs; todėl lygūs ir statieji trikampiai SOA_1, SOA_2, ..., SOA_n, turintys bendrą statinį SO. Iš čia išplaukia, kad $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$, t. y. taškas O vienodai nutolęs nuo pagrindo viršūnių A_1, A_2, ..., A_n; vadinasi, jis yra apie pagrindą apibrėžto apskritimo centras.

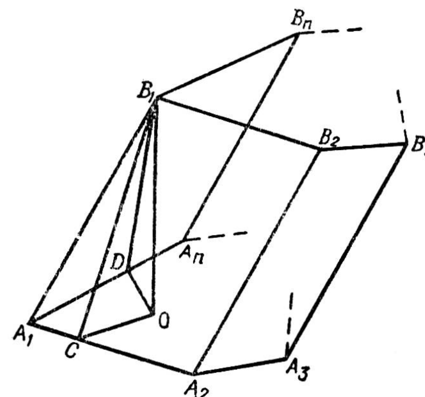
Jeigu a) sąlygą pakeisime b) sąlyga, tai trikampių SOA_1, SOA_2, ..., SOA_n lygybė išplauks iš tokio teiginio: be bendro statinio, tie trikampiai turi dar ir lygias įžambines $SA_1=SA_2=\ldots=SA_n$. Taigi $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$, t. y. O — apie piramidės pagrindą apibrėžto apskritimo centras. ■

2^0. Sakykime, piramidei galioja viena iš šių dviejų sąlygų: a) visos šoninės briaunos sudaro su pagrindu lygius kampus; b) visų šoninių briaunų apotemų ilgiai lygūs. Tada piramidės viršūnė projektuojama į centrą apskritimo, įbrėžto į piramidės pagrindą (tas pats taškas yra piramidės pagrindo kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas).

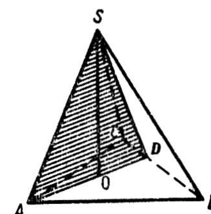
□ Sakykime, O — n-kampės piramidės $SA_1A_2\ldots A_n$ aukštinės pagrindas (11.2 pav.); SB_1, SB_2, ..., SB_n — apotemos (šoninių briaunų aukštinės). Apotemų projekcijos OB_1, OB_2, ..., OB_n pagrindo plokštumoje statmenos pagrindo kraštinėms (pagal trijų statmenų teoremą), vadinasi, jos išreiškia atstumus nuo taško O iki tų kraštinių, o kampai SB_1O, SB_2O, ..., SB_nO yra atitinkamų dvisienių kampų tiesiniai kampai. Pagal a) sąlygą tie kampai yra lygūs, todėl lygūs ir statieji trikampiai SOB_1, SOB_2, ..., SOB_n, turintys bendrą statinį SO. Iš čia išplaukia, kad $OB_1=OB_2=\ldots=OB_n$, t. y. taškas O vienodai nutolęs nuo pagrindo kraštinių; vadinasi, jis yra į pagrindą įbrėžto apskritimo centras.

Jeigu a) sąlygą pakeisime b) sąlyga, tai suprasime, kad trikampiai SOB_1, SOB_2, ..., SOB_n yra lygūs, nes, be bendro statinio SO, turi ir lygias įžambines $SB_1=SB_2=\ldots=SB_n$. Taigi $OB_1=OB_2=\ldots=OB_n$, t. y. O — į piramidės pagrindą įbrėžto apskritimo centras. ■

3^0. Jeigu pasvirosios prizmės šoninė briauna A_1B_1 sudaro lygius kampus su pagrindo kraštinėmis, išeinančiomis iš viršūnės A_1 (11.3 pav.), tai aukštinės B_1O pagrindas O yra kampo A_1 pusiaukampinėje.



11.3 pav.



11.4 pav.

□ Nubrėžkime $OC\perp A_1A_2$, $OD\perp A_1A_n$ ir atkarpas B_1C, B_1D. Pagal trijų statmenų teoremą $B_1C\perp A_1A_2$ ir $B_1D\perp A_1A_n$. Statieji trikampiai A_1CB_1 ir A_1DB_1 lygūs, nes turi bendrą įžambinę A_1B_1 ir lygius kampus ($\angle B_1A_1C=\angle B_1A_1D$ pagal sąlygą). Vadinasi, $B_1C=B_1D$ ir $\triangle B_1OC=\triangle B_1OD$; iš čia $OC=OD$. Taigi taškas O vienodai nutolęs nuo kampo A_1 kraštinių, vadinasi, jis yra kampo A_1 pusiaukampinėje A_1O. ■

Šį teiginį galima taip suformuluoti: jeigu trisienio kampo du smailieji plokštieji kampai lygūs, tai jų bendros briaunos projekcija trečio plokščiojo kampo plokštumoje yra jo pusiaukampinė.

4^0. Jeigu trikampės piramidės aukštinė eina per pagrindo trikampio aukštinių susikirtimo tašką, tai piramidės priešingos briaunos yra statmenos. Teisingas ir atvirkštinis teiginys.

□ Sakykime, AD — trikampio ABC aukštinė (11.4 pav.); tada $BC\perp AD$, taigi $BC\perp AO$. Bet AO yra briaunos AS projekcija plokštumoje ABC, vadinasi, pagal trijų statmenų teoremą $BC\perp AS$.

Analogiškai įrodoma, kad statmenos ir kitos dvi priešingų piramidės briaunų poros, t. y. $AB\perp SC$ ir $AC\perp SB$.

Dabar įrodysime atvirkštinį teiginį: jeigu $BC\perp AS$, tai trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas yra piramidės aukštinės pagrindas O (11.4 pav.). Kadangi $SO\perp$pl. ABC (pagal sąlygą), tai AO yra SA projekcija plokštumoje ABC. Bet tiesė BC, priklausanti plokštumai ABC, yra statmena briaunai AO (pagal sąlygą); todėl $BC\perp AO$ (pagal trijų statmenų teoremą). Vadinasi, taškas O yra trikampio ABC aukštinėje AD. Analogiškai įrodoma, kad O priklauso

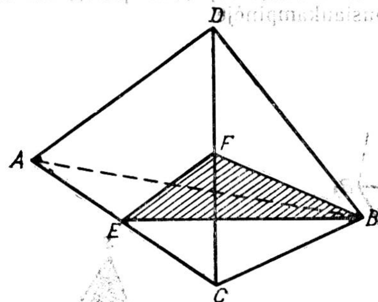
ir kitai trikampio ABC aukštinei, taigi jis yra piramidės pagrindo aukštinių susikirtimo taškas. ■

5°. Jeigu SO — piramidės $SABC$ aukštinė ir $SA \perp BC$, tai pl. $SAO \perp BC$ (11.4 pav.).

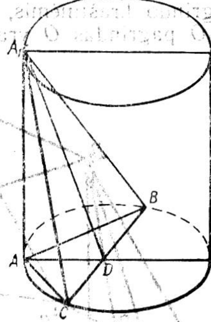
□ $SA \perp BC$ (pagal sąlygą), $SO \perp BC$ (nes $SO \perp$pl. ABC). Kadangi tiesė BC statmena kiekvienai iš dviejų tiesių SA ir SO, esančių plokštumoje SAO, tai pl. $SAO \perp BC$ (pagal tiesės ir plokštumos statmenumo požymį). ■

1 pavyzdys. Per piramidės $ABCD$ pagrindo ABC pusiaukraštinę BE ir briaunos DC vidurio tašką F nubrėžta plokštuma. Raskite figūros $ADBFE$ tūrį, kai piramidės $ABCD$ tūris lygus 40 cm³.

△ Figūros $ADBFE$ tūris lygus piramidžių $ABCD$ ir $ECBF$ tūrių skirtumui (11.5 pav.). Norėdami rasti piramidės $ECBF$ tūrį, palyginkime jį su piramidės



11.5 pav.



11.6 pav.

$ABCD$ tūriu. Tam pakanka nustatyti jų pagrindų plotų ir atitinkamų aukštinių santykius. Kadangi trikampio pusiaukraštinė dalija jį į dvi lygiaplotes dalis, tai $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. F yra briaunos DC vidurio taškas, todėl piramidės $ECBF$ aukštinė lygi pusei piramidės $ABCD$ aukštinės. Vadinasi, $V_{ECBF} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 10$ (cm³). Ieškomas tūris lygus 30 cm³. ▲

2 pavyzdys. Ritinio aukštinė H, jo pagrindo spindulys R. Į ritinį įdėta piramidė, kurios aukštinė sutampa su ritinio sudaromąja AA_1, o pagrindas yra lygiašonis trikampis ABC ($AB = AC$), įbrėžtas į ritinio pagrindą. Raskite piramidės šoninį paviršių, kai $\angle A = 120°$.

△ Nubrėžiame $AD \perp BC$ ir taškus A_1 ir D sujungiame atkarpa A_1D (11.6 pav.). Pagal trijų statmenų teoremą $A_1D \perp BC$. Kadangi lankas CAB lygus 120°, o lankai AC ir AB — po 60°, tai $BC = R\sqrt{3}$, $AB = R$. Iš $\triangle ABD$ randame: $AD = \frac{R}{2}$. Trikampiui AA_1D pritaikę Pitagoro teoremą, gauname:

$$A_1D = \sqrt{H^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + 4H^2}.$$ Vadinasi, $S_{\triangle A_1AB} = \frac{1}{2} AB \cdot AA_1 = \frac{1}{2} RH$;

$$S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} BC \cdot A_1D = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + 4H^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3R^2 + 12H^2}.$$

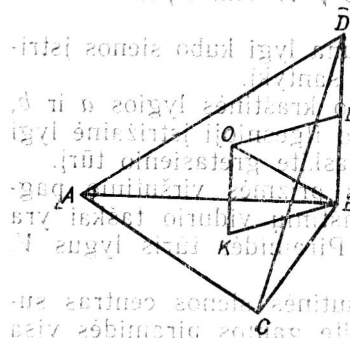
Galiausiai gauname:

$$S_{šon} = 2S_{\triangle A_1AB} + S_{\triangle A_1BC} = RH + \frac{1}{4} R\sqrt{3R^2 + 12H^2} = \frac{R}{4}(4H + \sqrt{3R^2 + 12H^2}).$$ ▲

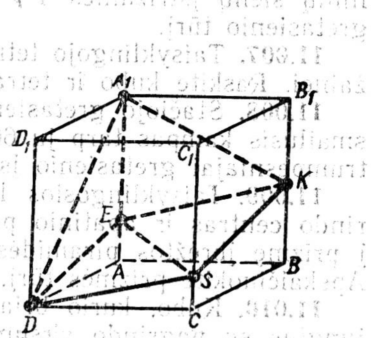
3 pavyzdys. Piramidės pagrindas yra taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė a. Viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai ir lygi b. Raskite apie piramidę apibrėžto rutulio spindulį.

△ Sakykime, O — apie piramidę $ABCD$ apibrėžto rutulio centras (11.7 pav.). Tada $OA = OB = OC = OD$. Nubrėžiame $OK \perp$pl. ABC ir $OE \perp DB$. Taškas O vienodai nutolęs nuo trikampio ABC viršūnių, todėl taškas K yra trikampio centras ir $BK = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Kadangi $OB = OD$, tai $EB = ED = \frac{b}{2}$. Pagal Pitagoro teoremą iš $\triangle OKB$ randame:

$$OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}.$$ ▲



11.7 pav.



11.8 pav.

4 pavyzdys. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio briaunos ilgis lygus a. Briaunoje AA_1 pažymėtas taškas E taip, kad $AE = \frac{a}{4}$. Raskite tūrį piramidės, kurios viršūnė yra taškas A_1, o pagrindas — kubo pjūvis, einantis per taškus D, E ir bet kurį vidinį briaunos BB_1 tašką.

△ Nubrėžiame pjūvį (11.8 pav.), briaunoje CC_1 pažymime tašką S, kuris yra dviejų trikampių piramidžių SEA_1K ir SEA_1D bendra viršūnė. Tų piramidžių tūrių suma lygi keturkampės piramidės A_1EKSD tūriui.

$S_{\triangle A_1DE} = \frac{1}{2} A_1E \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a = \frac{3a^2}{8}$. Atstumas nuo taško S iki plokštumos A_1ED lygus a, todėl $V_{SEA_1D} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot a = \frac{a^3}{8}$. Analogiškai $V_{SEA_1K} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot a\right)a = \frac{a^3}{8}$. Taigi ieškomas tūris lygus $\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8} = \frac{a^3}{4}$. ▲

A grupė

11.001. Piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio įžambinė c, o smailusis kampas 30°. Piramidės šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 45° kampu. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.002. Apie taisyklingojo tetraedro briauną apibrėžto apskritimo spindulys R. Apskaičiuokite tetraedro tūrį.

11.003. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, dvisienis kampas prie pagrindo 45°. Apskaičiuokite piramidės tūrį ir visą paviršių.

11.004. Pasvirosios trikampės prizmės vienos šoninės sienos plotas S, o atstumas nuo tos sienos plokštumos iki priešingos briaunos d. Raskite prizmės tūrį.

11.005. Taisyklingosios trikampės piramidės viršūnės plokščiasis kampas lygus 90°. Raskite piramidės šoninio paviršiaus ir jos pagrindo ploto santykį.

11.006. Stačiakampio gretasienio įstrižainė 13 cm, o jo šoninių sienų įstrižainės $4\sqrt{10}$ cm ir $3\sqrt{17}$ cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

11.007. Taisyklingojo tetraedro briauna lygi kubo sienos įstrižainei. Raskite kubo ir tetraedro tūrių santykį.

11.008. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios a ir b, smailusis kampas tarp jų 60°. Pagrindo ilgesnioji įstrižainė lygi trumpesniajai gretasienio įstrižainei. Raskite gretasienio tūrį.

11.009. Taisyklingosios keturkampės prizmės viršutinio pagrindo centras ir apatinio pagrindo kraštinių vidurio taškai yra į prizmę įbrėžtos piramidės viršūnės. Piramidės tūris lygus V. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

11.010. Kubo, kurio briauna a, viršutinės sienos centras sujungtas su pagrindo viršūnėmis. Raskite gautos piramidės visą paviršių.

11.011. Taisyklingosios piramidės pagrindas — daugiakampis, kurio vidaus kampų suma lygi 720°. Jos šoninė briauna, lygi l, su piramidės aukštine sudaro 30° kampą. Raskite piramidės tūrį.

11.012. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindą sudarančio kvadrato įstrižainė lygi šoninei briaunai a. Raskite piramidės visą paviršių ir tūrį.

11.013. Kubo viršutinio pagrindo centras sujungtas su apatinio pagrindo kraštinių vidurio taškais, o šie — nuosekliai vienas su kitu. Kubo briauna lygi a. Apskaičiuokite gautos piramidės visą paviršių.

11.014. Taisyklingosios šešiakampės piramidės apotema h, o dvisienis kampas prie pagrindo 60°. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

11.015. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, o dvisienis kampas prie pagrindo 60°. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

11.016. Keturkampės piramidės pagrindas — stačiakampis, kurio įstrižainė b ir kampas tarp įstrižainių 60°. Kiekviena šoninė briauna sudaro su pagrindo plokštuma 45° kampą. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.017. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė 1 cm, o šoninis paviršius 3 cm^2. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.018. Piramidės pagrindas — trikampis, kurio kraštinės lygios a, a ir b. Visos šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite piramidės tūrį.

11.019. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi l, o aukštinė h. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.020. Pasvirosios prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio kraštinės 3 dm ir 6 dm, o smailusis kampas 45°. Šoninė prizmės briauna lygi 4 dm ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 30° kampu. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

11.021. Piramidės kiekviena šoninė briauna lygi $\frac{269}{32}$ cm, o pagrindas yra trikampis, kurio kraštinės 13 cm, 14 cm ir 15 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.022. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė sudaro su šoninės sienos plokštuma 30° kampą, o pagrindo kraštinė lygi a. Raskite prizmės tūrį.

11.023. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė 6 dm, o aukštinė 4 dm. Plokštuma, lygiagreti pagrindui ir nutolusi nuo jo per 1 dm, nukerta nuo duotosios piramidės nupjautinę piramidę. Apskaičiuokite jos šoninį paviršių.

11.024. Taisyklingosios nupjautinės piramidės pagrindai — kvadratai, kurių kraštinės a ir b $(a>b)$. Šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 45° kampu. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

11.025. Taisyklingosios nupjautinės trikampės piramidės šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60° kampu. Apatinio ir viršutinio pagrindo kraštinės atitinkamai lygios a ir b $(a>b)$. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

11.026. Stačiojo gretasienio pagrindas — rombas. Plokštuma, nubrėžta per apatinio pagrindo vieną kraštinių ir viršutinio pagrindo priešingą kraštinę, sudaro su pagrindo plokštuma 45° kampą. Gauto pjūvio plotas lygus Q. Raskite gretasienio šoninį paviršių.

11.027. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna sudaro su pagrindo plokštuma 45° kampą, o įstrižinio pjūvio plotas lygus S. Raskite piramidės tūrį.

11.028. Piramidės pagrindas — rombas, kurio smailusis kampas 30°. Šoninės sienos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60° kampu. Į rombą įbrėžto skritulio spindulys lygus r. Raskite piramidės tūrį ir visą paviršių.

11.029. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Raskite piramidės tūrį ir visą paviršių.

11.030. Stačiojo gretasienio pagrindas — lygiagretainis, kurio kraštinės 1 cm ir 4 cm, o smailusis kampas 60°. Gretasienio ilgesnioji įstrižainė lygi 5 cm. Raskite jo tūrį.

11.031. Kubo, kurio briauna a, centras sujungtas su visomis jo viršūnėmis. Raskite kiekvienos gautos piramidės tūrį ir paviršių.

11.032. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio pagrindas 6 cm ir aukštinė 9 cm. Kiekviena šoninė briauna lygi 13 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.033. Trikampės piramidės šoninės briaunos viena kitai statmenos ir yra $\sqrt{70}$ cm, $\sqrt{99}$ cm ir $\sqrt{126}$ cm ilgio. Apskaičiuokite piramidės tūrį ir pagrindo plotą.

11.034. Taisyklingosios šešiakampės prizmės ilgiausioji įstrižainė lygi d, o šoninės sienos yra kvadratai. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

11.035. Atstumas nuo kubo įstrižainės iki susikertančios su ja briaunos lygus d. Raskite kubo tūrį.

11.036. Raskite tūrį oktaedro (taisyklingojo aštuoniakampio), kurio briauna a.

11.037. Prizmės pagrindas — kvadratas, kurio kraštinė a. Viena iš šoninių sienų — taip pat kvadratas, kita — rombas, kurio kampas 60°. Raskite visą prizmės paviršių.

11.038. Gretasienio pagrindas — kvadratas. Viršutinio pagrindo viena viršūnė vienodai nutolusi nuo apatinio pagrindo visų viršūnių ir atstumu b nutolusi nuo to pagrindo plokštumos. Pagrindo kraštinė a. Raskite visą gretasienio paviršių.

11.039. Kubo pagrindų centrai sujungti su šoninių sienų centrais. Kubo briauna lygi a. Apskaičiuokite gauto oktaedro paviršių.

11.040. Piramidės pagrindas — trikampis, kurio kraštinės 6 cm, 5 cm ir 5 cm. Piramidės šoninės sienos sudaro su jos pagrindu lygius dvisienius kampus po 45°. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.041. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi l ir sudaro su viena siena 30° kampą, o su kita — 45° kampą. Raskite gretasienio tūrį.

11.042. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės įstrižainė 18 cm, o pagrindo kraštinių ilgiai 14 cm ir 10 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.043. Stačiojo gretasienio pagrindas — rombas, kurio plotas Q. Įstrižinių pjūvių plotai S_1 ir S_2. Raskite gretasienio tūrį.

11.044. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi l ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite piramidės tūrį.

11.045. Taisyklingosios šešiakampės prizmės ilgiausia įstrižainė lygi d ir sudaro 30° kampą su šonine prizmės briauna. Raskite prizmės tūrį.

11.046. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinės a ir b. Gretasienio įstrižainė pasvirusi 30° kampu į šoninę sieną, kurioje yra pagrindo kraštinė, lygi b. Raskite gretasienio tūrį.

11.047. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės a ir b. Gretasienio įstrižainė pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite šoninį gretasienio paviršių.

11.048. Pasvirosios trikampės prizmės pagrindas — lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė a. Prizmės šoninė briauna lygi pagrindo kraštinei ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite prizmės tūrį.

11.049. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė a, o šoninis paviršius lygus pagrindų plotų sumai. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

11.050. Taisyklingosios šešiakampės piramidės aukštinė h, šoninė briauna l. Raskite šoninį piramidės paviršių.

11.051. Taisyklingosios trikampės piramidės viršūnės plokščiasis kampas 90°, o pagrindo kraštinė 3 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.052. Pjūvis eina per taisyklingosios trikampės prizmės šoninę briauną statmenai priešingai šoninei sienai. Jo plotas lygus Q. Prizmės pagrindo kraštinė a. Raskite visą prizmės paviršių.

11.053. Taisyklingojo tetraedro aukštinė h. Apskaičiuokite visą jo paviršių.

11.054. Piramidės kiekviena šoninė briauna lygi b. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio statinių santykis $m:n$, o įžambinė c. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.055. Kubo viršutinio pagrindo centras sujungtas su apatinio pagrindo kraštinių vidurio taškais. Raskite gautosios piramidės šoninį paviršių, kai kubo briauna lygi a.

11.056. Stačiosios prizmės pagrindas yra rombas. Įstrižinių šios prizmės pjūvių plotai P ir Q. Raskite šoninį prizmės paviršių.

11.057. Stačiakampio gretasienio įstrižainė d, o briaunų ilgių santykis $m:n:p$. Raskite gretasienio tūrį.

11.058. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindą sudarančio trikampio aukštinė h, o piramidės apotema m. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.059. Stačiosios trikampės prizmės šoninių sienų plotai M, N ir P, šoninė briauna l. Raskite prizmės tūrį.

11.060. Žinomas taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo plotas P ir tūris V. Apskaičiuokite visą prizmės paviršių.

11.061. Tiesė, einanti per taisyklingosios trikampės prizmės viršutinio pagrindo centrą ir apatinio pagrindo kraštinės vidurio tašką, pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Prizmės aukštinė h. Raskite šoninį prizmės paviršių.

11.062. Piramidės pagrindas yra kvadratas. Dvi šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai, o kitos dvi pasvirusios į ją 45° kampu. Vidurinė pagal didumą šoninė briauna lygi l. Raskite piramidės tūrį ir visą paviršių.

11.063. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, o šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite piramidės tūrį ir visą paviršių.

11.064. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė h, o visi plokštieji viršūnės kampai yra statūs. Raskite piramidės tūrį.

11.065. Taisyklingosios trikampės piramidės viršūnės plokščiasis kampas 90°, pagrindo plotas S. Raskite piramidės šoninį paviršių.

11.066. Raskite taisyklingojo tetraedro, kurio briauna a, tūrį.

11.067. Įstrižinė plokštuma dalija taisyklingąją šešiakampę prizmę, kurios šoninės briaunos lygios 3 cm, į dvi lygias keturkampes prizmes. Keturkampės prizmės šoninis paviršius lygus 30 cm^2. Apskaičiuokite šešiakampės prizmės tūrį.

11.068. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, o įstrižinis pjūvis lygiaplotis pagrindui. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių ir tūrį.

11.069. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna lygi pagrindo aukštinei, o pjūvio, nubrėžto per tą šoninę briauną ir pagrindo aukštinę, plotas lygus Q. Raskite prizmės tūrį.

11.070. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės a ir b, jos viena su kita sudaro 30° kampą. Šoninis paviršius S. Raskite gretasienio tūrį.

11.071. Taisyklingosios šešiakampės ir taisyklingosios trikampės piramidės pagrindų kraštinės lygios, o apotemos du kartus ilgesnės už pagrindo kraštines. Raskite šių piramidžių tūrių santykį.

11.072. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių santykis $m:n$, o įstrižinis pjūvis yra kvadratas, kurio plotas Q. Raskite gretasienio tūrį.

11.073. Stačiakampio gretasienio matmenys — 2 cm, 3 cm ir 6 cm. Kubo ir šio gretasienio tūrių santykis lygus jų paviršiaus plotų santykiui. Raskite kubo briaunos ilgį.

11.074. Piramidės pagrindas — taisyklingasis šešiakampis, o aukštinė 8 m. 3 m atstumu nuo viršūnės nubrėžta plokštuma, lygiagreti pagrindui. Gauto pjūvio plotas lygus 4 m^2. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.075. Įrodykite, kad kūgio tūris lygus ritinio, kurio pagrindas ir aukštinė tokie patys, tūriui minus to ritinio šoninio paviršiaus bei $\frac{1}{3}$ dalies jo pagrindo spindulio sandauga.

11.076. Kūgio aukštinė lygi pagrindo skersmeniui. Raskite kūgio pagrindo ploto ir šoninio paviršiaus santykį.

11.077. Kūgio tūrį išreikškite jo šoniniu paviršiumi S ir atstumu r nuo pagrindo centro iki sudaromosios.

11.078. Ritinys gaunamas sukant stačiakampį apie vieną jo kraštinių. Ritinio tūrį V išreikškite to stačiakampio plotu S ir apskritimo, kurį nubrėžia jo įstrižainių susikirtimo taškas, ilgiu C.

11.079. Jeigu dviejų lygių kūgių aukštinė yra bendra ir pagrindai lygiagretūs, tai jų bendros dalies tūris sudaro $\frac{1}{4}$ kiekvieno iš jų tūrio. Įrodykite.

11.080. Ant ritinio, kurio ašinis pjūvis — kvadratas, pagrindų nubrėžti du kūgiai. Jų viršūnės yra ritinio ašies vidurio taške. Raskite kūgių visų paviršių sumą bei tūrių sumą, kai ritinio aukštinė lygi $2a$.

11.081. Apie kūgį apibrėžta bet kokia piramidė. Kūgio pagrindo spindulys R, piramidės pagrindo perimetras $2p$. Raskite kūgio ir piramidės tūrių bei šoninių paviršių santykius.

11.082. Kūgio aukštinė ir sudaromoji atitinkamai lygios 4 cm ir 5 cm. Į kūgį įbrėžtas pusrutulis, kurio pagrindas priklauso kūgio pagrindui. Apskaičiuokite pusrutulio tūrį.

11.083. Į taisyklingąją piramidę, kurios aukštinė h, o dvisienis kampas prie pagrindo 60°, įbrėžtas rutulys. Raskite jo tūrį.

11.084. Kūgis ir pusrutulis turi bendrą pagrindą, kurio spindulys R. Kūgio tūris lygus pusrutulio tūriui. Raskite šoninį kūgio paviršių.

11.085. Pjūvio, statmeno ritinio sudaromajai, plotas M, o ašinio pjūvio plotas N. Apskaičiuokite ritinio paviršių ir tūrį.

11.086. Į kūgį, kurio ašinis pjūvis — lygiakraštis trikampis, įbrėžtas rutulys. Jo tūris lygus $\frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

11.087. Įrodykite, kad kūgio tūris lygus šoninio paviršiaus bei atstumo nuo pagrindo centro iki sudaromosios sandaugos $\frac{1}{3}$ daliai.

11.088. Duotas rutulys, ritinys, kurio ašinis pjūvis yra kvadratas, ir kūgis. Ritinio ir kūgio pagrindai vienodi, o aukštinės lygios rutulio skersmeniui. Kaip sutinka ritinio, rutulio ir kūgio tūriai?

11.089. Kūgio pagrindo spindulys R, o jo šoninio paviršiaus skleistinės viršūnės kampas lygus 90°. Raskite kūgio tūrį.

11.090. Rombą, kurio plotas Q, sukant apie vieną jo kraštinę, gaunamas tam tikras kūnas. Apskaičiuokite jo paviršių.

11.091. Atkarpą AB laikant skersmeniu, nubrėžtas pusapskritimis, kurio centras — taškas O. Toje pačioje pusplokštumėje, kurios riba AB, atkarpas OA ir OB laikant skersmenimis, nubrėžti dar du pusapskritimiai. Apskaičiuokite paviršių ir tūrį figūros, kuri gaunama tų trijų pusapskritimių ribojamą figūrą sukant apie tiesę AB, kai $AB=20$ cm.

11.092. Trikampis, kurio kraštinės 10 cm, 17 cm ir 21 cm, sukamas apie ilgiausią kraštinę. Apskaičiuokite gautos figūros tūrį ir paviršių.

11.093. Raskite rutulio ir įbrėžtinio kubo paviršių santykį bei tūrių santykį.

11.094. Apie rutulį apibrėžtas kūgis, kurio ašinio pjūvio kraštinės lygios. Raskite rutulio paviršiaus ir kūgio viso paviršiaus santykį bei jų tūrių santykį.

11.095. Apie taisyklingąją trikampę prizmę, kurios aukštinė dvigubai ilgesnė už pagrindo kraštinę, apibrėžtas rutulys. Koks yra rutulio ir prizmės tūrių santykis?

11.096. Apie kūgį, kurio pagrindo spindulys R, o aukštinė h, apibrėžtas rutulys. Raskite jo paviršių.

11.097. Į rutulį įbrėžtas kūgis, kurio sudaromoji lygi pagrindo skersmeniui. Raskite kūgio viso paviršiaus ir rutulio paviršiaus santykį.

11.098. Kūgio šoninis paviršius dvigubai didesnis už pagrindo plotą. Jo ašinio pjūvio plotas lygus Q. Raskite kūgio tūrį.

11.099. Lygiašonė trapecija, kurios pagrindai 2 cm ir 3 cm, o smailusis kampas 60°, sukama apie trumpesnįjį pagrindą. Apskaičiuokite gautos figūros paviršių ir tūrį.

11.100. Kūgio aukštinė padalyta į tris lygias atkarpas, ir per dalijimo taškus lygiagrečiai pagrindui išvestos plokštumos, kurios suskirsto kūgį į tris dalis. Duotojo kūgio tūris V. Raskite vidurinio nupjautinio kūgio tūrį.

11.101. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė plokštumoje sudaro išpjovą, kurios centrinis kampas lygus 120°, o plotas S. Raskite kūgio tūrį.

11.102. Varinis ruošinys yra stačiakampio gretasienio formos. Jo matmenys 80×20×5 cm. Iš ruošinio valcuojamas 1 mm storio lakštas. Apskaičiuokite to lakšto plotą.

11.103. R spindulio metalinis rutulys perlydytas į kūgį, kurio šoninis paviršius tris kartus didesnis už pagrindo plotą. Apskaičiuokite kūgio aukštinę.

11.104. Taisyklingąjį tetraedrą kerta plokštuma, einanti per briauną AC ir briaunos SB tašką K. $BK:KS=2:1$. Raskite nukirstos piramidės $KABC$ tūrį, kai tetraedro briauna lygi a.

11.105. Rombas sukamas apie ilgesniąją įstrižainę, po to apie trumpesniąją. Įrodykite, kad gautų figūrų tūrių santykis lygus jų paviršių plotų santykiui.

B grupė

11.106. Taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo kraštinė a, šoninis paviršius 10 kartų didesnis už pagrindo plotą. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.107. Taisyklingosios aštuoniakampės prizmės tūris 8 m³, jos aukštinė 2,2 m. Raskite šoninį prizmės paviršių.

11.108. Nupjautinės piramidės pagrindai yra du taisyklingieji aštuoniakampiai. Apatinio pagrindo kraštinė 0,4 m, o viršutinio 0,3 m; nupjautinės piramidės aukštinė 0,5 m. Nupjautinė piramidė papildyta iki visos. Raskite visos piramidės tūrį.

11.109. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, o viršūnės plokštieji kampai lygūs šoninių briaunų posvyrio į pagrindą kampams. Raskite šios piramidės tūrį.

11.110. Kubo visas paviršius lygus 36 cm². Raskite atstumą tarp dviejų prasilenkiančių jo briaunų vidurio taškų.

11.111. Taisyklingosios keturkampės piramidės dvisienis kampas prie šoninės briaunos lygus 120°, įstrižinio pjūvio plotas S. Raskite piramidės šoninį paviršių.

11.112. Piramidės pagrindas yra lygiagretainis $ABCD$, kurio plotas m^2; $BD \perp AD$. Dvisieniai kampai prie briaunų AD ir BC lygūs 45°, o prie briaunų AB ir CD — 60°. Raskite piramidės šoninį paviršių ir tūrį.

11.113. Pasvirojo gretasienio šoninės briaunos projekcija pagrindo plokštumoje lygi 5 dm, o aukštinė 12 dm. Šoninei briaunai statmenas pjūvis yra rombas, kurio plotas 24 dm², o įstrižainė 8 dm. Apskaičiuokite gretasienio šoninį paviršių ir tūrį.

11.114. Trikampės nupjautinės piramidės aukštinė 10 m, vieno pagrindo kraštinės 27 m, 29 m ir 52 m, o kito pagrindo perimetras 72 m. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės tūrį.

11.115. Prizmės pagrindas — trapecija. Prizmės tūrį išreikškite lygiagrečių šoninių sienų plotais S_1 ir S_2 bei atstumu h tarp jų.

11.116. Stačiosios trikampės prizmės pagrindo plotas 4 cm², šoninių sienų plotai 9 cm², 10 cm² ir 17 cm². Apskaičiuokite prizmės tūrį.

11.117. Stačiosios prizmės pagrindas yra lygiašonė trapecija $ABCD$; $AB=CD=13$ cm, $BC=11$ cm, $AD=21$ cm. Jos įstrižinio pjūvio plotas 180 cm². Apskaičiuokite visą prizmės paviršių.

11.118. Gretasienio pagrindas — rombas, kurio kraštinė a ir smailusis kampas 30°. Vienos šoninės sienos įstrižainė statmena pagrindo plokštumai, o šoninė briauna sudaro su ta plokštuma 60° kampą. Raskite gretasienio visą paviršių ir tūrį.

11.119. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, o aukštinė, nubrėžta iš pagrindo viršūnės į priešais ją esančią šoninę sieną, b. Raskite piramidės tūrį.

11.120. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninis paviršius tris kartus didesnis už pagrindo plotą. Į pagrindą įbrėžto skritulio ploto skaitinė vertė lygi to skritulio spinduliui. Raskite piramidės tūrį.

11.121. Taisyklingąją trikampę piramidę kerta plokštuma, einanti per pagrindo viršūnę ir dviejų šoninių briaunų vidurio taškus. Kertančioji plokštuma statmena vienai iš šoninių sienų (nurodykite, kuriai). Raskite piramidės šoninio paviršiaus ir pagrindo ploto santykį.

11.122. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės pagrindų kraštinės 2 cm ir 1 cm, o aukštinė 3 cm. Per piramidės įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta plokštuma, lygiagreti pagrindams ir dalijanti piramidę į dvi dalis. Raskite kiekvienos dalies tūrį.

11.123. Kubo pjūvio, kurį sudaro taisyklingasis šešiakampis, plotas lygus Q. Raskite visą kubo paviršių.

11.124. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio pagrindas a, o kampas prie jo lygus 45°. Prizmės šoninis paviršius lygus pagrindų plotų sumai. Raskite prizmės tūrį.

11.125. Prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas — taisyklingasis trikampis ABC, kurio kraštinė a. Viršūnė A_1 projektuojama

į apatinio pagrindo centrą, o briauna AA_1 pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite šoninį prizmės paviršių.

11.126. Taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo kraštinė a. Visi įstrižiniai piramidės pjūviai lygiapločiai. Raskite piramidės tūrį ir šoninį paviršių.

11.127. Kubo briauna a. Plokštumos nupjauna kubo kampus taip, kad kiekviena siena tampa taisyklinguoju aštuoniakampiu. Raskite gauto daugiasienio tūrį.

11.128. Į taisyklingąją keturkampę piramidę kubas įbrėžtas taip, kad keturios jo viršūnės yra piramidės apotemose ir keturios — pagrindo plokštumoje. Visos piramidės briaunos yra lygios; kiekvienos jų ilgis a. Apskaičiuokite kubo visą paviršių ir tūrį.

11.129. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės aukštinė 3 cm, tūris 38 cm³, o pagrindų plotų santykis 4 : 9. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės šoninį paviršių.

11.130. Taisyklingojo tetraedro visas paviršius lygus taisyklingojo oktaedro visam paviršiui. Raskite tetraedro ir oktaedro tūrių santykį.

11.131. Pasvirosios prizmės pagrindas — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė a. Viena prizmės šoninė siena statmena pagrindo plokštumai ir sudaro rombą, kurio įstrižainė b. Raskite prizmės tūrį.

11.132. Keturkampės piramidės pagrindas — stačiakampis, kurio plotas S; šoninės jos briaunos lygios ir sudaro su pagrindo plokštuma 45° kampą. Kampas tarp pagrindo įstrižainių 60°. Raskite piramidės tūrį.

11.133. Piramidės pagrindas — lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė a. Viena jos šoninė siena — taip pat lygiakraštis trikampis, ji statmena pagrindo plokštumai. Raskite piramidės visą paviršių.

11.134. Taisyklingąją trikampę piramidę kerta plokštuma, kuri statmena pagrindui ir dalija dvi jo kraštines pusiau. Duotosios piramidės pagrindo kraštinė a, o dvisienis kampas prie pagrindo 45°. Raskite nukirstos piramidės tūrį.

11.135. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės didesnio pagrindo kraštinė lygi a, mažesnio pagrindo kraštinė b, o šoninės sienos smailusis kampas 60°. Raskite piramidės tūrį.

11.136. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a. Per vieną pagrindo briaunų nubrėžta plokštuma, kuri statmena priešingai šoninei briaunai ir ją dalija santykiu $m : n$ skaičiuojant nuo pagrindo viršūnės. Raskite visą piramidės paviršių.

11.137. Per stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnes A, C ir D_1 nubrėžta plokštuma, kuri sudaro su pagrindo plokštuma 60° dvisienį kampą. Pagrindo kraštinės lygios 4 cm ir 3 cm. Raskite gretasienio tūrį.

11.138. Piramidės pagrindas — lygiagretainis, kurio kraštinės 10 cm ir 18 cm, o plotas 90 cm². Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 6 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

11.139. Į taisyklingąjį oktaedrą įbrėžtas kubas, kurio viršūnės yra oktaedro briaunose. Kiek kartų oktaedro paviršius didesnis už įbrėžtinio kubo paviršių?

11.140. Taisyklingosios trikampės piramidės viršūnės plokščiasis kampas lygus 90°, o atstumas tarp šoninės briaunos ir priešingos pagrindo kraštinės d. Raskite piramidės tūrį.

11.141. Kvadrato formos taisyklingojo tetraedro pjūvio plotas m^2. Raskite tetraedro paviršių.

11.142. Per taisyklingosios trikampės prizmės apatinio pagrindo kraštinę ir priešais ją esančią viršutinio pagrindo viršūnę nubrėžta plokštuma. Su apatinio pagrindo plokštuma ji sudaro 45° kampą. Pjūvio plotas lygus S. Raskite prizmės tūrį.

11.143. Į tetraedrą įdėta taisyklingoji trikampė prizmė, kurios vieno pagrindo viršūnės yra tetraedro šoninėse briaunose, o kito — jos pagrindo plokštumoje. Tetraedro briauna a, prizmės visos briaunos lygios. Raskite prizmės tūrį.

11.144. Stačiosios prizmės pagrindas — statusis trikampis, kurio įžambinė c ir smailusis kampas 30°. Per apatinio pagrindo įžambinę ir viršutinio pagrindo stačiojo kampo viršūnę nubrėžta plokštuma. Su pagrindo plokštuma ji sudaro 45° kampą. Raskite trikampės piramidės, kurią plokštuma nukerta nuo prizmės, tūrį.

11.145. Trikampės piramidės šoninės sienos viena kitai statmenos, o jų plotai lygūs a^2, b^2 ir c^2. Raskite piramidės tūrį.

11.146. Piramidės pagrindas — taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė a. Viena iš šoninių briaunų statmena pagrindo plokštumai ir lygi jo kraštinei. Apskaičiuokite visą piramidės paviršių.

11.147. Piramidės pagrindas — lygiagretainis, kurio kraštinės lygios 10 m ir 8 m, o viena įstrižainė — 6 m. Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 4 m. Apskaičiuokite visą piramidės paviršių.

11.148. Nupjautinės piramidės pagrindų plotai S_1 ir S_2 ($S_1 < S_2$), o jos tūris V. Raskite visos piramidės tūrį.

11.149. Stačiojo gretasienio pagrindas — lygiagretainis, kurio vienas kampas lygus 30°. Pagrindo plotas 4 dm². Gretasienio šoninių briaunų plotai 6 dm² ir 12 dm². Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

11.150. Taisyklingosios nupjautinės trikampės piramidės pagrindų kraštinės lygios 3 m ir 2 m, o šoninis paviršius lygus pagrindų plotų sumai. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.151. Pasvirojo gretasienio pagrindas — rombas $ABCD$, kurio kraštinė lygi a, o smailusis kampas 60°. Briauna AA_1 taip pat lygi a ir sudaro 45° kampus su briaunomis AB ir AD. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

11.152. Taisyklingojo tetraedro sienų centrai yra naujo tetraedro viršūnės. Raskite jų paviršių santykį bei tūrių santykį.

11.153. Per nupjautinės trikampės piramidės viršutinio pagrindo kraštinę nubrėžta plokštuma, lygiagreti priešingai šoninei briaunai. Pagrindų atitinkamų kraštinių santykis 1 : 2. Kokiu santykiu padalytas nupjautinės piramidės tūris?

11.154. Atstumas tarp pasvirosios trikampės prizmės bet kurių dviejų šoninių briaunų lygus a. Šoninė briauna lygi l ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Raskite prizmės paviršių.

11.155. Pasvirosios prizmės pagrindas — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė a. Šoninės briaunos ilgis b, o viena jų sudaro 45° kampus su prie pagrindo esančiomis kraštinėmis. Raskite šoninį prizmės paviršių.

11.156. Stačiosios prizmės pagrindas yra trapecija. Įrodykite, kad prizmės tūris lygus lygiagrečių šoninių sienų plotų aritmetiniam vidurkiui, padaugintam iš atstumo tarp jų.

11.157. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės pagrindų kraštinės lygios a ir b, o šoninis paviršius lygus pusei viso paviršiaus. Raskite piramidės tūrį.

11.158. Trikampės piramidės kiekviena šoninė briauna lygi a, vienas iš plokščiųjų piramidės viršūnės kampų yra statusis, o kiti lygūs 60°. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.159. Piramidės pagrindas — lygiagretainis, kurio gretimos kraštinės lygios 9 cm ir 10 cm, o viena įstrižainė 11 cm. Priešingos šoninės briaunos lygios, kiekviena ilgesnioji briauna yra 10,5 cm ilgio. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.160. Piramidės pagrindas — rombas, kurio įstrižainės d_1 ir d_2 ($d_1>d_2$). Piramidės aukštinė eina per rombo smailiojo kampo viršūnę. Per trumpesnę įstrižainę nubrėžto įstrižinio pjūvio plotas lygus Q. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.161. Trikampės piramidės dvi šoninės sienos yra viena kitai statmenos. Tų sienų plotai P ir Q, o jų bendros briaunos ilgis a. Raskite piramidės tūrį.

11.162. Trikampės piramidės visos keturios sienos — lygūs lygiašoniai trikampiai, kurių pagrindas a ir šoninė kraštinė b. Apskaičiuokite piramidės tūrį. Ar su visomis a ir b reikšmėmis uždavinys turi sprendinį?

11.163. Pasvirosios trikampės prizmės šoninės briaunos nutolusios viena nuo kitos atstumais a, b ir c. Prizmės šoninė briauna l, aukštinė h. Raskite visą prizmės paviršių.

11.164. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė trumpesnė už šoninę briauną ir lygi a. Per viršutinio pagrindo kraštinę nubrėžta plokštuma. Su pagrindo plokštuma ji sudaro 45° kampą ir dalija prizmę į dvi dalis. Raskite prizmės viršutinės dalies tūrį ir visą paviršių.

11.165. Stačiakampio gretasienio sienų įstrižainės lygios a, b ir c. Raskite visą jo paviršių.

11.166. Gretasienio briaunų ilgiai lygūs a, b ir c. Briaunos, kurių ilgiai a ir b, viena kitai statmenos, o c ilgio briauna sudaro su kiekviena iš jų 60° kampą. Raskite gretasienio tūrį.

11.167. Stačiojo gretasienio pagrindas — lygiagretainis, kurio kampas 120°, o kraštinės 3 cm ir 4 cm. Trumpesnioji gretasienio įstrižainė lygi ilgesniajai pagrindo įstrižainei. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

11.168. Piramidės pagrindas — stačiakampis, kurio plotas S. Dvi šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai, o kitos dvi pasvirusios į ją 30° ir 60° kampais. Raskite piramidės tūrį.

11.169. Per taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo viršūnę ir dviejų šoninių briaunų vidurio taškus nubrėžta plokštuma. Ji statmena šoninei sienai. Raskite piramidės šoninio paviršiaus ir jos pagrindo ploto santykį.

11.170. Iš taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės vidurio taško nuleisti statmenys šoninei briaunai ir šoninei sienai. Tų statmenų ilgis atitinkamai lygus a ir b. Raskite piramidės tūrį. Ar su visomis a ir b reikšmėmis uždavinys turi sprendinį?

11.171. Į R spindulio pusrutulį įbrėžtas kubas, kurio keturios viršūnės priklauso pusrutulio pagrindui, o kitos keturios — sferiniam paviršiui. Apskaičiuokite kubo tūrį.

11.172. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus 30°. Kūgio šoninis paviršius lygus $3\pi\sqrt{3}$ kv. vnt. Apskaičiuokite į kūgį įbrėžtos taisyklingosios šešiakampės piramidės tūrį.

11.173. Apie R spindulio rutulį apibrėžta taisyklingoji šešiakampė prizmė. Raskite visą jos paviršių.

11.174. Į R spindulio rutulį įbrėžta taisyklingoji nupjautinė šešiakampė piramidė. Jos apatinio pagrindo plokštuma eina per rutulio centrą, o šoninė briauna sudaro su pagrindo plokštuma 60° kampą. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.175. Apie rutulį apibrėžtas statusis gretasienis, kurio pagrindo įstrižainės a ir b. Raskite visą gretasienio paviršių.

11.176. Į R spindulio rutulį įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė. Apie jos pagrindą apibrėžto apskritimo spindulys lygus r. Raskite tos piramidės tūrį.

11.177. Statųjį trikampį, kurio plotas S, sukant apie vieną jo statinį, gaunamas kūgis. To trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas tuo metu nubrėžia L ilgio apskritimą. Raskite kūgio tūrį.

11.178. Trikampis, kurio kraštinės a, b ir c, iš eilės sukamas apie kiekvieną jo kraštinę. Raskite gautų figūrų tūrių santykį.

11.179. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio briauna a. Per jo sienos $ABCD$ įstrižainę AC nubrėžta plokštuma, lygiagreti tiesei BO_1; čia O_1 — sienos $A_1B_1C_1D_1$ centras. Raskite gauto pjūvio plotą.

11.180. 120° dvisienio kampo briaunoje pasirinkta c ilgio atkarpa. Iš jos galų skirtingose duotojo dvisienio kampo sienose nubrėžti statmenys, kurių ilgiai a ir b. Raskite tų statmenų galus jungiančios tiesės atkarpos ilgį.

15. Užsak. Nr. 1941.

11.181. Kūgio visas paviršius lygus πS kv. vnt. Jo šoninio paviršiaus išklotinė plokštumoje sudaro išpjovą, kurios kampas 60°. Raskite kūgio tūrį.

11.182. Kūgio pagrindo spindulys R, o šoninis paviršius lygus pagrindo ir ašinio pjūvio plotų sumai. Raskite kūgio tūrį.

11.183. Apie rutulį apibrėžta taisyklingoji trikampė prizmė, o apie ją — rutulys. Raskite šių rutulių paviršių santykį.

11.184. Duotas ritinys ir rutulys. Ritinio pagrindo ir rutulio didžiojo skritulio spinduliai vienodi. Ritinio viso paviršiaus bei rutulio paviršiaus santykis $m : n$. Raskite jų tūrių santykį.

11.185. Į rutulį įbrėžta piramidė, kurios pagrindas — trikampis. Jo kraštinės lygios 13 cm, 14 cm ir 15 cm. Piramidės viršūnė nutolusi nuo kiekvienos pagrindo kraštinės per 5 cm. Apskaičiuokite rutulio paviršių.

11.186. Kūgio aukštinė h. Jo šoninio paviršiaus išklotinė yra išpjova, kurios centrinis kampas 120°. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

11.187. Į trikampę piramidę, kurios visos briaunos lygios a, įbrėžtas rutulys. Apskaičiuokite jo paviršių.

11.188. Apie r spindulio rutulį apibrėžtas nupjautinis kūgis, kurio sudaromoji lygi l. Raskite kūgio šoninį paviršių ir tūrį.

11.189. Į ritinio formos indą, kurio pagrindo spindulys $R = 4$ cm, įdėtas rutulys. Jo spindulys $r = 3$ cm. Į indą vandens įpilama tiek, kad jo laisvasis paviršius liestų rutulio paviršių (rutulys neiškyla į paviršių). Apskaičiuokite, kokio storio vandens sluoksnis susidaro ištraukus rutulį iš indo.

11.190. Kūgio pagrindo spindulys lygus R. Dvi viena kitai statmenos sudaromosios dalija kūgio šoninį paviršių į dalis santykiu 1 : 2. Raskite kūgio tūrį.

11.191. Apie rutulį apibrėžta taisyklingoji nupjautinė keturkampė piramidė. Jos pagrindų kraštinių santykis $m : n$. Raskite piramidės ir rutulio tūrių santykį.

11.192. Kūgį kertanti plokštuma eina per jo viršūnę ir pagrindo stygą, kurios ilgis lygus pagrindo spinduliui. Raskite gautų kūgio dalių tūrių santykį.

11.193. Piramidės pagrindas — statusis trikampis. Šoninės piramidės briaunos lygios, o per statinius einančios šoninės sienos sudaro su pagrindo plokštuma 30° ir 60° kampus. Piramidės aukštinė lygi h. Raskite apie piramidę apibrėžto kūgio tūrį.

11.194. Lygiagretainis, kurio perimetras $2p$, sukamas apie ašį, statmeną d ilgio įstrižainei ir einančią per jos galą. Raskite sukant gautos figūros paviršių.

11.195. Kūgio pagrindo spindulys lygus R, o jo šoninio paviršiaus išklotinės kampas — 90°. Raskite kūgio tūrį.

C grupė

11.196. Dviejų vienodų kubų briauna lygi a. Tie kubai turi bendrą atkarpą AB, kurios galai yra vienai sienai nepriklausančių dviejų priešingų briaunų vidurio taškai. Vienas kubas gautas pasukus kitą 90° kampu apie tiesę AB. Raskite kubų bendros dalies tūrį.

11.197. Vienas kubas gautas pasukus kitą 90° kampu apie ašį, einančią per vienos jo sienos vidurinę liniją. Kubo briauna lygi a. Raskite dviejų kubų bendros dalies tūrį.

11.198. Stačiosios prizmės pagrindas — trikampis, kurio kraštinės 6 cm, 8 cm ir 10 cm. Tos prizmės plokščiasis pjūvis nukerta nuo šoninių briaunų, einančių per pagrindo didžiausio ir vidurinio kampo viršūnę, 12 cm ilgio atkarpas, o nuo briaunos, einančios per pagrindo mažiausio kampo viršūnę,— 18 cm atkarpą. Raskite figūros, kurią riboja prizmės pagrindo plokštuma, šoninių sienų plokštumos ir pjūvio plokštuma, tūrį bei visą paviršių.

11.199. Pasvirojo gretasienio briauna l. Prie jos esančių dviejų gretimų sienų plotai lygūs m^2 ir n^2, o tų sienų plokštumos sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

11.200. Per tašką, kuris taisyklingojo tetraedro briauną dalija santykiu 1 : 4, nubrėžta plokštuma, statmena šiai briaunai. Raskite gautų tetraedro dalių tūrių santykį.

11.201. Trikampės piramidės šoninės briaunos yra vienodo ilgio ir lygios a. Iš trijų plokščiųjų viršūnės kampų, kuriuos sudaro tos briaunos, du lygūs 45°, o trečias — 60°. Raskite piramidės tūrį.

11.202. Per taisyklingojo tetraedro kiekvieną briauną nubrėžta plokštuma, lygiagreti priešingai briaunai. Raskite gauto gretasienio ir tetraedro tūrių santykį.

11.203. Kubo briauna lygi a. Per briaunų, išeinančių iš vienos kubo viršūnės, galus nubrėžta plokštuma. Tokios plokštumos nubrėžtos per kiekvienų trijų minėtų briaunų galus. Raskite tų plokštumų apriboto kūno tūrį.

11.204. Iš taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinės vidurio taško nubrėžtas a ilgio statmuo šoninei briaunai ir b ilgio statmuo šoninei sienai. Raskite piramidės tūrį.

11.205. Du taisyklingieji tetraedrai sujungti dviem briaunomis ir sudaro dvigubą piramidę. Tetraedro briauna lygi a. Piramidės šešių šoninių sienų centrai laikomi stačiosios trikampės prizmės viršūnėmis. Apskaičiuokite tos prizmės tūrį.

11.206. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a; kvadrato formos jos pjūvio plotas m^2. Raskite piramidės šoninio paviršiaus ir pagrindo ploto santykį.

11.207. Du kubai, kurių briauna a, turi bendrą atkarpą, jungiančią dviejų priešingų sienų centrus. Vienas kubas pasuktas 45° kampu kito atžvilgiu. Raskite tų kubų bendros dalies tūrį.

11.208. Per trijų briaunų, išeinančių iš kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnių B, D, A_1 ir C_1, galus nubrėžtos plokštumos. Kubo briauna lygi a. Įrodykite, kad gauta figūra yra taisyklingasis tetraedras, ir apskaičiuokite jo visą paviršių bei tūrį.

11.209. Per taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštines nubrėžta plokštuma, kuri nukerta nuo priešingos sienos trikampį. Jo plotas 4 cm², piramidės šoninis paviršius 25 cm². Apskaičiuokite šoninį paviršių piramidės, kurią nubrėžta plokštuma nukerta nuo duotosios piramidės.

11.210. Įrodykite, kad dviejų trikampių piramidžių, turinčių vienodą trisienį kampą, tūriai sutinka kaip lygių trisienių kampų trijų briaunų ilgių sandaugos.

11.211. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, o šoninė briauna sudaro 30° kampą su aukštine. Per piramidės pagrindo viršūnę nubrėžta plokštuma, statmena priešais esančiai šoninei briaunai. Toji plokštuma padalija piramidę į dvi dalis. Raskite prie viršūnės esančios piramidės dalies tūrį.

11.212. Atstumas tarp dviejų gretimų šoninių kubo sienų nesusikertančių įstrižainių lygus d. Raskite visą kubo paviršių.

11.213. Trikampės piramidės dvi priešingos briaunos lygios 4 m ir 12 m, o kiekviena kitų briaunų lygi 7 m. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

11.214. Gretasienio sienos — rombai, kurių įstrižainės 3 cm ir 4 cm. Gretasienyje yra trisienių kampų, kuriuos sudaro trys smailieji rombų kampai. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

11.215. Trisienės piramidės pagrindo kraštinės lygios a, b ir c. Kiekviena tų kraštinių lygi su ja nesusikertančiai šoninei briaunai. Raskite piramidės tūrį.

11.216. Piramidės $SABCD$ pagrindas — trapecija, kurios lygiagrečios kraštinės AB ir CD. Įrodykite, kad piramidės tūris lygus $\frac{4}{3}$ trikampio MSN ploto (čia MN — trapecijos vidurinė linija), padauginto iš atstumo nuo briaunos AB iki plokštumos MSN.

11.217. Daugiasienio dvi sienos (pagrindai) — daugiakampiai, esantys lygiagrečiose plokštumose, kitos sienos (šoninės) — trapecijos, lygiagretainiai arba trikampiai, kurių kiekviena viršūnė kartu yra ir vieno iš pagrindų viršūnė. Įrodykite, kad tokio daugiasienio tūris lygus $\frac{1}{6}H(S_1+S_2+4S_3)$; čia H — atstumas tarp pagrindų plokštumų, S_1 ir S_2 — pagrindų plotai, o S_3 — pjūvio, vienodai nutolusio nuo abiejų pagrindų, plotas.

11.218. Iš viršaus ir iš apačios figūrą riboja du stačiakampiai, o iš šono — trapecijos. Stačiakampių kraštinės yra lygiagrečios ir lygios a, b bei a_1, b_1; atstumas tarp lygiagrečių stačiakampių pagrindų plokštumų lygus h. Raskite figūros tūrį.

11.219. Dviejų vienodų kubų įstrižainės yra toje pačioje tiesėje. Kubų briauna lygi a. Antrojo kubo viršūnė sutampa su pirmojo centru. Antrasis kubas pasuktas apie įstrižainę 60° kampu pirmojo atžvilgiu. Raskite tų kubų bendros dalies tūrį.

11.220. Apie rutulį apibrėžtas nupjautinis kūgis, kurio apatinio pagrindo plotas a kartų didesnis už viršutinio. Kiek kartų nupjautinio kūgio tūris didesnis už rutulio tūrį?

11.221. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Įrodykite, kad kūgio viso paviršiaus ir rutulio paviršiaus santykis lygus jų tūrių santykiui.

11.222. Ritinio aukštinė a ilgio ir lygi jo pagrindo spinduliui. Per ritinio ašį nubrėžtas kitas ritininis paviršius, dalijantis pagrindo apskritimą į du lankus, kurių ilgių santykis 2 : 1. Šis paviršius dalija duotą ritinį į dvi dalis. Raskite didesnės ritinio dalies šoninį paviršių ir tūrį.

11.223. Kūgio aukštinės ir apie jį apibrėžto rutulio spindulio santykis lygus q. Raskite tų kūnų tūrių santykį. Su kuriomis q reikšmėmis uždavinys neturi sprendinio?

11.224. Į R spindulio rutulį įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios pagrindas dalija statmeną jam spindulį pusiau. Raskite į piramidę įbrėžto rutulio paviršių.

11.225. Ant plokštumos esantis kūgis rieda ja, sukdamasis apie nejudamą savo viršūnę. Kūgio aukštinė h, sudaromoji l. Apskaičiuokite kūgio aukštinės nubrėžto paviršiaus plotą.

11.226. Piramidės $SABC$ pagrindas — trikampis ABC, kurio $AB=AC=10$ cm ir $BC=12$ cm. Siena SBC statmena pagrindui ir $SB=SC$. Piramidės aukštinė lygi 1,4 cm. Apskaičiuokite į piramidę įbrėžto rutulio spindulį.

11.227. Trikampės piramidės šoninių briaunų ilgis lygus a, b ir c; tos briaunos sudaro stačiuosius plokščiuosius kampus. Raskite į piramidės pagrindą nubrėžtos aukštinės ilgį.

11.228. Jeigu į daugiasienį galima įbrėžti rutulį, tai jo tūris lygus daugiasienio viso paviršiaus ir įbrėžtinio rutulio spindulio sandaugos $\frac{1}{3}$ daliai. Įrodykite.

11.229. Taisyklingosios piramidės pagrindas — taisyklingasis penkiakampis, o šoninės sienos — taisyklingieji trikampiai, kurių kraštinė a. Raskite piramidės tūrį.

11.230. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė H. Plokštuma, nubrėžta per piramidės pagrindo viršūnę statmenai priešais ją esančiai šoninei sienai, sudaro 30° kampą su pagrindo plokštuma. Raskite visą piramidės paviršių.

11.231. Piramidės $SABC$ pagrindas — lygiašonis statusis trikampis ABC, kurio įžambinė $AB=4\sqrt{2}$. Piramidės šoninė briauna SC statmena pagrindo plokštumai ir lygi 2. Raskite kampą ir atstumą tarp tiesių, kurių viena eina per tašką S ir briaunos AC vidurio tašką, o kita — per tašką C ir briaunos AB vidurio tašką.

11.232. Jeigu tetraedras yra ortocentrinis, t. y. toks, kurio aukštines pratęsiančios tiesės susikerta viename taške, tai: a) kiekvienos dvi priešingos jo briaunos yra viena kitai statmenos; b) jeigu vienas iš plokščiųjų bet kurios viršūnės kampų yra status, tai ir kiti du plokštieji kampai yra statūs; c) jo priešingų briaunų ilgių kvadratų sumos yra lygios; d) bet kuri jo viršūnė projektuojama į priešais ją esančios sienos ortocentrą (sienos aukštines pratęsiančių tiesių susikirtimo tašką). Įrodykite.

11.233. a) Ortocentrinio tetraedro briaunų AB, AC, AD ir BC ilgis atitinkamai lygus 5 cm, 7 cm, 8 cm ir 6 cm. Apskaičiuokite kitų dviejų briaunų ilgį.

b) Ar ortocentrinis yra tetraedras $ABCD$, kurio $AB=8$ cm, $BC=12$ cm, $DC=6$ cm?

11.234. Ortocentrinio tetraedro $ABCD$ kampas ADC yra statusis. Įrodykite, kad $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$; čia h — tetraedro aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės D, ilgis, $a=DA$, $b=DB$, $c=DC$.

11.235. Ortocentrinio tetraedro $ABCD$ kampas ABC yra statusis; S_1, S_2, S_3 — atitinkamai sienų BAC, BAD, BCD plotai. Įrodykite, kad tetraedro tūris lygus $\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$.

12 SKYRIUS
GEOMETRIJOS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS TAIKANT TRIGONOMETRIJĄ

KAI KURIOS FIGŪRŲ ELEMENTŲ SĄSAJOS

1⁰. Lygiagretainio $ABCD$ (12.1 pav.) plotą **galima apskaičiuoti pagal** tokias formules:

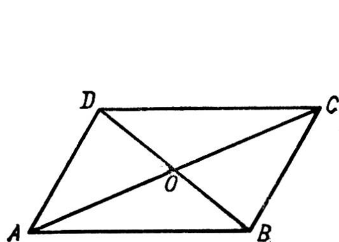
$$S=\frac{AC^2-BD^2}{4}\operatorname{tg}A;\ (a)\qquad S=\frac{AB^2-AD^2}{2}\operatorname{tg}\angle AOD;\ (b)$$

čia O — įstrižainių AC ir BD susikirtimo taškas.

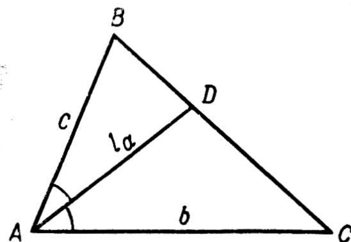
□ Pritaikę kosinusų teoremą (10.6) trikampiui ACB, gauname AC^2, o trikampiui ABD — BD^2. Po to iš pirmosios lygybės atimame antrąją. Gauname $AC^2-BD^2=4AB\cdot AD\cos A$; iš čia $AB\cdot AD=\frac{AC^2-BD^2}{4\cos A}$. Pagaliau, pritaikę (10.21) formulę, randame

$$S_{ABCD}=AB\cdot AD\sin A=\frac{AC^2-BD^2}{4}\cdot\operatorname{tg}A.$$

Analogiškai nagrinėjant trikampius AOD bei AOB, galima įsitikinti, jog teisinga ir (b) formulė. ■



12.1 pav.



12.2 pav.

2⁰. Sakykime, žinomi trikampio ABC dviejų kraštinių ilgiai b ir c bei jų sudarytas kampas A (12.2 pav.). Tada iš to kampo viršūnės nubrėžtos pusiaukampinės AD ilgis išreiškiamas formule

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

□ Turime $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ADB}$. Pritaikę (10.2) formulę, gauname

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}l_ab\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}l_ac\sin\frac{A}{2},$$

arba $bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}l_a(b+c)\sin\frac{A}{2}$.

Kadangi $\sin\frac{A}{2}\neq 0$, tai $l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$. ■

3⁰. Rutulio ir įbrėžto į jį kūgio elementai susiję taip:

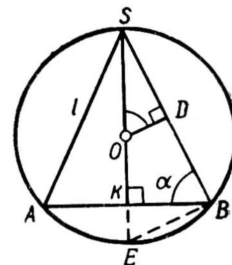
$$l=2R\sin\alpha;\ (a)\qquad l^2=2RH;\ (b)$$

čia R — rutulio spindulys, l — kūgio sudaromosios ilgis, H — jo aukštinė, α — kampas tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos.

Tokios pat sąsajos sieja rutulio ir įbrėžtos į jį piramidės, kurios šoninės briaunos ilgis l ir šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α, elementus.

□ a) Į rutulį įbrėžto kūgio ašinis pjūvis (12.3 pav.) — lygiašonis trikampis SAB, kuris įbrėžtas į R spindulio apskritimą. Jo centras yra taškas O — aukštinės SK ir kraštinės SB vidurio statmens DO susikirtimo taškas, be to, $SK=H$, $\angle SOD=\angle SBK=\alpha$. Iš $\triangle SDO$ randame $SD=SO\sin\alpha$, t. y. $l=2R\sin\alpha$.

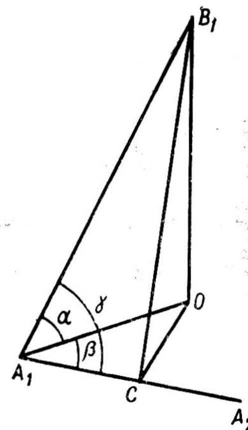
b) Pratęsiame SK tiek, kad ji kirstų apskritimą taške E, ir nubrėžiame atkarpą BE. Gauname statųjį trikampį SBE, kurio statinis SB ($SB=l$) lygus įžambinės SE ($SE=2R$) ir statinio SB projekcijos SK ($SK=H$) įžambinėje SE geometriniam vidurkiui, t. y. $l^2=2RH$. ■



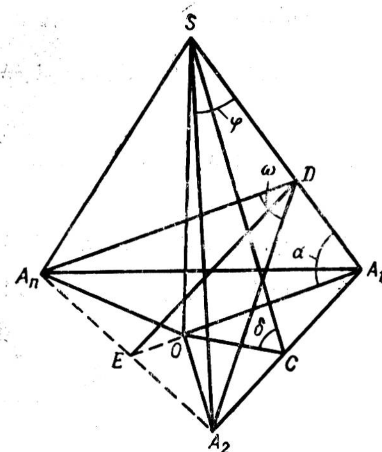
12.3 pav.

4⁰. Sakykime, A_1B_1 — piramidės arba prizmės šo**ninė briauna, A_1O — jos projekcija pagrindo plokštu**moje, $\angle B_1A_1O=\alpha$, $\angle OA_1A_2=\beta$, $\angle B_1A_1A_2=\gamma$ (12.4 pav.). Tada teisinga lygybė $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$.

□ Nubrėžkime šoninės sienos aukštinę — atkarpą B_1C; tada $OC\perp A_1A_2$ (pagal trijų statmenų teoremą). Iš $\triangle A_1CB_1$ gauname $\cos\gamma=\frac{A_1C}{A_1B_1}$. Kadangi $A_1C=OA_1\cos\beta$ (iš $\triangle OCA_1$), tai $\cos\gamma=\frac{OA_1\cos\beta}{A_1B_1}$. Bet $\frac{OA_1}{A_1B_1}=\cos\alpha$ (iš $\triangle A_1OB_1$), vadinasi, $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$. ■



12.4 pav.



12.5 pav.

5⁰. Sakykime, α — taisyklingosios n-kampės piramidės šoninės briaunos posvyrio į pagrindo plokštumą kampas, δ — jos šoninės sienos posvyrio į pagrindo plokštumą kampas, φ — piramidės viršūnės plokščiasis kampas, ω —

dvisienis kampas tarp gretimų šoninių sienų (12.5 pav.). Tada teisingos šios sąsajos:

$$\cos\alpha=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}\ ;\ (a)\qquad \sin\frac{\omega}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\ ;\ (b)$$

$$\cos\delta=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}=\cos\alpha\sin\frac{\omega}{2}\ .\ (c)$$

□ a) Sakykime, O — taisyklingosios n-kampės piramidės pagrindo centras; A_1 — šio n-kampio viršūnės kampas. Tada $\angle A_1=\frac{\pi(n-2)}{n}=\pi-\frac{2\pi}{n}$, $\angle OA_1C=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$. Turime $OA_1=A_1C:\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=A_1C:\sin\frac{\pi}{n}$ (iš $\triangle OCA_1$); $SA_1=A_1C:\sin\frac{\varphi}{2}$ (iš $\triangle SCA_1$). Iš $\triangle SOA_1$ randame:

$$\cos\alpha=\frac{OA_1}{SA_1}=\frac{A_1C}{\sin\frac{\pi}{n}}:\frac{A_1C}{\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

b) Sakykime, E — lygiašonio trikampio A_2DA_n pagrindo A_2A_n vidurio taškas. Jis taip pat priklauso piramidės pagrindo viršūnės kampo pusiaukampinei A_1O ir kampo A_2DA_n pusiaukampinei DE. Iš stačiųjų trikampių A_2ED ir A_1EA_2 randame $A_2D=A_2E:\sin\frac{\omega}{2}$ ir $A_1A_2=A_2E:\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=A_2E:\cos\frac{\pi}{n}$. Pirmąją lygybę padaliję iš antrosios, gauname $A_2D:A_1A_2=\cos\frac{\pi}{n}:\sin\frac{\omega}{2}$. Kadangi $\triangle A_1A_2D\sim\triangle A_1SC$, tai $A_2D:A_1A_2=SC:A_1S=\cos\frac{\varphi}{2}$; iš čia

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\omega}{2}},\ \text{arba}\ \sin\frac{\omega}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

c) Iš trikampio SOC išplaukia, kad $\cos\delta=OC:SC$; čia $OC=A_1C\times$ $\times\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=A_1C\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (iš $\triangle OCA_1$), $SC=A_1C\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ (iš $\triangle SCA_1$). Todėl

$$\cos\delta=\frac{A_1C\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{A_1C\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}};$$

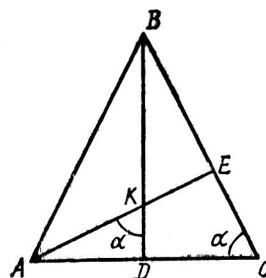
iš čia, sudauginę sąsajas (a) ir (b), gauname

$$\cos\delta=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}=\cos\alpha\sin\frac{\omega}{2}.\ ■$$

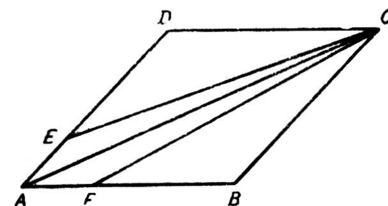
1 pavyzdys. Smailiojo lygiašonio trikampio ABC ($AB=BC$) kampas prie pagrindo lygus α. Kokiu santykiu, skaičiuojant nuo viršūnės A, aukštinė BD dalija aukštinę AE?

△ Iš sąlygos žinome, kad $\triangle ABC$ — smailusis; vadinasi, aukštinių susikirtimo taškas yra trikampio viduje (12.6 pav.). Sakykime, $AD=a$. Iš $\triangle AEC$ randame $AE=2a\sin\alpha$; iš $\triangle AKD$ randame $AK=\frac{a}{\sin\alpha}$ ($\angle AKD=\angle C$, nes abu kampai papildo kampą KAD iki 90°). $KE=AE-AK=2a\sin\alpha-\frac{a}{\sin\alpha}=$ $=\frac{a(2\sin^2\alpha-1)}{\sin\alpha}=-\frac{a\cos2\alpha}{\sin\alpha}$. Galiausiai

$$\frac{AK}{KE}=-\frac{a}{\sin\alpha}:\frac{a\cos2\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{1}{\cos2\alpha}.\ ▲$$



12.6 pav.

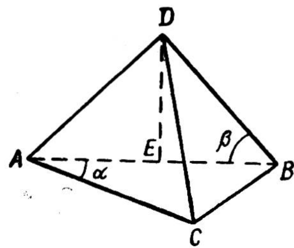


12.7 pav.

2 pavyzdys. Iš rombo $ABCD$ viršūnės C nubrėžtos dvi atkarpos: CE ir CF (12.7 pav.). Jos dalija rombą į tris lygiaplotes figūras. Rombo kraštinė lygi a. Yra žinoma, kad $\cos C=\frac{1}{4}$. Raskite sumą $CE+CF$.

△ Trikampių CED ir CFB aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės C, yra vienodo ilgio ir $S_{\triangle CED}=S_{\triangle CFB}$ (duota sąlygoje); todėl $DE=FB$, vadinasi, $CE=CF$ ir $AE=AF$. Nubrėžiame įstrižainę AC, kuri dalija $AECF$ į du lygius trikampius. Vadinasi, $S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}S_{AECF}$. Kadangi $S_{AECF}=S_{\triangle CFB}$ (duota sąlygoje), tai $S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}S_{\triangle CFB}$, be to, trikampiai AFC ir FBC turi bendrą aukštinę, nubrėžtą iš viršūnės C. Iš čia išplaukia, kad $AF=\frac{1}{2}FB$, t. y. $FB=\frac{2}{3}a$; be to, $\cos B=\cos(180°-C)=-\cos C=-\frac{1}{4}$. Iš $\triangle FCB$ pagal kosinusų teoremą gauname: $CF=\sqrt{a^2+\frac{4a^2}{9}-2a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2a}{3}}=\frac{4a}{3}$. Taigi $CE+CF=$ $=\frac{8a}{3}$. ▲

3 pavyzdys. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio įžambinė lygi c, o vienas iš smailiųjų kampų α. Kiekviena šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite piramidės tūrį.

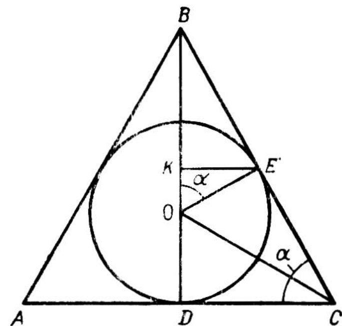


12.8 pav.

△ Kadangi piramidės $ABCD$ (12.8 pav.) visos šoninės briaunos vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą, tai viršūnės D projekcija — apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras; stačiojo trikampio atveju — įžambinės AB vidurio taškas E. Trikampio ADB aukštinė DE yra piramidės aukštinė. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=$ $=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$, $DE=BE\times$ $\times\operatorname{tg}\beta=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta$. Galiausiai gauname:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha\cdot\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta=\frac{c^3}{24}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta.\ ▲$$

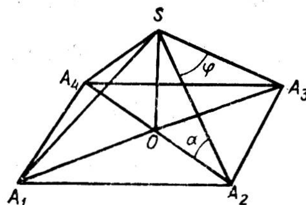
4 pavyzdys. Į kūgį, kurio sudaromoji pasvirusi į pagrindą kampu α, įbrėžtas rutulys. Sferos ir kūgio paviršių lietimosi apskritimo spindulys lygus r. Raskite kūgio sudaromosios ilgį.



12.9 pav.

△ Ašinis kūgio pjūvis (12.9 pav.) yra lygiašonis trikampis ABC. Į jį įbrėžtas apskritimas, kurio centras O — trikampio aukštinės BD ir kampo C pusiaukampinės CO susikirtimo taškas. Iš taško E, kuriame apskritimas liečia sudaromąją BC, nubrėžkime $KE\perp BD$. Akivaizdu, kad $KE=r$, $\angle KOE=\alpha$ (žr. 1 pavyzdį), $OE=OD=\frac{r}{\sin\alpha}$. Iš $\triangle ODC$ randame $DC=$ $=OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, o iš $\triangle BDC$ apskaičiuojame $BC=\frac{DC}{\cos\alpha}=\frac{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. ▲

5 pavyzdys. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė H, o plokščiasis kampas prie viršūnės — φ (12.10 pav.). Raskite piramidės šoninį paviršių.



12.10 pav.

△ Pasirinkime pagalbinį kampą $\alpha=\angle SA_2O$. Tada $SA_2=\frac{H}{\sin\alpha}$ ir piramidės šoninis paviršius išreiškiamas taip:

$$S_{\text{šon}}=4S_{\triangle SA_2A_3}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{H^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin\varphi=\frac{2H^2\sin\varphi}{\sin^2\alpha}.$$

Susieję kampą α su žinomais kampais φ bei $\angle AO_2A_3=\frac{\pi}{4}$ (žr. 5⁰ punkto (a) formulę), gauname $\cos\alpha=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}$. Vadinasi, $\sin^2\alpha=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}=\cos\varphi$.

Šią reikšmę įrašę į $S_{\text{šon}}$ formulę, galiausiai gauname $S_{\text{šon}}=2H^2\operatorname{tg}\varphi$. ▲

A grupė

12.001. Lygiašonio trikampio dviejų nelygių aukštinių suma lygi l, o kampas prie viršūnės lygus α. Raskite šoninę kraštinę.

12.002. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α. Raskite įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių santykį.

12.003. Per rombo smailiojo kampo α viršūnę nubrėžta tiesė. Ji dalija tą kampą santykiu 1 : 2. Kokiu santykiu toji tiesė dalija rombo kraštinę, kurią ji kerta?

12.004. Per kvadrato $ABCD$ kraštinės AB vidurio tašką M nubrėžta tiesė, kuri kerta priešingą kraštinę CD taške N. Smailusis kampas AMN lygus α $\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Kokiu santykiu tiesė MN dalija kvadrato plotą?

12.005. Lygiašonės trapecijos aukštinė h, o priešais šoninę kraštinę esantis kampas tarp įstrižainių lygus α. Raskite trapecijos vidurinę liniją.

12.006. Stačiojo trikampio plotas S ir smailusis kampas α. Apskaičiuokite atstumą nuo trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško iki įžambinės.

12.007. Į stačiakampį $ABCD$ ($AB\parallel CD$) įbrėžtas trikampis AEF. Taškas E priklauso kraštinei BC, taškas F — kraštinei CD. Raskite kampo EAF tangentą, kai $AB:BC=BE:EC=CF:FD=k$.

12.008. Lygiagretainio kraštinės a ir b, o smailusis kampas α. Raskite tangentus kampų, kuriuos lygiagretainio ilgesnioji įstrižainė sudaro su jo kraštinėmis.

12.009. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus a, kampas prie viršūnės lygus α. Apskaičiuokite į šoninę kraštinę nubrėžtos pusiaukampinės ilgį.

12.010. Apie R spindulio skritulį apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas α. Raskite tos trapecijos perimetrą.

12.011. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio dviejų kraštinių kvadratų sumos ir tų kraštinių bei kampo tarp jų kosinuso sandaugos skirtumas yra pastovus dydis.

12.012. Duotos įbrėžto į apskritimą keturkampio kraštinės a, b, c ir d. Raskite kampą tarp kraštinių a ir b.

12.013. Stačiojo trikampio įžambinė — kvadrato kraštinė. Stačiojo trikampio ir kvadrato plotų santykis lygus k. Apskaičiuokite trikampio smailiųjų kampų tangentų sumą.

12.014. Stačiosios trapecijos plotas lygus S, smailusis kampas α. Jos trumpesnioji įstrižainė lygi ilgesniajam pagrindui. Raskite trapecijos aukštinę.

12.015. Dviejų iš išorės susiliečiančių apskritimų bendra išorinė liestinė su jų centrų linija sudaro kampą α. Raskite tų apskritimų spindulių santykį.

12.016. Dvi lygiagretainio aukštinės, nubrėžtos iš bukojo kampo viršūnės, lygios h_1 ir h_2, o kampas tarp jų lygus α. Raskite ilgesniąją lygiagretainio įstrižainę.

12.017. Stačiakampio įstrižainė lygi d ir dalija jo kampą santykiu $m:n$. Raskite stačiakampio perimetrą.

12.018. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos šoninės kraštinės bei trumpesniojo pagrindo santykis lygus k. Raskite trapecijos kampus ir leistinąsias k reikšmes.

12.019. Lygiašonio trikampio plotas lygus S, o priešais pagrindą esantis kampas tarp pusiaukraštinių, nubrėžtų į šonines kraštines, lygus α. Raskite pagrindą.

12.020. Į nuopjovą, kurios lankas $\alpha°$, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Viena trikampio viršūnė sutampa su lanko viduriu, o kitos dvi priklauso stygai. Trikampio plotas S. Apskaičiuokite nuopjovos lanko spindulį.

12.021. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo α, įbrėžtinio skritulio spindulys r. Per kampo prie pagrindo viršūnę ir įbrėžtinio skritulio centrą nubrėžta tiesė. Apskaičiuokite trikampio viduje esančios tos tiesės atkarpos ilgį.

12.022. Trikampio kampą sudarančios kraštinės lygios a ir b, o jo pusiaukampinė lygi l. Raskite tą kampą.

12.023. Lygiašonio trikampio pagrindas a ir kampas prie pagrindo α. Apskaičiuokite į šoninę kraštinę nubrėžtos pusiaukraštinės ilgį.

12.024. Raskite apie apskritimą apibrėžtos trapecijos perimetro ir to apskritimo ilgio santykį; kampai prie ilgesniojo trapecijos pagrindo lygūs α ir β.

12.025. Stačiojo trikampio ABC smailusis kampas A lygus α radianų. Apskritimo lankas, kurio centras yra stačiojo kampo C viršūnė, liečia įžambinę taške D ir kerta statinius AC ir BC atitinkamai taškuose E ir F. Raskite kreivinių trikampių ADE ir BDF plotų santykį.

12.026. Į lygiagretainį, kurio kraštinės a ir b $(a<b)$ bei smailusis kampas α, įbrėžtas rombas; dvi jo viršūnės sutampa su lygiagretainio ilgesniųjų kraštinių vidurio taškais, o kitos dvi priklauso trumpesniosioms kraštinėms (arba jų tęsiniams). Raskite rombo kampus.

12.027. Apie R spindulio skritulį apibrėžta trapecija, kurios kampai prie ilgesniojo pagrindo lygūs α ir β. Raskite tos trapecijos plotą.

12.028. Į lygiašonį trikampį, kurio kampas prie pagrindo α, įbrėžtas apskritimas. Jo spindulys r. Raskite apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.

12.029. Lygiašonio trikampio plotas lygus S, aukštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę, sudaro su pagrindu kampą α. Raskite į trikampį įbrėžto skritulio spindulį.

12.030. Lygiakraštį trikampį kerta tiesė, kuri eina per vienos iš jo kraštinių vidurį ir su ta kraštine sudaro smailųjį kampą α. Kokiu santykiu ta tiesė dalija trikampio plotą?

12.031. Į kvadratą $ABCD$ įbrėžtas lygiašonis trikampis AEF; taškas E yra kraštinėje BC, taškas F — kraštinėje CD ir $AE=AF$. Kampo AEF tangentas lygus 3. Raskite kampo FAD kosinusą.

12.032. Kampas tarp lygiašonio trikampio šoninių kraštinių lygus α; įbrėžtinio apskritimo spindulys r. Apskaičiuokite trikampio plotą.

12.033. Apie skritulį apibrėžta stačioji trapecija, kurios smailusis kampas α. Trapecijos perimetras P. Raskite trapecijos aukštinę.

12.034. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α. Raskite trikampio ir apibrėžto apie jį skritulio plotų santykį.

12.035. Trikampio dvi kraštinės lygios a ir b, o kampas tarp jų α. Raskite į trečią kraštinę nubrėžtos aukštinės ilgį.

12.036. Jeigu trikampio dviejų kampų tangentų santykis lygus tų pačių kampų sinusų kvadratų santykiui, tai trikampis yra lygiašonis arba statusis. Įrodykite.

12.037. Į rombą $ABCD$ ir trikampį ABC, kurio viena kraštinė yra ilgesnioji rombo įstrižainė, įbrėžti apskritimai. Rombo smailusis kampas lygus α. Raskite apskritimų spindulių santykį.

12.038. Lygiašonės trapecijos trumpesnįjį pagrindą laikant kraštine, nubraižytas taisyklingasis trikampis. Jo aukštinė lygi trapecijos aukštinei, o plotas 5 kartus mažesnis už trapecijos plotą. Raskite kampą, esantį prie trapecijos ilgesniojo pagrindo.

12.039. Taisyklingojo trikampio ABC aukštinė BD pratęsta už viršūnės B ir jos tęsinyje atidėta atkarpa BF, lygi trikampio kraštinei. Tašką F su viršūne C jungia atkarpa. Įrodykite, kad $\operatorname{tg} 15°=2-\sqrt{3}$.

12.040. Lygiašonės trapecijos aukštinė lygi h. Viršutinis trapecijos pagrindas matomas iš apatinio pagrindo vidurio taško kampu 2α, o apatinis pagrindas iš viršutinio pagrindo vidurio taško — kampu 2β. Parašykite trapecijos plotą bendrąja išraiška ir be lentelių apskaičiuokite plotą, kai $h=2$, $\alpha=15°$, $\beta=75°$.

12.041. Trikampio dvi kraštinės lygios b ir c, o jo plotas $0{,}4bc$. Raskite trečią kraštinę.

12.042. Iš apskritimo, kurio spindulys R, taško nubrėžtos dvi lygios stygos. Jos sudaro įbrėžtinį kampą, kuris lygus α radianų. Raskite to kampo viduje esančios skritulio dalies plotą.

12.043. Per smailiojo lygiašonio trikampio ABC viršūnę A ir apie tą trikampį apibrėžto apskritimo centrą nubrėžta tiesė, kuri kerta kraštinę BC taške D. Raskite AD ilgį, kai $AB=BC=b$ ir $\angle ABC=\alpha$.

12.044. Stačiakampio gretasienio pagrindo įstrižainė lygi d ir su pagrindo kraštine sudaro kampą α. Per šią kraštinę bei priešingą jai viršutinio pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kuri su

pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite gretasienio šoninį paviršių.

12.045. Kūgio sudaromosios ir aukštinės skirtumas lygus d, o kampas tarp jų α. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

12.046. Piramidės pagrindas — taisyklingasis trikampis. Viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai ir lygi l, kitos dvi briaunos su ta plokštuma sudaro kampą α. Į piramidę įbrėžta stačioji prizmė; trys jos viršūnės priklauso piramidės šoninėms briaunoms, kitos trys viršūnės — piramidės pagrindui. Prizmės šoninės sienos įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite prizmės aukštinę.

12.047. Nupjautinio kūgio ašinio pjūvio įstrižainių susikirtimo taškas dalija jas santykiu 2 : 1 skaičiuojant nuo didesniojo pagrindo. Priešais kūgio pagrindus esantis kampas tarp įstrižainių lygus α. Įstrižainės ilgis l. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio tūrį.

12.048. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinės centrinis kampas lygus α radianų. Raskite kūgio ašinio pjūvio kampą prie viršūnės.

12.049. Taisyklingosios šešiakampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus kampui tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos. Raskite tą kampą.

12.050. Per taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ pagrindo viršūnę C išvesta plokštuma, statmena šoninei briaunai SA. Ji su pagrindo plokštuma sudaro kampą, kurio kosinusas lygus $\frac{2}{3}$. Raskite kampo tarp dviejų šoninių sienų kosinusą.

12.051. Stačiosios trikampės prizmės pagrindas — lygiašonis trikampis ABC, kurio $AB=BC=a$ ir $\angle BAC=\alpha$. Per kraštinę AC išvesta plokštuma, kuri su pagrindu sudaro kampą φ ($\varphi<\frac{\pi}{2}$). Pjūvis yra trikampis. Apskaičiuokite to pjūvio plotą.

12.052. Trikampis ABC sukasi apie tiesę, esančią jo plokštumoje, einančią šalia trikampio per viršūnę A ir vienodai pasvirusią į kraštines AB ir AC. Raskite sukinio tūrį, kai $AB=a$, $AC=b$ ir $\angle BAC=\alpha$.

12.053. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninis paviršius 5 kartus didesnis už jos pagrindo plotą. Raskite piramidės plokščiąjį kampą prie viršūnės.

12.054. Kūgio aukštinė H, kampas tarp sudaromosios ir aukštinės α. Į šį kūgį įbrėžtas kitas kūgis, kurio viršūnė sutampa su pirmojo kūgio pagrindo centru, o abiejų kūgių atitinkamos sudaromosios yra viena kitai statmenos. Apskaičiuokite įbrėžtinio kūgio tūrį.

12.055. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės didesniojo pagrindo kraštinė lygi a. Piramidės šoninė briauna ir įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampus, kurie lygūs atitinkamai α ir β. Apskaičiuokite piramidės mažesniojo pagrindo plotą.

12.056. Į stačiąją trapeciją įbrėžto skritulio spindulys lygus r, smailusis trapecijos kampas lygus α. Trapecija sukasi apie trumpesniąją šoninę kraštinę. Raskite sukinio šoninį paviršių.

12.057. Stačiosios prizmės pagrindas — statusis trikampis, kurio smailusis kampas α. Didžiausios šoninės sienos įstrižainė lygi d ir su šonine briauna sudaro kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.058. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainės susikerta. Kampas, esantis prieš pagrindą, lygus α. Ritinio tūris lygus V. Raskite ritinio aukštinę.

12.059. Sukant rombą apie jo ilgesniąją įstrižainę ir apie kraštinę, gaunami kūnai, kurių tūrių santykis lygus $1:2\sqrt{5}$. Raskite rombo smailųjį kampą.

12.060. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio šoninė kraštinė lygi a, o kampas prie viršūnės lygus α. Visos šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą kampu β. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.061. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios pagrindai a ir b ($a>b$), o smailusis kampas α. Plokštuma, einanti per viršutinės trapecijos ilgesnįjį pagrindą ir apatinės trapecijos trumpesnįjį pagrindą, su prizmės apatinio pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.062. Kampas tarp stačiakampio gretasienio pagrindo įstrižainių lygus α. Gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Gretasienio tūris lygus V. Raskite gretasienio aukštinę.

12.063. Keturkampės piramidės kiekviena šoninė briauna su aukštine sudaro kampą α. Piramidės pagrindas — stačiakampis, kurio kampas tarp įstrižainių lygus β. Piramidės aukštinė lygi h. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.064. Į kūgio pagrindą įbrėžtas kvadratas, kurio kraštinė a. Kūgį kerta plokštuma, einanti per vieną šio kvadrato kraštinę ir kūgio viršūnę. Pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio kampas prie viršūnės lygus α. Raskite kūgio tūrį.

12.065. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.066. Per taisyklingosios keturkampės prizmės apatinio pagrindo įstrižainę ir viršutinio pagrindo prieš ją esančią viršūnę išvesta plokštuma. Kampas tarp lygių pjūvio kraštinių lygus α. Raskite prizmės aukštinės ir pagrindo kraštinės santykį.

12.067. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio kampas prie viršūnės lygus α. Prieš šį kampą esančios sienos įstrižainė lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.068. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna su pagrindo kraštine sudaro kampą α. Raskite kampą tarp šoninės briaunos ir piramidės aukštinės bei leistinąsias α reikšmes.

12.069. Ritinio ašiai lygiagreti plokštuma dalija pagrindo apskritimą santykiu $m:n$. Pjūvio plotas lygus S. Apskaičiuokite ritinio šoninį paviršių.

12.070. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninės briaunos paporiui statmenos. Raskite kampą tarp šoninės sienos ir pagrindo plokštumos.

12.071. Į pusrutulį įbrėžtas kūgis; kūgio viršūnė sutampa su skritulio — pusrutulio pagrindo — centru; kūgio ir pusrutulio pagrindų plokštumos lygiagrečios. Tiesė, einanti per kūgio pagrindo centrą ir bet kurį pusrutulio didžiojo apskritimo tašką, su kūgio pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite pusrutulio ir kūgio tūrių santykį.

12.072. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio smailusis kampas α. Piramidės aukštinė lygi H. Visos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro tokį pat kampą β. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.073. Kūgio sudaromoji lygi a, atstumas nuo kūgio viršūnės iki įbrėžtinio rutulio centro lygus b. Raskite kampą tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos.

12.074. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Rutulio ir kūgio paviršiaus lietimosi apskritimo ir kūgio pagrindo spindulių santykis lygus k. Raskite kampo tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos kosinusą.

12.075. Ritinio pagrindo ir ašinio pjūvio plotų santykis lygus $m:n$. Raskite smailųjį kampą tarp ašinio pjūvio įstrižainių.

12.076. Stačiosios prizmės pagrindas yra rombas, kurio smailusis kampas α. Prizmės aukštinės ir pagrindo kraštinės santykis lygus k. Per pagrindo kraštinę ir prieš ją esančios šoninės briaunos vidurio tašką išvesta plokštuma. Raskite kampą tarp šios plokštumos ir pagrindo plokštumos.

12.077. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinių santykis $1:2$, pagrindo smailusis kampas α. Gretasienio aukštinė lygi pagrindo ilgesniajai įstrižainei. Raskite kampą tarp gretasienio trumpesniosios įstrižainės ir pagrindo plokštumos.

12.078. Trikampės piramidės pagrindo vienos kraštinės ir kiekvienos iš kitų penkių jos briaunų santykis lygus k. Raskite dvisienį kampą tarp dviejų lygių piramidės šoninių sienų ir leistinąsias k reikšmes.

12.079. Kvadrato plokštuma sudaro kampą α su plokštuma, išvesta per vieną iš jo kraštinių. Kokį kampą su ta pačia plokštuma sudaro kvadrato įstrižainė?

12.080. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna lygi pagrindo kraštinei. Raskite kampą tarp pagrindo kraštinės ir jos nekertančios šoninės sienos įstrižainės.

12.081. Stačiakampio gretasienio šoninių sienų įstrižainės su pagrindo plokštuma sudaro kampus α ir β. Raskite kampą tarp gretasienio įstrižainės ir pagrindo plokštumos.

12.082. Per taisyklingosios keturkampės prizmės dviejų gretimų šoninių sienų susikertančias įstrižaines išvesta plokštuma. Ji su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite kampą tarp šių įstrižainių.

12.083. Taisyklingosios n-kampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite kampą tarp gretimų šoninių piramidės sienų apotemų.

12.084. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi pagrindo kraštinei. Raskite kampo tarp piramidės apotemos ir pagrindo įstrižainės kosinusą.

12.085. Į kūgį įbrėžta trikampė piramidė, kurios šoninės briaunos paporiui statmenos. Apskaičiuokite kampą tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės.

12.086. Dvisienio kampo, kuris lygus α, sienoje nubrėžta tiesė, sudaranti su dvisienio kampo briauna kampą β. Raskite kampą tarp tos tiesės ir kitos sienos.

12.087. Kūgio šoninis paviršius lygus pagrindo ploto ir viso paviršiaus geometriniam vidurkiui. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės.

12.088. Trikampės piramidės visos šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą tokiu pat kampu, lygiu vienam iš stačiojo trikampio — piramidės pagrindo — smailiųjų kampų. Trikampio įžambinė lygi c, o piramidės tūris lygus V. Raskite tą kampą.

12.089. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi l ir su šonine briauna sudaro kampą α. Gretasienio pagrindo perimetras lygus P. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

12.090. Per ritinio sudaromąją išvesta plokštuma. Ji ir ašinio pjūvio, kuriame yra ta sudaromoji, plokštuma sudaro smailųjį kampą α. Perkirtus ritinį ta plokštuma, gautas stačiakampis, kurio įstrižainė lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite ritinio tūrį.

12.091. Rombo kraštinė a, jo smailusis kampas α. Rombas sukamas apie ilgesniajai įstrižainei lygiagrečią tiesę, einančią per jo viršūnę. Apskaičiuokite sukinio tūrį.

12.092*. Rutulio tūris lygus V. Jo išpjovos ašinio pjūvio centrinis kampas lygus α. Apskaičiuokite išpjovos tūrį.

12.093. Kampas tarp taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės ir šoninės briaunos lygus α $\left(\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$. Kokiu santykiu apibrėžtinio rutulio centras dalija piramidės aukštinę?

12.094. Dviejų kūgių, turinčių bendrą viršūnę, pagrindai yra vienoje plokštumoje. Kūgių tūrių skirtumas lygus V. Iš didesniojo apskritimo bet kurio taško nubrėžtos mažesniojo apskritimo liestinės sudaro kampą α. Raskite mažesniojo kūgio tūrį.

12.095. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro smailųjį kampą α. Raskite kampą tarp piramidės aukštinės ir šoninės briaunos.

16. Užsak. Nr. 1941.

12.096. Į kūgį įbrėžtas pusrutulis: pusrutulio didysis skritulys yra kūgio pagrindo plokštumoje, o rutulio paviršius liečia kūgio paviršių. Kūgio sudaromoji lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite pusrutulio tūrį.

12.097. Taisyklingosios n-kampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės lygios a ir b. Šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite piramidės šoninį paviršių.

12.098. Į rutulį įbrėžtas kūgis. Kūgio ašinio pjūvio plotas S, o kampas tarp aukštinės ir sudaromosios α. Apskaičiuokite rutulio tūrį.

12.099. Keturkampės piramidės pagrindas — rombas, kurio kraštinė a ir smailusis kampas α. Visos šoninės sienos pasvirusios į pagrindo plokštumą tokiu pat kampu β. Raskite visą piramidės paviršių.

12.100. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios įstrižainė a, o kampas tarp įstrižainės ir ilgesniojo pagrindo α. Prizmės įstrižainė pasvirusi į pagrindą kampu β. Raskite prizmės tūrį.

12.101. Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo kraštinė lygi a. Dviejų gretimų šoninių sienų susikertančios įstrižainės sudaro kampą α. Raskite prizmės tūrį.

12.102. Kūgio tūris lygus V. Į kūgį įbrėžta piramidė, kurios pagrindas — lygiašonis trikampis. Kampas tarp jo šoninių kraštinių lygus α. Raskite piramidės tūrį.

12.103. Per dvi kūgio sudaromąsias, kurios sudaro kampą α, išvesta plokštuma. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus β. Raskite pjūvio ploto ir kūgio viso paviršiaus santykį.

12.104. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninio paviršiaus ir jos pagrindo ploto santykis lygus k. Raskite kampą tarp piramidės šoninės briaunos ir aukštinės.

12.105. Kampas tarp dviejų kūgio sudaromųjų lygus α. Per šias sudaromąsias išvesta plokštuma, kuri su pagrindu sudaro kampą β. Kūgio aukštinė lygi h. Raskite to kūgio tūrį.

12.106. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi H, dvisienis kampas prie pagrindo lygus α. Raskite piramidės visą paviršių.

12.107. Apie rutulį apibrėžtas nupjautinis kūgis, kurio vieno pagrindo plotas keturis kartus didesnis negu kito pagrindo. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos.

12.108. Per kubo apatinio pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, dalijanti kubo tūrį santykiu $m:n$ skaičiuojant nuo apatinio pagrindo. Raskite kampą tarp tos plokštumos ir pagrindo plokštumos, kai $m \leqslant n$.

12.109. Taisyklingosios trikampės prizmės aukštinė lygi H. Per apatinio pagrindo vidurinę liniją ir jai lygiagrečią viršutinio pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kuri su apatinio pagrindo plokštuma sudaro smailųjį dvisienį kampą α. Raskite pjūvio, gauto prizmę perkirtus ta plokštuma, plotą.

12.110. Apie taisyklingąją trikampę nupjautinę piramidę apibrėžtas nupjautinis kūgis. Piramidės šoninę sieną sudarančios trapecijos smailusis kampas lygus α; į tą trapeciją galima įbrėžti r spindulio apskritimą. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio šoninį paviršių.

12.111. Trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, o prie jos esantys pagrindo kampai α ir β. Visos šoninės briaunos su piramidės aukštine sudaro tokį pat kampą φ. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.112. Atstumas nuo kūgio pagrindo centro iki sudaromosios lygus d. Kampas tarp sudaromosios ir aukštinės lygus α. Apskaičiuokite kūgio visą paviršių.

12.113. Piramidės $ABCD$ pagrindas yra statusis trikampis ABC ($\angle C=90°$). Šoninė briauna AD statmena pagrindui. Raskite smailiuosius trikampio ABC kampus, kai $\angle DBA=\alpha$ ir $\angle DBC=\beta$ ($\alpha<\beta$).

12.114. Per taisyklingosios šešiakampės prizmės pagrindo kraštinę ir atkarpos, jungiančios pagrindų centrus, vidurio tašką išvesta plokštuma. Ji su pagrindo plokštuma sudaro smailųjį kampą α. Prizmės pagrindo kraštinė lygi a. Raskite pjūvio, gauto prizmę perkirtus ta plokštuma, plotą.

12.115. Į kūgį įbrėžtas rutulys, kurio paviršius lygus kūgio pagrindo plotui. Raskite kūgio ašinio pjūvio kampo prie viršūnės kosinusą.

12.116. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio šoninė kraštinė a, o kampas tarp šoninių kraštinių α. Prizmės šoninis paviršius lygus S. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.117. Į kūgį įbrėžtos piramidės pagrindas — keturkampis, kurio gretimos kraštinės paporiui lygios, o kampas tarp vienos poros gretimų kraštinių lygus α. Raskite piramidės ir kūgio tūrių santykį.

12.118. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi pagrindo kraštinei. Raskite kampo tarp gretimų piramidės šoninių sienų kosinusą.

12.119. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Jų lietimosi apskritimo spindulys lygus r. Kampas tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios lygus α. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

12.120. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi m ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.121. Piramidės pagrindas — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė a. Dvi piramidės šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai, o lygios šoninės briaunos viena su kita sudaro kampą α. Šios piramidės ir nubrėžtos stačiosios prizmės pagrindas yra bendras, o tūriai lygūs. Raskite prizmės aukštinę.

12.122. Kūgio pagrindo styga a jungia $\alpha°$ lanką, o kampas tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios lygus β. Raskite kūgio tūrį.

12.123. Kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus 2α, aukštinės ir sudaromosios ilgių suma lygi a. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

12.124. Stačiojo gretasienio pagrindas — rombas, kurio smailusis kampas α ir trumpesnioji įstrižainė d. Gretasienio aukštinė perpus trumpesnė už pagrindo kraštinę. Apskaičiuokite gretasienio visą paviršių.

12.125. Taisyklingosios dvylikakampės piramidės briaunos sunumeruotos iš eilės. Per jos pirmąją ir penktąją briauną išvesta plokštuma, kuri su piramidės pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Gauto pjūvio plotas lygus S. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.126. Sfera, kurios centras yra kūgio viršūnė, liečia jo pagrindą ir dalija kūgio tūrį pusiau. Raskite kūgio ašinio pjūvio kampą.

12.127. Ritinio šoninio paviršiaus išklotinė — **stačiakampis,** kurio įstrižainės susikerta kampu α. Įstrižainės ilgis d. Apskaičiuokite ritinio šoninį paviršių.

12.128. Į kūgį, kurio sudaromoji l, įbrėžta taisyklingoji šešiakampė prizmė. Jos briaunos yra lygios. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės lygus α. Apskaičiuokite prizmės šoninį paviršių.

12.129. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, o dvisienis kampas prie pagrindo α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.130. Ritinio šoninio paviršiaus išklotinė — stačiakampis, kurio įstrižainė lygi a ir su pagrindu sudaro kampą α. Raskite ritinio tūrį.

B grupė

12.131. Smailiojo trikampio ABC aukštinė $AD=a$, aukštinė $CE=b$, smailusis kampas tarp AD ir CE lygus α. Raskite AC.

12.132. Stačiojo trikampio smailusis kampas lygus α. Raskite į trikampį įbrėžto ir apie jį apibrėžto apskritimų spindulių santykį. Su kuria α reikšme šis santykis yra didžiausias?

12.133. Išpjovos AOB lankas AB lygus α radianų. Per tašką B ir spindulio OA vidurio tašką C nubrėžta tiesė. Kokiu santykiu ji dalija išpjovos plotą?

12.134. Lygiašonės trapecijos pagrindai a ir b $(a>b)$, kampas prie ilgesniojo pagrindo α. Raskite apie trapeciją apibrėžto apskritimo spindulį.

12.135. Išpjovos centrinis kampas lygus α radianų. Raskite šios išpjovos ir įbrėžto į ją skritulio plotų santykį.

12.136. Trapecijos šoninės kraštinės lygios p ir q $(p<q)$, ilgesnysis pagrindas a. Kampų prie ilgesniojo pagrindo santykis $2:1$. Raskite trumpesnįjį pagrindą.

12.137. Lygiašonės trapecijos plotas lygus S, įstrižainių sudarytas kampas prieš šoninę kraštinę lygus α. Raskite trapecijos aukštinę.

12.138. Į skritulį įbrėžtos trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus skritulio skersmeniui, o kampas prie pagrindo lygus α. Kokiu santykiu trapecijos įstrižainių susikirtimo taškas dalija jos aukštinę?

12.139. Į lygiakraštį trikampį ABC įbrėžtas lygiakraštis trikampis $A_1B_1C_1$; taškas A_1 priklauso kraštinei BC, taškas B_1 — kraštinei AC ir taškas C_1 — kraštinei AB. Kampas A_1B_1C lygus α. Raskite AB ir A_1B_1 santykį.

12.140. Iš taško O visos trys lygiašonio trikampio ABC kraštinės matomos tuo pačiu kampu $(\angle AOB=\angle BOC=\angle COA)$. Trikampio kampas prie pagrindo lygus $\alpha\left(\alpha>\frac{\pi}{6}\right)$. Kokiu santykiu taškas O dalija trikampio aukštinę?

12.141. Lygiašonio trikampio aukštinė lygi h ir su šonine kraštine sudaro kampą $\alpha\left(\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$. Raskite atstumą tarp įbrėžto į trikampį ir apibrėžto apie jį apskritimų centrų.

12.142. Į R spindulio apskritimą įbrėžtas trikampis, kurio viršūnės dalija apskritimą į dalis santykiu $2:5:17$. Apskaičiuokite trikampio plotą.

12.143. Lygiašonio trikampio kampo prie pagrindo tangentas lygus $\frac{3}{4}$. Raskite kampo tarp pusiaukraštinės ir pusiaukampinės, nubrėžtų į šoninę kraštinę, tangentą.

12.144. Pusiaukraštinė, nubrėžta į lygiašonio trikampio šoninę kraštinę, su pagrindu sudaro kampą, kurio sinusas lygus $\frac{3}{5}$. Raskite trikampio kampo prie viršūnės sinusą.

12.145. Per lygiašonio trikampio kampo α, esančio prie pagrindo, viršūnę nubrėžta tiesė. Ji kerta priešingą šoninę kraštinę ir su pagrindu sudaro kampą β. Kokiu santykiu ta tiesė dalija trikampio plotą?

12.146. Per lygiakraščio trikampio ABC viršūnes nubrėžtos lygiagrečios tiesės AD, BE ir CF. Tiesė BE yra tarp tiesių AD ir CF ir dalija atstumą tarp jų santykiu $m:n$ skaičiuojant nuo tiesės AD. Raskite kampą BCF.

12.147. Tiesė, nubrėžta per rombo smailiojo kampo viršūnę, dalija kampą santykiu $1:3$, o priešais esančią kraštinę — santykiu $3:5$. Raskite to kampo kosinusą.

12.148. Stačiakampio $ABCD$ $(BC\parallel AD)$ ploto ir jo įstrižainės kvadrato santykis lygus k. Raskite kampą EAF; čia E ir F — atitinkamai kraštinių BC ir CD vidurio taškai.

12.149. Apie r spindulio skritulį apibrėžta lygiašonė trapecija. Šoninė jos kraštinė su trumpesniuoju pagrindu sudaro kampą α. Raskite apie trapeciją apibrėžto skritulio spindulį.

12.150. Trikampio aukštinė dalija trikampio kampą santykiu $2:1$, o pagrindą — į atkarpas, kurių (ilgesnės ir trumpesnės) santykis lygus k. Raskite prie pagrindo esančio mažesniojo kampo sinusą ir leistinąsias k reikšmes.

12.151. Į statųjį trikampį įbrėžtas skritulys. Jų lietimosi taškas dalija trikampio įžambinę į atkarpas, kurių santykis lygus k. Raskite trikampio kampus.

12.152. Trapecijos šoninės kraštinės sutinka kaip jos perimetras su įbrėžtinio apskritimo ilgiu. Tas santykis lygus k. Raskite trapecijos kampus ir leistinąsias k reikšmes.

12.153. Į R spindulio išpjovą įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys r. Apskaičiuokite išpjovos perimetrą.

12.154. Į smailųjį lygiašonį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys 4 kartus mažesnis už apibrėžtinio apskritimo spindulį. Raskite trikampio kampus.

12.155. Trikampio ABC smailieji kampai, esantys prie kraštinės AC, lygūs α ir γ $(\alpha>\gamma)$. Iš viršūnės B nubrėžta pusiaukraštinė BD ir pusiaukampinė BE. Raskite trikampio BDE ir trikampio ABC plotų santykį.

12.156. Trapecijos $ABCD$ kampas prie viršūnės A lygus α. Šoninė kraštinė AB dvigubai ilgesnė už trumpesnįjį pagrindą BC. Raskite kampą BAC.

12.157. Raskite kampą tarp stačiojo trikampio pusiaukraštinės ir pusiaukampinės, kurios nubrėžtos iš smailiojo kampo α viršūnės.

12.158. Stačiojo trikampio smailiųjų kampų pusių tangentų sandauga lygi $\frac{1}{6}$. Raskite tų kampų kosinusus.

12.159. Lygiagretainio kraštinių santykis $p:q$, o įstrižainių santykis $m:n$. Raskite lygiagretainio kampus.

12.160. Rombo perimetro ir jo įstrižainių sumos santykis lygus k. Raskite rombo kampus ir leistinąsias k reikšmes.

12.161. Lygiašonio trikampio aukštinių susikirtimo taškas dalija į pagrindą nubrėžtą aukštinę pusiau. Raskite trikampio kampų kosinusus.

12.162. Išpjovos perimetras l, jos lanko spindulys R. Raskite atstumą nuo išpjovos centrinio kampo viršūnės iki įbrėžto į tą išpjovą apskritimo centro.

12.163. Jeigu trikampio dviejų kampų sinusų sumos ir tų kampų kosinusų sumos santykis lygus trečiojo kampo sinusui, tai tas trikampis yra statusis. Įrodykite.

12.164. Iš rombo kraštinės vidurio taško priešinga kraštinė matoma kampu α. Raskite rombo kampo sinusą.

12.165. Trikampio kraštinė lygi a, o prie jos esančių kampų skirtumas lygus $\frac{\pi}{2}$. Trikampio plotas S. Raskite trikampio kampus.

12.166. Į stačiojo trikampio statinius nubrėžtos pusiaukraštinės. Jos sudaro smailųjį kampą, kurio tangentas lygus k. Raskite trikampio kampus ir leistinąsias k reikšmes.

12.167. Išpjovos lanko spindulys lygus R, centrinis kampas AOB lygus α. Per spindulio OA vidurio tašką C nubrėžta tiesė, kuri lygiagreti spinduliui OB ir kerta lanką AB taške D. Apskaičiuokite trikampio OCD plotą.

12.168. Trikampio kraštinė a, priešais ją esantis kampas α ir į tą kraštinę nubrėžta aukštinė h. Raskite kitų dviejų kraštinių sumą.

12.169. Į kvadratą $ABCD$ įbrėžtas lygiašonis trikampis AEF; taškas E priklauso kraštinei BC, taškas F — kraštinei CD ir $AE=EF$. Kampo AEF tangentas lygus 2. Raskite kampo FEC tangentą.

12.170. Trikampio ABC smailieji kampai prie pagrindo AC lygūs α ir γ $(\alpha>\gamma)$. Iš viršūnės B nubrėžta aukštinė BC ir pusiaukraštinė BE. Apskaičiuokite trikampio BDE plotą, kai trikampio ABC plotas lygus S.

12.171. Stačiojo trikampio ABC smailusis kampas A lygus α. Per įžambinės AB vidurio tašką D nubrėžta tiesė, kuri kerta statinį AC taške E. Kokiu santykiu ta tiesė dalija trikampio ABC plotą, kai $\angle DEA=\beta$, $AE>0{,}5AC$?

12.172. Į skritulį įbrėžta trapecija. Jos ilgesnysis pagrindas su šonine kraštine sudaro kampą α, o su įstrižaine — kampą β. Raskite skritulio ir trapecijos plotų santykį.

12.173. Trikampio ABC kampas A lygus α ir kraštinė $BC=a$. Kampas tarp pusiaukampinės AD ir aukštinės AE lygus β. Raskite pusiaukampinės AD ilgį.

12.174. Lygiašonį trikampį, kurio kampas prie viršūnės lygus α, kerta tiesė, einanti per kampo prie pagrindo viršūnę ir sudaranti su pagrindu kampą β. Kokiu santykiu ta tiesė dalija trikampio plotą?

12.175. Išpjovos AOB lanko spindulys lygus R, centrinis kampas AOB lygus α. Į šią išpjovą įbrėžtas taisyklingasis trikampis, kurio viena viršūnė sutampa su lanko AB vidurio tašku, o — kitos dvi viršūnės priklauso atitinkamai spinduliams OA ir OB. Raskite trikampio kraštinę.

12.176. Į lygiašonį trikampį, kurio pagrindas a ir kampas prie pagrindo α, įbrėžtas apskritimas. Raskite spindulį apskritimo, liečiančio įbrėžtinį apskritimą ir trikampio šonines kraštines.

12.177. Kampo α viduje per atstumą a nuo viršūnės ir per atstumą b nuo vienos kraštinės pažymėtas taškas. Raskite jo atstumą iki kitos kampo kraštinės.

12.178. Stačiojo trikampio ABC smailusis kampas A lygus α, jo pusiaukampinė AD. Raskite į trikampius ABD ir ADC įbrėžtų apskritimų spindulių santykį.

12.179. Į lygiašonį trikampį įbrėžtas stačiakampis, kurio dvi viršūnės priklauso pagrindui. To stačiakampio perimetras yra pastovus. Raskite trikampio kampo prie viršūnės sinusą.

12.180. Trikampio kraštinė lygi 15, o kitų dviejų kraštinių suma 27. Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 4. Raskite prieš duotąją kraštinę esančio kampo kosinusą.

12.181. Apskritimo mažesnysis lankas, kurį jungia styga AB, lygus $\alpha°$. Per stygos AB vidurio tašką C nubrėžta styga DE taip, kad $DC:CE=1:3$. Raskite smailųjį kampą ACD ir leistinąsias α reikšmes.

12.182. Trikampio ABC pusiaukraštinė BD susikerta su pusiaukampine CE taške K. Raskite $CK:KE$, kai $\angle A=\alpha$ ir $\angle B=\beta$.

12.183. Lygiašonio bukojo trikampio plotas lygus 8, o į jo šoninę kraštinę nubrėžta pusiaukraštinė lygi $\sqrt{37}$. Raskite kampo prie viršūnės kosinusą.

12.184. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α. Į pagrindą nuleista aukštinė ilgesnė už įbrėžtinio skritulio spindulį dydžiu m. Raskite apibrėžtinio skritulio spindulį.

12.185. Trikampio plotas S, kraštinė a ir prieš ją esantis kampas α. Raskite kitų dviejų kraštinių sumą.

12.186. Sakykime, OA — apskritimo, kurio centras yra taškas O, nejudamas spindulys; B — spindulio OA vidurio taškas; M — bet kuris apskritimo taškas. Raskite didžiausią kampo OMB reikšmę.

12.187. Lygiašonio smailiojo trikampio kampas prie pagrindo lygus α, o plotas S. Šio trikampio aukštinių pagrindai yra kito trikampio viršūnės. Raskite pastarojo trikampio plotą.

12.188. Sakykime, a, b, c — smailiojo trikampio kraštinių ilgiai; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — prieš tas kraštines esantys kampai; P_a, P_b, P_c — atstumai nuo apibrėžtinio apskritimo centro iki atitinkamų kraštinių. Laikydami, kad $\angle A<\angle B<\angle C$, surašykite P_a, P_b, P_c didėjimo tvarka.

12.189. Spindulys, nubrėžtas iš lygiakraščio trikampio viršūnės, dalija jo pagrindą santykiu $m:n$. Raskite bukąjį kampą tarp spindulio ir pagrindo.

12.190. Per lygiakraščio trikampio viršūnę nubrėžta tiesė, kuri dalija pagrindą santykiu $2:1$. Kokius kampus ji sudaro su trikampio šoninėmis kraštinėmis?

12.191. Trikampio pagrindas lygus a, o kampai prie pagrindo lygūs α ir β radianų. Priešingą trikampio viršūnę laikant centru, nubrėžtas apskritimas, kurio spindulys lygus trikampio aukštinei. Raskite trikampio viduje esančio apskritimo lanko ilgį.

12.192. Duotos dvi trikampio kraštinės: a ir b; kampo tarp jų pusiaukampinė l. Raskite tą kampą.

12.193. Trikampio pagrindas lygus 4, o pusiaukraštinė $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Vienas iš kampų prie pagrindo lygus 15°. Įrodykite, kad smailusis kampas tarp trikampio pagrindo ir pusiaukraštinės lygus 45°.

12.194. Trapecijos trumpesnysis pagrindas lygus 2, o prie jo esantys kampai — po 135°. Prieš pagrindą esantis kampas tarp įstrižainių lygus 150°. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

12.195. Jeigu trikampio vieno iš kampų pusiaukampinė lygi tą kampą sudarančių kraštinių sandaugos ir jų sumos santykiui, tai tas kampas lygus 120°. Įrodykite.

12.196. Trikampio ABC kraštinė $AB=a$, $\angle C=\alpha$. Per viršūnes A, B ir įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centrą nubrėžtas apskritimas. Raskite jo spindulį.

12.197. Trikampio ABC aukštinė BM. Ją laikant skersmeniu, nubrėžtas apskritimas, kuris kerta kraštinę AB taške K, o kraštinę BC — taške Z; $\angle A=\alpha$ ir $\angle C=\beta$. Raskite trikampių KZM ir ABC plotų santykį.

12.198. Į rombą, kurio aukštinė h, o smailusis kampas α, įbrėžtas apskritimas. Į kreivinį trikampį, kurio kampai smailieji, įbrėžtas kitas apskritimas. Raskite jo spindulį.

12.199. Trikampio pagrindas lygus a, o prie jo esantys kampai lygūs 45° ir 15°. Viršūnę, esančią prieš pagrindą, laikant centru, nubrėžtas apskritimas. Jo spindulys lygus aukštinei, nuleistai į tą pagrindą. Raskite trikampio viduje esančios skritulio dalies plotą.

12.200. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Į šią piramidę įbrėžtas kubas, kurio keturios viršūnės priklauso piramidės apotemoms, o kitos keturios — piramidės pagrindui. Raskite kubo briauną.

12.201. Taisyklingosios dvylikakampės piramidės šoninės sienos plotas S, plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.202. Kūgio ir į jį įdėto rutulio paviršiai liečiasi. Rutulio spindulys R, o kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės lygus 2α. Raskite kūno, kurį riboja rutulio ir kūgio paviršiai, tūrį.

12.203. Plokštuma eina per taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinę a ir aukštinės vidurio tašką. Į pagrindą plokštuma pasvirusi kampu φ. Apskaičiuokite piramidės tūrį ir šoninį paviršių.

12.204. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė ir šoninė siena sudaro kampą α, o pagrindo kraštinė lygi a. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.205. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1\|BB_1\|CC_1)$ pagrindas — statusis trikampis ABC, kurio ilgesnysis statinis AB lygus a, o prieš jį esantis kampas C lygus α. Įžambinė BC yra

kūgio, kurio viršūnė priklauso briaunai A_1B_1, pagrindo skersmuo. Raskite kūgio aukštinę, kai $AA_1 = \frac{a}{2}$.

12.206. Per taisyklingosios trikampės piramidės viršūnę ir dviejų pagrindo kraštinių vidurio taškus išvestas pjūvis. Pagrindo kraštinė a, o kampas tarp pjūvio ir pagrindo α. Apskaičiuokite pjūvio plotą ir piramidės tūrį.

12.207. Iš taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės pagrindo į šoninę briauną nubrėžtas statmuo, kuris lygus p. Dvisienis kampas tarp piramidės šoninių sienų lygus α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.208. Iš taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės pagrindo į šoninę briauną nubrėžtas statmuo, kuris lygus p. Dvisienis kampas tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo lygus α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.209. Stačiojo gretasienio aukštinė lygi h, įstrižainės su pagrindu — rombu — sudaro kampus α ir β. Apskaičiuokite gretasienio šoninį paviršių ir tūrį.

12.210. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio pagrindas a, o kampas prie jo α. Prizmės šoninis paviršius lygus pagrindų plotų sumai. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.211. Piramidės pagrindas — rombas, kurio smailusis kampas α. Piramidės šoninės sienos su pagrindu sudaro tokį pat dvisienį kampą β; į piramidę įbrėžto rutulio spindulys lygus r. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.212. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio lygių kraštinių ilgis b; jas atitinkančios šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai ir viena su kita sudaro kampą α. Kampas tarp trečiosios šoninės sienos ir pagrindo plokštumos irgi lygus α. Raskite į piramidę įbrėžto rutulio spindulį.

12.213. Iš taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės pagrindo į šoninę sieną nuleistas statmuo, kuris lygus a. Šoninė briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.214. Piramidės pagrindas — rombas, kurio kraštinė a ir smailusis kampas α. Dvi šoninės sienos statmenos pagrindui, o kitos dvi pasvirusios į jį kampu φ. Apskaičiuokite piramidės tūrį ir šoninį paviršių.

12.215. Kampas tarp taisyklingosios trikampės piramidės šoninės briaunos ir pagrindo kraštinės lygus α. Per šoninės briaunos vidurio tašką išvestas pjūvis, lygiagretus šoninei sienai. Žinodami jo plotą S, apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.216. Iš kūgio pagrindo centro į sudaromąją nuleistas statmuo sukasi apie kūgio ašį. Sukimosi paviršius kūgio tūrį dalija pusiau. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir ašies.

12.217. Nupjautinio kūgio visas paviršius dvigubai didesnis už įbrėžto į kūgį rutulio paviršių. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo.

12.218. Stačiosios prizmės pagrindas — trikampis, kurio kraštinė a ir prie jos esantys kampai α ir β. Per pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kuri su pagrindu sudaro kampą φ ir kerta priešingą šoninę briauną. Apskaičiuokite gautos trikampės piramidės tūrį.

12.219*. Skritulio išpjovą sukant apie vieną iš kraštinių spindulių, gautas kūnas, kurio sferinio paviršiaus plotas lygus kūginio paviršiaus plotui. Raskite skritulio išpjovos centrinio kampo sinusą.

12.220. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna ir pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Per pagrindo viršūnę ir prieš ją esančios šoninės briaunos vidurio tašką išvesta plokštuma, lygiagreti vienai iš pagrindo įstrižainių. Raskite kampą tarp tos plokštumos ir piramidės pagrindo plokštumos.

12.221. Nupjautinės piramidės pagrindai yra taisyklingieji trikampiai. Per viršutinio pagrindo vienos kraštinės vidurio tašką ir jai lygiagrečios apatinio pagrindo kraštinės vidurio tašką einanti tiesė yra statmena pagrindų plokštumoms. Ilgesnioji šoninė briauna lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite atkarpos, jungiančios viršutinio ir apatinio pagrindo centrus, ilgį.

12.222. Piramidės pagrindas — rombas, kurio vienas iš kampų lygus α. Šoninės sienos vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą. Per dviejų gretimų pagrindo kraštinių vidurio taškus ir piramidės viršūnę išvesta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Gauto pjūvio plotas lygus S. Raskite rombo kraštinę.

12.223. Piramidės pagrindas — rombas, kurio smailusis kampas α. Visos šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro tokį pat kampą β. Per ilgesniąją pagrindo įstrižainę ir piramidės viršūnę nubrėžto pjūvio plotas lygus S. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.224. Taisyklingosios trikampės piramidės dvisienis kampas prie pagrindo lygus α, šoninis paviršius lygus S. Raskite atstumą nuo pagrindo centro iki šoninės sienos.

12.225. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi H. Šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Per pagrindo kraštinę ir prieš ją esančios šoninės briaunos vidurio tašką išvesta plokštuma. Apskaičiuokite gauto pjūvio plotą.

12.226. Trikampės piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio plotas S ir kampas prie viršūnės lygus α. Kampas tarp kiekvienos šoninės briaunos ir piramidės aukštinės lygus β. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.227. Piramidės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios šoninė kraštinė a, o smailusis kampas α. Visos šoninės sienos su piramidės pagrindu sudaro tokį pat kampą β. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

12.228. Taisyklingosios trikampės piramidės dvisienis kampas prie pagrindo α, piramidės šoninis paviršius S. Raskite atstumą nuo pagrindo centro iki šoninės sienos apotemos vidurio taško.

12.229. Taisyklingosios n-kampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Piramidės pagrindo centrą ir šoninės briaunos vidurio tašką jungianti atkarpa lygi a. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

12.230. Dviejų kūgių pagrindai yra koncentrai, o kampai tarp kūgių aukštinės ir sudaromosios lygūs α. Išorinio kūgio pagrindo spindulys R. Vidinio kūgio šoninis paviršius perpus mažesnis už išorinio kūgio visą paviršių. Apskaičiuokite vidinio kūgio tūrį.

12.231. Į ritinį įbrėžtas stačiakampis gretasienis, kurio įstrižainė su esančiomis prie jos pagrindo kraštinėmis sudaro kampus α ir β. Raskite gretasienio ir ritinio tūrių santykį.

12.232. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio smailusis kampas α. Tas trikampis įbrėžtas į kūgio pagrindą. Piramidės viršūnė sutampa su kūgio vienos iš sudaromųjų vidurio tašku. Raskite kūgio ir piramidės tūrių santykį.

12.233. Į taisyklingąją keturkampę piramidę įbrėžtas kubas; viršutinio jo pagrindo viršūnės priklauso šoninėms briaunoms, apatinio pagrindo viršūnės — piramidės pagrindo plokštumai. Piramidės šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite kubo ir piramidės tūrių santykį.

12.234. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a; šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite apibrėžtinio rutulio spindulį.

12.235. Kampas tarp taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos lygus piramidės plokščiajam kampui prie viršūnės. Raskite kampą, kurį šoninė siena sudaro su pagrindo plokštuma.

12.236*. Rutulio nuopjovos ašinio pjūvio lankas atitinka centrinį kampą, kuris lygus α. Raskite rutulio nuopjovos ir viso rutulio tūrių santykį.

12.237. Stačiojo trikampio įžambinė c, jo smailusis kampas α. Trikampis sukasi apie išorinio stačiojo kampo pusiaukampinę. Apskaičiuokite sukinio tūrį.

12.238. Į nupjautinį kūgį įbrėžtas rutulys. Kūgio viršutinio ir apatinio pagrindo skersmenų suma penkis kartus didesnė už rutulio spindulį. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos.

12.239. Į kūgį įbrėžto rutulio paviršiaus ir kūgio pagrindo ploto santykis lygus k. Raskite kampo tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos kosinusą bei leistinąsias k reikšmes.

12.240. Į kūgį įbrėžto ir apie jį apibrėžto rutulio tūrių santykis lygus k. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos bei leistinąsias k reikšmes.

12.241. Į rutulį, kurio spindulys R, įbrėžtas kūgis; į šį kūgį brėžtas ritinys, kurio ašinis pjūvis — kvadratas. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos lygus α. Apskaičiuokite ritinio visą paviršių.

12.242. Į pusrutulį įbrėžtas kūnas, kurį sudaro ritinys ir ant jo pastatytas kūgis. Ritinio apatinis pagrindas yra pusrutulio didžiojo skritulio plokštumoje; ritinio viršutinis pagrindas sutampa su kūgio pagrindu ir liečia rutulio paviršių. Kūgio viršūnė yra rutulio paviršiuje. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos lygus α. Raskite kūno ir pusrutulio tūrių santykį.

12.243. Taisyklingosios nupjautinės trikampės piramidės šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite piramidės viso paviršiaus ir į ją įbrėžto rutulio paviršiaus santykį.

12.244. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Rutulio paviršiaus ir kūgio šoninio paviršiaus lietimosi apskritimo spindulys lygus r. Tiesė, einanti per rutulio centrą ir bet kurį kūgio pagrindo apskritimo tašką, su kūgio aukštine sudaro kampą α. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

12.245. Kūgio ir įbrėžto į jį rutulio tūrių santykis lygus k. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios bei pagrindo plokštumos ir leistinąsias k reikšmes.

12.246. Kūgio šoninis paviršius lygus pagrindo ir ašinio pjūvio plotų sumai. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos.

12.247. Kampas tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios lygus α. Į kūgį įbrėžta taisyklingoji trikampė prizmė; apatinis jos pagrindas yra kūgio pagrindo plokštumoje. Prizmės šoninės sienos — kvadratai. Raskite prizmės ir kūgio šoninių paviršių santykį.

12.248. Apie rutulį apibrėžta stačioji prizmė, kurios pagrindas — rombas. Prizmės ilgesnioji įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite rombo smailųjį kampą.

12.249. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Į piramidę įbrėžtas stačiakampis gretasienis, kurio viršutinis pagrindas sutampa su piramidės viršutiniu pagrindu, o apatinis pagrindas yra piramidės apatinio pagrindo plokštumoje. Gretasienio įstrižainė su jo pagrindu sudaro kampą β. Raskite piramidės ir gretasienio šoninių paviršių santykį.

12.250. Į kūgį įdėta piramidė; piramidės pagrindas įbrėžtas į kūgio pagrindą, o piramidės viršūnė yra vienoje iš kūgio sudaromųjų. Visos piramidės šoninės sienos vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio viršūnės kampas α $\left(\alpha \geqslant \frac{\pi}{3}\right)$. Raskite kūgio ir piramidės tūrių santykį.

12.251. Į taisyklingąją keturkampę piramidę įbrėžto rutulio centras dalija piramidės aukštinę santykiu $m:n$ skaičiuojant nuo piramidės viršūnės. Raskite kampą tarp dviejų gretimų šoninių sienų.

12.252. Taisyklingosios n-kampės piramidės pagrindo kraštinės ir apibrėžtinio rutulio spindulio santykis lygus k. Raskite kampą tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos bei leistinąsias k reikšmes.

12.253. Į kūgį įbrėžtas ritinys; apatinis ritinio pagrindas yra kūgio pagrindo plokštumoje. Per ritinio viršutinio pagrindo centrą ir kūgio pagrindo apskritimo tašką eina tiesė, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės lygus β. Raskite kūgio ir ritinio tūrių santykį.

12.254. Piramidės pagrindas — rombas, kurio smailusis kampas α. Visos šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro tokį pat kampą β. Piramidės tūris lygus V. Raskite į piramidę įbrėžto rutulio spindulį.

12.255. Trikampės piramidės dvi sienos — lygūs statieji trikampiai, kurių bendras statinis l. Kampas tarp tų sienų lygus α. Kitos dvi piramidės briaunos sudaro dvisienį kampą β. Raskite apie piramidę apibrėžto rutulio spindulį.

12.256. Piramidės pagrindas — stačiakampis; kampas tarp jo įstrižainių lygus α. Viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai, o ilgiausioji šoninė briauna ir ta plokštuma sudaro kampą β. Apie piramidę apibrėžto rutulio spindulys lygus R. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.257. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, įbrėžtas į kūgio pagrindą. Piramidės viršūnė sutampa su kūgio viršūne. Piramidės šoninės sienos, kuriose yra pagrindo statiniai, su pagrindo plokštuma sudaro kampus α ir β. Raskite piramidės ir kūgio tūrių santykį.

12.258. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindas — kvadratas, kurio kraštinė a. Į piramidę įbrėžta taisyklingoji keturkampė prizmė; jos viršutinio pagrindo viršūnės yra piramidės šoninėse briaunose, o apatinio pagrindo viršūnės — piramidės pagrindo plokštumoje. Prizmės įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Piramidės šoninė briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.259. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės apatinio pagrindo kraštinė a, viršutinio pagrindo kraštinė b. Šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Per apatinio pagrindo kraštinę ir atkarpos, jungiančios pagrindų centrus, vidurio tašką išvesta plokštuma. Ji priešingą šoninę sieną kerta tiesė. Raskite atstumą nuo tos tiesės iki apatinio pagrindo.

12.260. Nupjautinės trikampės piramidės dvi šoninės sienos — lygios stačiosios trapecijos, kurių smailusis kampas α, o trumpesnioji šoninė kraštinė yra bendra. Dvisienis kampas tarp tų sienų lygus β. Raskite kampą tarp trečios šoninės sienos ir pagrindo plokštumos.

12.261. Per dvi kūgio sudaromąsias, tarp kurių kampas lygus α, išvesta plokštuma. Pjūvio ploto ir kūgio viso paviršiaus santykis lygus $2:\pi$. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės.

12.262. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Per apatinio pagrindo kraštinę ir jai lygiagrečią viršutinio pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kuri pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu β. Piramidės šoninis paviršius lygus S. Raskite viršutinio ir apatinio pagrindo kraštines.

12.263. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės aukštinė H lygi pagrindų kraštinių geometriniam vidurkiui. Šoninė briauna su pagrindu sudaro kampą α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.264. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinių santykis lygus $m:n$ $(m>n)$. Piramidės aukštinė H. Šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

12.265. Per kūgio viršūnę išvesta plokštuma, kuri dalija pagrindo apskritimą santykiu $p:q$. Ta plokštuma nutolusi nuo kūgio pagrindo centro per atstumą a ir su kūgio aukštine sudaro kampą α. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

12.266. Piramidės pagrindas — taisyklingasis trikampis. Dvi šoninės piramidės sienos statmenos pagrindo plokštumai. Dviejų nelygių plokščiųjų kampų prie viršūnės suma lygi $\frac{\pi}{2}$. Raskite tuos kampus.

12.267. Kūgio viso paviršiaus ir ašinio pjūvio ploto santykis lygus k. Raskite kampą tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios; leistinąsias k reikšmes.

12.268. Į ritinį įbrėžtos trikampės prizmės viena siena eina per ritinio ašį. Tos sienos įstrižainė ir prie jos esančios prizmės pagrindo kraštinės sudaro kampus α ir β. Ritinio aukštinė lygi H. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.269. Lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė a, dvi viršūnės priklauso ritinio viršutinio pagrindo apskritimui, o trečia viršūnė — apatinio pagrindo apskritimui. Kampas tarp trikampio plokštumos ir ritinio sudaromosios lygus α. Apskaičiuokite ritinio šoninį paviršių.

12.270. Taisyklingosios keturkampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus kampui tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos. Raskite tą plokščiąjį kampą.

12.271. Ritinio viršutinio ir apatinio pagrindo apskritimų taškus jungianti atkarpa lygi l ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite atstumą nuo tos tiesės iki ritinio ašies, kai ritinio ašinis pjūvis yra kvadratas.

12.272. Piramidės pagrindas yra stačiakampis. Kiekviena šoninė briauna lygi l ir su esančiomis prie jos pagrindo kraštinėmis sudaro kampus α ir β. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.273. Taškas A priklauso ritinio viršutinio pagrindo apskritimui, taškas B — apatinio pagrindo apskritimui. Tiesė AB su pagrindo plokštuma sudaro kampą α, o su nubrėžto per tašką B ašinio pjūvio plokštuma — kampą β. Atkarpos AB ilgis lygus l. Raskite ritinio tūrį.

12.274. Į kūgį įbrėžtas kubas (viena kubo siena yra kūgio pagrindo plokštumoje). Kūgio aukštinės ir kubo briaunos santykis lygus k. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės.

12.275. Piramidės pagrindas — stačiakampis. Dvi šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai, kitos dvi su ja sudaro kampus α ir β. Piramidės aukštinė lygi H. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

12.276. Stačiosios trikampės prizmės pagrindo viena kraštinė lygi a, o prie jos esantys kampai lygūs α ir β. Prizmės tūris V. Apskaičiuokite jos šoninį paviršių.

12.277. Trikampės piramidės viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai ir lygi l, kitos dvi briaunos viena su kita sudaro kampą α, o su pagrindo plokštuma — kampą β. Raskite piramidės tūrį.

12.278. Piramidės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas α, o plotas S. Visos šoninės sienos pasvirusios į pagrindo plokštumą tokiu pat kampu β. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.279. Taisyklingosios keturkampės piramidės dvi gretimos šoninės sienos sudaro kampą, kurio kosinusas lygus k. Raskite kampo tarp šoninės sienos ir pagrindo plokštumos kosinusą bei leistinąsias k reikšmes.

12.280. Piramidės pagrindas yra stačiakampis $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Šoninė briauna OA statmena pagrindui. Briaunos OB ir OC su pagrindu sudaro kampus α ir β. Raskite kampą tarp briaunos OD ir pagrindo.

12.281. Per taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo įstrižainę ir aukštinę išvesta plokštuma. Pjūvio ploto ir piramidės šoninio paviršiaus santykis lygus k. Raskite kampo tarp priešingų šoninių sienų apotemų kosinusą.

12.282. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna dvigubai ilgesnė už pagrindo kraštinę. Raskite kampą, kurį sudaro piramidės apotema ir jos nekertanti trikampio — piramidės pagrindo — aukštinė.

12.283. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a. Gretimos šoninės sienos sudaro kampą α. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

12.284. Per taisyklingosios trikampės piramidės šoninę briauną ir aukštinę išvesta plokštuma. Pjūvio ploto ir piramidės viso paviršiaus santykis lygus k. Raskite dvisienį kampą prie pagrindo.

12.285. Kampas tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios lygus α. Per kūgio viršūnę išvesta plokštuma, kuri su aukštine sudaro kampą β ($\beta<\alpha$). Kokiu santykiu ta plokštuma dalija pagrindo apskritimą?

12.286. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio smailusis kampas tarp lygių kraštinių yra α. Visos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro tokį pat kampą β. Per pagrindo kraštinę, esančią prieš duotąjį kampą α, ir piramidės aukštinės vidurio tašką išvesta plokštuma. Raskite kampą tarp tos plokštumos ir piramidės pagrindo plokštumos.

12.287. Stačiakampio gretasienio briaunų santykis lygus $3:4:12$. Per ilgiausią briauną eina įstrižinis pjūvis. Raskite kampo tarp to pjūvio plokštumos ir joje nesančios gretasienio įstrižainės sinusą.

12.288. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą, kurio tangentas lygus k. Raskite kampo tarp šoninės briaunos ir prieš ją esančios sienos apotemos tangentą.

12.289. Piramidės visos šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro tokį pat kampą. Raskite tą kampą, kai piramidės viso paviršiaus ir pagrindo ploto santykis lygus k. Su kuriomis k reikšmėmis uždavinys turi sprendinį?

12.290. Taisyklingosios n-kampės piramidės viso paviršiaus ir pagrindo ploto santykis lygus t. Raskite kampą tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos.

12.291. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės briaunos, nepriklausančios vienai sienai, viena su kita sudaro kampą, kurio kosinusas lygus k. Raskite piramidės plokščiojo kampo prie viršūnės kosinusą.

12.292. Per rombo kraštinę išvesta plokštuma, kuri su įstrižainėmis sudaro kampus α ir 2α. Raskite rombo smailųjį kampą.

12.293. Pasvirosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio $AB=AC=a$ ir $\angle CAB=\alpha$. Viršutinio pagrindo viršūnė B_1 vienodai nutolusi nuo visų apatinio pagrindo kraštinių, o briauna B_1B su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.294. Pasvirosios prizmės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios šoninė kraštinė ir trumpesnysis pagrindas a, o smailusis kampas β. Prizmės viršutinio pagrindo viena viršūnė vienodai nutolusi nuo visų apatinio pagrindo viršūnių. Šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.295. Apie r spindulio rutulį apibrėžta stačioji prizmė. Jos pagrindas — statusis trikampis, kurio smailusis kampas α. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.296. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dviejų gretimų šoninių sienų įstrižainės AB_1 ir CB_1 su pagrindo $ABCD$ įstrižaine AC sudaro kampus, lygius atitinkamai α ir β. Raskite kampą tarp trikampio AB_1C plokštumos ir pagrindo plokštumos.

17. Užsak. Nr. 1941.

12.297. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė lygi a, o kampas tarp dviejų šoninių sienų nesusikertančių įstrižainių lygus α. Raskite prizmės aukštinę.

12.298. Per stačiojo trikampio įžambinę išvesta plokštuma, kuri su trikampio plokštuma sudaro kampą α, o su vienu iš statinių — kampą β. Raskite kampą tarp tos plokštumos ir antrojo statinio.

12.299. Per stačiojo trikampio, kurio smailusis kampas α, trumpiausią pusiaukraštinę išvesta plokštuma. Ji su trikampio plokštuma sudaro kampą β. Raskite kampus tarp šios plokštumos ir trikampio statinių.

12.300. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna lygi pagrindo kraštinei. Raskite kampo, kurį sudaro dviejų gretimų prizmės šoninių sienų nesusikertančios įstrižainės, kosinusą.

12.301. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio šoninė kraštinė a ir kampas tarp šoninių kraštinių α. Prieš šį kampą esančios šoninės sienos įstrižainė su gretima šonine siena sudaro kampą φ. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.302. Stačiosios prizmės pagrindas yra trikampis. Du jo kampai lygūs α ir β, o plotas S. Per viršutinio pagrindo viršūnę ir apie apatinį pagrindą apibrėžto skritulio centrą nubrėžta tiesė, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.303. Pasvirosios prizmės pagrindas — stačiakampis, kurio kraštinės a ir b. Dvi gretimos šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro kampus α ir β. Šoninė briauna lygi c. Raskite prizmės tūrį.

12.304. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi l ir su dviem gretimomis sienomis sudaro kampus α ir β. Raskite gretasienio tūrį.

12.305. Per taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo centrą ir dviejų šoninių sienų simetrijos centrus išvesta plokštuma. Ji pasvirusi į pagrindo plokštumą smailiuoju kampu α. Pagrindo kraštinė lygi a. Raskite plotą pjūvio, gauto perkirtus prizmę ta plokštuma.

12.306. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ pagrindo kraštinės AB ir BC lygios atitinkamai a ir b, o kampas tarp jų lygus α. Per šio kampo pusiaukampinę ir viršūnę A_1 išvesta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

12.307. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ pagrindas — lygiašonis trikampis ABC, kurio kampas tarp lygių kraštinių AB ir AC lygus α. Atkarpa jungia viršutinio pagrindo viršūnę A_1 ir apie apatinį pagrindą apibrėžto apskritimo centrą. Ji lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.308. Prizmės pagrindas — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė a. Šoninė briauna lygi b ir su kertančiomis ją pagrindo kraštinėmis sudaro kampus, kurių kiekvienas lygus α. Raskite prizmės tūrį ir leistinąsias α reikšmes.

12.309. Prizmės pagrindas — stačiakampis. Šoninė briauna su pagrindo kraštinėmis sudaro lygius kampus ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite kampą tarp šoninės briaunos ir pagrindo kraštinės.

12.310. R spindulio rutulio paviršiuje yra visos lygiašonės trapecijos viršūnės. Trapecijos trumpesnysis pagrindas lygus šoninei kraštinei, o ilgesnysis pagrindas — rutulio spinduliui; smailusis trapecijos kampas lygus α. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki trapecijos plokštumos.

12.311. Kūgio aukštinė H, kampas tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus α. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Jų lietimosi taškai sudaro apskritimą. Nubrėžta to apskritimo liestinė, o per ją išvesta plokštuma, lygiagreti kūgio aukštinei. Raskite plotą pjūvio, gauto perkirtus rutulį šia plokštuma.

12.312. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, dvisienis kampas prie pagrindo α. Piramidę kerta plokštuma, lygiagreti pagrindui. Pjūvio plotas lygus susidariusios nupjautinės piramidės šoniniam paviršiui. Raskite atstumą nuo kertamosios plokštumos iki piramidės pagrindo.

12.313. Kūgio aukštinė H, kampas tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus α. Plokštuma, statmena aukštinei, dalija visą kūgio paviršių pusiau. Raskite atstumą nuo tos plokštumos iki kūgio pagrindo.

12.314. Kampo, kurį sudaro taisyklingosios trikampės piramidės apotema ir pagrindo plokštuma, bei kampo tarp piramidės šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos skirtumas lygus α. Raskite pirmąjį šių kampų.

12.315. Stačiojo trikampio statinis a, o prieš jį esantis kampas α. Šis trikampis sukamas apie tiesę, kuri yra trikampio plokštumoje, eina per duotojo kampo viršūnę ir statmena jo pusiaukampinei. Raskite sukinio tūrį.

12.316. Stačiojo gretasienio ir į jį įbrėžto rutulio tūrių santykis lygus k. Raskite gretasienio pagrindo kampus ir leistinąsias k reikšmes.

12.317. Apie rutulį apibrėžto nupjautinio kūgio sudaromoji lygi a, kampas tarp jos ir pagrindo plokštumos lygus α. Rutulio paviršiaus ir nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus lietimosi skritulys yra kito kūgio pagrindas. To kūgio viršūnė sutampa su nupjautinio kūgio didesniojo pagrindo centru. Raskite naujojo kūgio tūrį.

12.318. Į R spindulio rutulį įbrėžti du kūgiai, turintys bendrą pagrindą; kūgių viršūnės sutampa su rutulio skersmens priešingais galais. Rutulio nuopjovos, kurioje yra mažesnysis kūgis, ašinio pjūvio lankas lygus $\alpha°$. Raskite atstumą tarp įbrėžtų į tuos kūgius rutulių centrų.

12.319. Taisyklingosios n-kampės piramidės šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite piramidės ir apibrėžto apie ją rutulio tūrių santykį.

12.320. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninės sienos — kvadratai. Raskite kampą tarp šoninės sienos įstrižainės ir jos nekertančios pagrindo kraštinės.

12.321. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi a ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Į tą piramidę įbrėžtas ritinys, kurio ašinis pjūvis — kvadratas (ritinio pagrindas yra piramidės pagrindo plokštumoje). Apskaičiuokite ritinio tūrį.

12.322. Trikampio ABC kampas A lygus α, kampas C lygus β ir pusiaukampinė BD lygi l. Trikampis ABD sukasi apie tiesę BD. Raskite sukinio tūrį.

12.323. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiakraštis trikampis. Per vieną jo kraštinę išvesta plokštuma. Ji nukerta nuo prizmės piramidę, kurios tūris V. Kampas tarp kertamosios plokštumos ir pagrindo plokštumos lygus α. Raskite pjūvio plotą.

12.324. Taisyklingosios keturkampės piramidės pjūvis yra lygiagretus pagrindui. Tiesė, einanti per pagrindo viršūnę ir priešingą (t. y. nepriklausančią tai pačiai sienai) pjūvio viršūnę, su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Piramidės šoninė briauna lygi pagrindo įstrižainei ir lygi a. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

12.325. Piramidės pagrindas — lygiašonis smailusis trikampis, kurio šoninė kraštinė b ir kampas prie pagrindo α. Piramidės visos šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą tokiu pat kampu β. Piramidę kerta plokštuma, einanti per kampo α viršūnę ir piramidės aukštinę. Raskite pjūvio plotą.

12.326. Plokščiąją laužtę sudaro n lygių atkarpų. Kiekvienos atkarpos ilgis a, o kampas tarp jų α. Laužtė sukama apie tiesę, kuri eina per vieną jos galą ir yra lygiagreti kampo α pusiaukampinei. Raskite sukinio paviršių.

12.327. Du kūgiai turi bendrą aukštinę; jų viršūnės yra priešinguose tos aukštinės galuose. Vieno kūgio sudaromoji lygi l ir su aukštine sudaro kampą α. Kampas tarp kito kūgio sudaromosios ir aukštinės lygus β. Raskite kūgių bendros dalies tūrį.

12.328. Lygiašonis bukasis trikampis sukasi apie tiesę, einančią per jo aukštinių susikirtimo tašką ir lygiagrečią ilgiausiai kraštinei. Bukasis kampas lygus α, o prieš jį esanti trikampio kraštinė lygi a. Apskaičiuokite sukinio tūrį.

12.329. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė a, kampas prie pagrindo α. Trikampis sukasi apie tiesę, kuri eina per esančią prieš pagrindą viršūnę ir yra lygiagreti kampo α pusiaukampinei. Raskite sukinio paviršių.

12.330. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio smailusis kampas α. Į tą trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus r. Piramidės visos šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą tokiu pat kampu β. Raskite piramidės tūrį.

12.331. Į kūgį įbrėžtas rutulys ir išvesta rutulio liečiamoji plokštuma, lygiagreti kūgio pagrindo plokštumai. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus α. Kokiu santykiu liečiamoji plokštuma dalija kūgio šoninį paviršių?

12.332*. Į rutulio nuopjovos pagrindą įbrėžtas statusis trikampis, kurio plotas S, o smailusis kampas α. Nuopjovos ašinio pjūvio lanką atitinka centrinis kampas, lygus β. Raskite nuopjovos aukštinę.

12.333. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) pagrindas — lygiašonis trikampis ABC ($AB=AC$). Jo perimetras lygus $2p$, o kampas A lygus α. Per kraštinę BC ir viršūnę A_1 išvesta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.334. Į taisyklingąją keturkampę piramidę įbrėžtas rutulys. Atstumas nuo jo centro iki piramidės viršūnės lygus a, o kampas tarp šoninės sienos ir pagrindo plokštumos lygus α. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

12.335. Piramidės pagrindas — stačiakampis, kurio kampas tarp įstrižainių lygus α. Piramidės visos šoninės briaunos su pagrindu sudaro kampą β. Apie šią piramidę apibrėžtas R spindulio rutulys. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.336. Kūgio sudaromoji lygi l ir sudaro su aukštine kampą α. Per dvi kūgio sudaromąsias, tarp kurių kampas β, išvesta plokštuma. Raskite atstumą nuo tos plokštumos iki įbrėžto į kūgį rutulio centro.

12.337. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio plotas S, o kampas tarp šoninių kraštinių α. Piramidės tūris lygus V, o visos jos šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą tokiu pat kampu. Raskite tą kampą.

12.338. Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo kraštinė a, o tūris V. Raskite kampo, kurį sudaro dviejų gretimų šoninių sienų įstrižainės, kosinusą.

12.339. Keturkampės piramidės pagrindas — rombas, kurio smailusis kampas lygus α. Piramidės viso paviršiaus ir pagrindo kraštinės kvadrato santykis lygus k. Visos šoninės sienos vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą. Raskite kampo tarp piramidės apotemos ir aukštinės sinusą.

12.340. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, plokščiasis kampas prie piramidės viršūnės lygus α. Raskite atstumą nuo piramidės pagrindo centro iki jos šoninės briaunos.

12.341. Taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinio pjūvio ir jos pagrindo plotų santykis lygus k. Raskite plokščiojo kampo prie piramidės viršūnės kosinusą.

12.342. Atstumas nuo taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinės iki jos nekertančios briaunos perpus mažesnis už pagrindo kraštinę. Raskite kampą tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo plokštumos.

12.343. Taisyklingosios keturkampės piramidės dvi gretimos šoninės sienos sudaro dvisienį kampą, kurio tiesinis kampas du kartus didesnis už plokščiąjį kampą prie piramidės viršūnės. Raskite tą plokščiąjį kampą.

12.344. Taisyklingosios trikampės piramidės apotema su pagrindo plokštuma ir ta pati plokštuma su šonine briauna sudaro kampus, kurių suma lygi $\frac{\pi}{4}$. Raskite tuos kampus.

12.345. Taisyklingosios piramidės tūris lygus V, o dvisienis kampas prie pagrindo lygus α. Per įbrėžto į piramidę rutulio centrą išvesta plokštuma, lygiagreti piramidės pagrindui. Ji nukerta nuo duotosios piramidės kitą piramidę. Raskite jos tūrį.

12.346. Statųjį trikampį sukant apie trumpesnįjį statinį, gaunamas kūnas, kurio tūris lygus kūnų, gautų sukant trikampį apie jo įžambinę ir apie ilgesnįjį statinį, tūrių sumai. Raskite trikampio kampus.

12.347. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, šoninis paviršius S. Raskite kampą tarp gretimų šoninių sienų.

12.348. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite į piramidę įbrėžto rutulio spindulį.

12.349. Į taisyklingąją trikampę piramidę įbrėžto rutulio spindulys keturis kartus mažesnis už piramidės pagrindo kraštinę. Raskite plokščiojo kampo prie piramidės viršūnės kosinusą.

12.350. Trikampės piramidės šoninės briaunos ir dvi pagrindo kraštinės yra vienodo ilgio a, kampas tarp pagrindo lygių kraštinių lygus α. Raskite apibrėžtinio rutulio spindulį.

12.351. Į kūgį įbrėžtas ritinys, kurio aukštinė lygi kūgio pagrindo skersmeniui. Ritinio visas paviršius lygus kūgio pagrindo plotui. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos.

12.352. Apie rutulį apibrėžta stačioji prizmė, kurios pagrindas — rombas. Jo smailusis kampas lygus α. Raskite kampą tarp prizmės ilgesniosios įstrižainės ir pagrindo plokštumos.

12.353. Į nupjautinį kūgį įbrėžtas rutulys, kurio tūris perpus mažesnis už kūgio tūrį. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos.

12.354. Piramidės pagrindas — lygiašonis smailusis trikampis, kurio pagrindas a, o prieš jį esantis kampas α. Piramidės šoninė briauna, einanti per duotojo kampo viršūnę, su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Piramidės aukštinė eina per pagrindo aukštinių susikirtimo tašką. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.355*. Nuopjovos plotas lygus S, o jos lankas — α radianų. Ši nuopjova sukasi apie savo simetrijos ašį. Apskaičiuokite sukinio paviršių.

12.356. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Rutulio ir kūgio paviršių lietimosi apskritimas dalija rutulio paviršių santykiu $1:4$. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos.

12.357. Trikampės piramidės šoninis paviršius S, o kiekviena šoninė briauna l. Plokštieji kampai prie viršūnės sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas $\frac{\pi}{3}$. Raskite tuos kampus.

12.358. Taisyklingosios keturkampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Į tą piramidę įbrėžto rutulio spindulys lygus R. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

12.359. Apie taisyklingąją trikampę piramidę apibrėžto rutulio spindulys lygus piramidės apotemai. Raskite kampą tarp piramidės apotemos ir pagrindo plokštumos.

12.360. Kūgio sudaromoji lygi l ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Į tą kūgį įbrėžtas rutulys, o į rutulį — taisyklingoji trikampė prizmė, kurios visos briaunos lygios. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.361. Apie R spindulio rutulį apibrėžta taisyklingoji n-kampė piramidė. Jos šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

12.362. Piramidės pagrindas — rombas, kurio kraštinė a. Dvi piramidės šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai ir viena su kita sudaro kampą β. Kitos dvi šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

12.363. Atstumas nuo taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinės vidurio taško iki šoninės sienos lygus d. Kampas tarp įbrėžto į piramidę kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus α. Apskaičiuokite kūgio visą paviršių.

12.364. Piramidės $SABC$ pagrindas yra lygiakraštis trikampis ABC. Briauna SA statmena pagrindo plokštumai. Piramidės šoninio paviršiaus ir pagrindo ploto santykis lygus $11:4$. Raskite kampą tarp šoninės sienos SBC ir pagrindo plokštumos.

12.365. Kūgio pagrindo spindulys R, kampas tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos α. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Per tašką P, priklausantį rutulio ir kūgio paviršių lietimosi apskritimui, nubrėžta to apskritimo liestinė, o per ją išvesta plokštuma. Ji yra lygiagreti kūgio sudaromajai, einančiai per tašką, diametraliai priešingą taškui P. Raskite pjūvio, gauto perkirtus rutulį šia plokštuma, plotą.

12.366. Nupjautinio kūgio ašinio pjūvio įstrižainės viena kitai statmenos ir kiekvienos jų ilgis a. Kampas tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus α. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio visą paviršių.

12.367. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo viršūnė nutolusi nuo prieš ją esančios šoninės sienos per atstumą l. Kampas tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo plokštumos lygus α. Apskaičiuokite į piramidę įbrėžto kūgio visą paviršių.

12.368. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės šoninė briauna lygi mažesniojo pagrindo kraštinei ir lygi a. Kam-

pas tarp šoninės briaunos ir didesniojo pagrindo kraštinės lygus α. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės įstrižinio pjūvio plotą.

12.369. Kūgio aukštinė h ir sudaromoji sudaro kampą α. Per kūgio viršūnę išvesta plokštuma, pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu β $(\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha)$. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

12.370. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio vienas smailusis kampas lygus α. Visos šoninės briaunos vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą. Piramidės aukštinė lygi jos pagrindo — trikampio — įžambinei. Raskite dvisienius kampus prie pagrindo.

12.371. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ $(AA_1 \| BB_1 \| CC_1)$ pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio $AB = BC = a$ ir $\angle ABC = \alpha$. Prizmės aukštinė lygi H. Raskite atstumą nuo taško A iki plokštumos, išvestos per taškus B, C ir A_1.

12.372. Piramidės visos šoninės sienos vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą. Per įbrėžto į piramidę rutulio centrą išvesta plokštuma, lygiagreti pagrindui. Pjūvio, gauto perkirtus piramidę šia plokštuma, ir pagrindo plotų santykis lygus k. Raskite dvisienį kampą prie piramidės pagrindo.

12.373. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi H ir su šonine briauna sudaro kampą α. Per pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kuri kerta priešingą šoninę briauną kampu β $(\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha)$. Apskaičiuokite piramidės dalies, kuri yra tarp išvestos plokštumos ir pagrindo plokštumos, tūrį.

12.374. Atkarpa, jungianti taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo centrą su šoninės briaunos vidurio tašku, lygi pagrindo kraštinei. Raskite kampo tarp gretimų šoninių sienų kosinusą.

12.375. Piramidės pagrindas — kvadratas, kurio kraštinė a; piramidės dvi šoninės sienos statmenos pagrindui, o ilgiausioji šoninė briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu β. Į piramidę įbrėžtas stačiakampis gretasienis; vienas jo pagrindas yra piramidės pagrindo plokštumoje, o kito pagrindo viršūnės — piramidės šoninėse briaunose. Gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

12.376. Piramidės pagrindas — lygiašonis smailusis trikampis, kurio šoninė kraštinė a, o kampas tarp šoninių kraštinių α. Piramidės šoninė siena, einanti per pagrindo kraštinę, esančią prieš duotąjį kampą α, su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Visos šoninės briaunos yra lygios. Raskite apie šią piramidę apibrėžto kūgio tūrį.

12.377. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, dvisienis kampas prie pagrindo α. Į šią piramidę įbrėžtas rutulys. Rutulio paviršiaus ir duotosios piramidės šoninių sienų lietimosi taškai bei duotosios piramidės pagrindo plokštumos bet kuris taškas yra kitos piramidės viršūnės. Apskaičiuokite tos piramidės tūrį.

12.378. Į R spindulio rutulį įbrėžta taisyklingoji nupjautinė keturkampė piramidė. Jos didesnysis pagrindas eina per rutulio centrą, o šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės tūrį.

12.379. Atkarpą AB, lygią $2R$, laikant skersmeniu, nubrėžtas pusapskritimis ir styga CD, lygiagreti atkarpai AB. Trikampį ACD sukant apie skersmenį AB, gautas sukinys. Įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į lanką AC, lygus α $(AC < AD)$. Apskaičiuokite to sukinio tūrį.

12.380. Stačiosios prizmės pagrindas — statusis trikampis, kurio vienas smailusis kampas α. Didžiausio ploto prizmės šoninė siena — kvadratas. Raskite kampą, kurį sudaro kitų dviejų šoninių sienų susikertančios įstrižainės.

12.381. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, kampas tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos α $\left(\alpha > \frac{\pi}{4}\right)$. Piramidę kerta plokštuma, einanti per pagrindo viršūnę ir statmena priešingai šoninei briaunai (t. y. briaunai, nesančiai toje pačioje šoninėje sienoje, kur viršūnė). Apskaičiuokite pjūvio plotą.

12.382. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė ir šoninė briauna sudaro kampą α. Per piramidės viršūnę išvesta plokštuma, kuri yra lygiagreti pagrindo įstrižainei ir su antra įstrižaine sudaro kampą β. Gauto pjūvio plotas lygus S. Raskite piramidės aukštinę.

12.383. Kūgio viršūnė yra rutulio centras, o pagrindas liečia rutulio paviršių. Kūgio visas paviršius lygus rutulio paviršiui. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės.

12.384. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio įžambinė c, o mažesnysis smailusis kampas α. Ilgiausioji šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Piramidės aukštinė eina per pagrindo pusiaukraštinių susikirtimo tašką. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.385. Taisyklingojo trikampio kraštinė a. Šis trikampis sukasi apie tiesę, kuri yra šalia trikampio jo plokštumoje, eina per trikampio viršūnę ir su kraštine sudaro kampą α. Apskaičiuokite sukinio tūrį ir nustatykite, su kuria α reikšme tas tūris yra didžiausias.

12.386. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Per pagrindo kraštinę BC ir šoninės briaunos AS tašką D išvesta plokštuma. Raskite kampą tarp tos plokštumos ir pagrindo plokštumos, kai $AD : DS = k$.

12.387. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio kampas tarp šoninių kraštinių lygus α. Piramidė įdėta į ritinį taip, kad jos pagrindas yra įbrėžtas į to ritinio pagrindą, o vir-

šūnė sutampa su vienos iš ritinio sudaromųjų vidurio tašku. Ritinio tūris lygus V. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.388. Taisyklingosios prizmės pagrindas — kvadratas. Per jo viršūnę išvesta plokštuma, kuri yra lygiagreti prieš ją esančiai kvadrato įstrižainei ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite daugiakampio, gauto perkirtus prizmę šia plokštuma, kampus (laikoma, jog prizmės aukštinė yra pakankamai ilga, kad tas pjūvis būtų keturkampis).

12.389. Lygiašonės trapecijos ilgesnysis pagrindas a, o smailusis kampas α. Trapecijos įstrižainė statmena šoninei kraštinei. Trapecija sukasi apie jos ilgesnįjį pagrindą. Raskite sukinio tūrį.

12.390. Į R spindulio rutulio išpjovą įbrėžtas rutulys. Išpjovos ašinio pjūvio centrinis kampas lygus α. Raskite rutulio ir išpjovos paviršių lietimosi apskritimo spindulį.

C grupė

12.391. Lygiagretainio kraštinės lygios a ir b $(a<b)$. Trumpesnioji įstrižainė su trumpesniąja kraštine sudaro bukąjį kampą, o su ilgesniąja kraštine — kampą α. Raskite ilgesniąją lygiagretainio įstrižainę.

12.392. Į išpjovą POQ, kurios spindulys R ir centrinis kampas α, įbrėžtas stačiakampis; dvi jo viršūnės priklauso išpjovos lankui, o kitos dvi — spinduliams PO ir PQ. Smailusis kampas tarp stačiakampio įstrižainių lygus β. Apskaičiuokite stačiakampio plotą.

12.393. Trikampio ABC smailieji kampai prie pagrindo AC lygūs α ir γ $(\alpha>\gamma)$. Iš viršūnės B nubrėžta aukštinė BD ir pusiaukampinė BE. Trikampio ABC plotas lygus S. Apskaičiuokite trikampio BDE plotą.

12.394. Į R spindulio nuopjovą įbrėžti du lygūs apskritimai, kurie liečia vienas kitą, nuopjovos lanką ir jos stygą. Centrinis kampas, kuris remiasi į nuopjovos lanką, lygus α $(\alpha<\pi)$. Raskite tų apskritimų spindulius.

12.395. Į lygiašonį trikampį įbrėžto apskritimo ir apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulių santykis lygus m. Raskite trikampio kampus ir leistinąsias m reikšmes.

12.396. Dvi lygiagretainio kraštinės lygios a ir b $(a>b)$, o smailusis kampas tarp įstrižainių lygus α. Raskite lygiagretainio kampus.

12.397. Į nuopjovą, kurios centrinis kampas α, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Viena jo viršūnė sutampa su nuopjovos stygos vidurio tašku, o kitos dvi priklauso nuopjovos lankui. Trikampio aukštinė lygi h. Raskite nuopjovos lanko spindulį.

12.398. Atstumas tarp dviejų iš išorės susiliečiančių apskritimų centrų lygus d. Kampas tarp jų bendrų išorinių liestinių lygus α radianų. Vienos liestinės atkarpa ir du atitinkami apskritimų lankai sudaro kreivinį trikampį. Apskaičiuokite jo plotą.

12.399. Dvi lygiagretainio kraštinės lygios a ir b $(a>b)$, o aukštinė, nubrėžta į ilgesniąją kraštinę, lygi h. Raskite smailųjį kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

12.400. Trikampio kampai A, B ir C. Trikampio aukštinė, einanti per kampo B viršūnę, lygi H. Tą aukštinę laikant skersmeniu, nubrėžtas apskritimas. Apskritimo ir trikampio kraštinių AB bei BC susikirtimo taškai sujungti su aukštinės galais. Raskite nubraižyto keturkampio plotą.

12.401. Lygiagretainio kraštinės lygios a ir b $(a<b)$. Iš ilgesniosios kraštinės vidurio taško jai lygiagreti kraštinė matoma kampu α. Raskite lygiagretainio plotą.

12.402. Dvi trikampio kraštinės lygios a ir b $(a>b)$, o plotas lygus S. Raskite kampą tarp aukštinės ir pusiaukraštinės, nubrėžtų į trečiąją kraštinę.

12.403. Apie trapeciją apibrėžto apskritimo ir į ją įbrėžto apskritimo spindulių santykis lygus k. Raskite trapecijos kampus ir leistinąsias k reikšmes.

12.404. Lygiagretainio perimetro ir jo ilgesniosios įstrižainės santykis lygus k. Ilgesnioji įstrižainė dalija lygiagretainio kampą santykiu $1:2$. Raskite lygiagretainio kampus.

12.405. Į lygiakraštį trikampį ABC įbrėžtas lygiakraštis trikampis DEF; taškas D yra kraštinėje BC, taškas E — kraštinėje AC ir taškas F — kraštinėje AB. Kraštinių AB ir DF santykis lygus $8:5$. Raskite kampo DEC sinusą.

12.406. Lygiašonio trikampio pusiaukraštinė ir aukštinė, nubrėžtos į šoninę kraštinę, sudaro kampą, kurio tangentas lygus $\frac{1}{2}$. Raskite kampo prie viršūnės sinusą.

12.407. Tiesė, statmena nuopjovos stygai, dalija ją santykiu $1:4$, o lanką — santykiu $1:2$. Raskite centrinio kampo, kuris remiasi į šį lanką, kosinusą.

12.408. Smailiojo trikampio ABC $\angle A=\alpha$ radianų ir $\angle B=\beta$ radianų. Per ortocentrą (aukštinių susikirtimo tašką) ir nubrėžtų į kraštines AB ir BC aukštinių pagrindus nubrėžtas apskritimas. Apskaičiuokite trikampio ir skritulio bendros dalies plotą.

12.409. Smailiojo trikampio ABC kampai A, B, C. Kokiu santykiu ortocentras (aukštinių susikirtimo taškas) dalija aukštinę, nubrėžtą iš kampo A viršūnės?

12.410. Nubrėžtos smailiojo trikampio ABC aukštinės AL ir CN; $AC=a$ ir $\angle ABC=\alpha$. Raskite apskritimo, einančio per taškus B, L ir N, spindulį.

12.411. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio ir apie jį apibrėžto skritulio plotų santykis mažesnis už $\frac{2}{3}$.

12.412. Trys skaičiai išreiškia smailiojo trikampio kraštinių ilgių ir atitinkamų atstumų nuo jų iki apibrėžtinio apskritimo centro santykius. Įrodykite, kad tų skaičių suma 4 kartus mažesnė už jų sandaugą.

12.413. R spindulio apskritimas padalytas į keturis lankus, kurių ilgiai sudaro geometrinę progresiją. Jos vardiklis lygus 3. Dalijimo taškai yra įbrėžto į tą apskritimą keturkampio viršūnės. Apskaičiuokite keturkampio plotą.

12.414. Trisienio kampo vienas iš plokščiųjų kampų lygus α. Prie jo esantys dvisieniai kampai lygūs β ir γ. Raskite kitus du plokščiuosius kampus.

12.415. Piramidės pagrindas yra kvadratas. Šoninės sienos su pagrindu sudaro kampus, kurių santykis $1:2:4:2$. Raskite tuos kampus.

12.416*. Į kūgį įdėtas rutulys taip, kad jų paviršiai liečiasi. Tarp jų esančio kūno tūris 8 kartus mažesnis negu rutulio tūris. Raskite kūgio ašinio pjūvio kampą prie viršūnės.

12.417. Į taisyklingąją keturkampę piramidę įbrėžtas rutulys. Piramidės pagrindui lygiagreti plokštuma liečia rutulį ir dalija piramidės tūrį santykiu $m:n$ skaičiuojant nuo viršūnės. Raskite kampą tarp piramidės aukštinės ir šoninės sienos.

12.418. Per taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo viršūnę išvesta plokštuma, statmena priešingai šoninei sienai ir lygiagreti priešingai pagrindo kraštinei. Ta plokštuma su piramidės pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite plokščiąjį kampą prie piramidės viršūnės.

12.419. Stačiakampis sukasi apie ašį, einančią per jo viršūnę ir lygiagrečią įstrižainei. Stačiakampio plotas S, o kampas tarp įstrižainių α. Raskite sukinio paviršių.

12.420. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, o dvisienis kampas prie pagrindo α. Raskite rutulio, kuris liečia piramidės pagrindą ir šonines briaunas, spindulį.

12.421. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė a, dvisienis kampas prie pagrindo α. Raskite atstumą nuo įbrėžto į tą piramidę rutulio centro iki šoninės briaunos.

12.422. Taisyklingąją trikampę piramidę kerta plokštuma, einanti per šoninę briauną ir aukštinę. Pjūvis — trikampis, kurio kampas prie piramidės viršūnės lygus $\frac{\pi}{4}$. Raskite kampą tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo plokštumos.

12.423. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, plokščiasis kampas prie viršūnės α. Į piramidę įbrėžtas rutulys. Jį kerta plokštuma, einanti per piramidės pagrindo centrą ir statmena jos šoninei briaunai. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

12.424. Į kūgį įbrėžtos piramidės pagrindas — keturkampis, kurio viena kraštinė a, o kiekviena iš kitų trijų kraštinių b. Piramidės viršūnė yra vienos iš sudaromųjų vidurio taškas. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės lygus α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.425. Nupjautinio kūgio ir įbrėžto į jį rutulio tūrių santykis lygus k. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos bei leistinąsias k reikšmes.

12.426. Ritinio ašinis pjūvis — kvadratas. Atkarpa AB, jungianti ritinio viršutinio pagrindo apskritimo tašką A ir apatinio pagrindo apskritimo tašką B, lygi a ir nutolusi nuo ritinio ašies per atstumą b. Raskite kampą tarp tiesės AB ir ritinio pagrindo plokštumos.

12.427. Per taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo viršūnę išvesta plokštuma, kuri kerta priešingą šoninę briauną stačiuoju kampu. Pjūvio plotas perpus mažesnis už piramidės pagrindo plotą. Raskite kampą tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos.

12.428. Duoti trys paporiui statmeni spinduliai: OM, ON ir OP. Spindulyje OM pažymėtas taškas A. Atstumas nuo O iki A lygus a. Spinduliuose ON ir OP pažymėti atitinkamai taškai B ir C; kampas ABC lygus α, o kampas ACB lygus β. Raskite OB ir OC.

12.429. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Rutulio ir kūgio paviršių lietimosi apskritimas dalija rutulio tūrį santykiu $5:27$. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos.

12.430. Į taisyklingąją nupjautinę trikampę piramidę įbrėžto rutulio paviršiaus ir piramidės viso paviršiaus santykis lygus $\pi:6\sqrt{3}$. Raskite kampą tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo plokštumos.

12.431. Du lygūs statieji trikampiai ABC ir ADC turi bendrą įžambinę AC. Kampas tarp tų trikampių plokštumų lygus α, o kampas tarp lygių statinių AB ir AD lygus β. Raskite kampą tarp statinių BC ir CD.

12.432. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės apatinio pagrindo kraštinė 5 kartus ilgesnė už viršutinio pagrindo kraštinę. Piramidės šoninis paviršius lygus jos aukštinės kvadratui. Raskite kampą tarp piramidės šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos.

12.433. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios įstrižainės statmenos atitinkamoms šoninėms kraštinėms. Trapecijos įstrižainių sudarytas kampas, esantis prieš šoninę kraštinę, lygus α. Atkarpa, jungianti viršutinio pagrindo viršūnę su apibrėžto apie apatinį pagrindą apskritimo centru, lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.434. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio smailusis kampas α. Prizmės įstrižainės su pagrindo plokštuma sudaro kampus β ir γ ($\beta<\gamma$). Prizmės aukštinė lygi H. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.435. Prizmės pagrindas — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė a. Šoninė briauna lygi b ir su pagrindo susikertančiomis kraštinėmis sudaro kampus α ir β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.436. Prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio smailusis kampas α. Šoninė briauna, einanti per kampo α viršūnę, lygi b ir su esančiomis prie jos pagrindo kraštinėmis sudaro kampus, kurių kiekvienas lygus β. Raskite prizmės aukštinę.

12.437. Stačiojo gretasienio pagrindas — lygiagretainis, kurio įstrižainės a ir b ($a>b$), o smailusis kampas tarp jų α. Trumpesnioji gretasienio įstrižainė ir ilgesnioji pagrindo įstrižainė sudaro smailųjį kampą β. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

12.438. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, dvisienis kampas prie pagrindo lygus α. Į šią piramidę įbrėžta stačioji trikampė prizmė; trys jos viršūnės priklauso piramidės apotemoms, o kitos trys — piramidės pagrindo plokštumai. Į piramidę įbrėžto rutulio centras yra prizmės viršutinio pagrindo plokštumoje. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.439. Stačiosios prizmės pagrindas — rombas. Viena iš prizmės įstrižainių lygi a ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α, o su viena iš šoninių sienų — kampą β. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

12.440. Atkarpų, kurias riboja dvi lygiagrečios plokštumos, santykis lygus k. Kiekviena šių atkarpų su viena iš plokštumų sudaro kampus, kurių santykis lygus $2:3$. Raskite tuos kampus ir leistinąsias k reikšmes.

12.441. Kampas tarp kvadrato $ABCD$ ($AB\parallel CD$) plokštumos ir plokštumos P lygus α, o kampas tarp kraštinės AB ir tos pačios plokštumos lygus β. Raskite kampą tarp kraštinės AD ir plokštumos P.

12.442. Per taisyklingosios keturkampės prizmės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$) pagrindo gretimų kraštinių DC ir AD vidurio taškus ir viršutinio pagrindo viršūnę B_1 išvesta plokštuma. Pjūvio perimetras 3 kartus didesnis už pagrindo įstrižainę. Raskite kampą tarp išvestos plokštumos ir pagrindo plokštumos.

12.443. Atstumas nuo taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo centro iki šoninės sienos ir iki šoninės briaunos lygus atitinkamai a ir b. Raskite dvisienį kampą prie piramidės pagrindo.

12.444. Piramidės pagrindas — taisyklingasis trikampis. Viena piramidės šoninė siena statmena pagrindo plokštumai, kitos dvi su ta plokštuma sudaro kampą α. Raskite kampo tarp šių dviejų šoninių sienų kosinusą.

12.445. Pasvirosios prizmės pagrindas — statusis trikampis, kurio smailusis kampas α. Šoninė siena, kurioje yra įžambinė, statmena pagrindui, o šoninė siena, kurioje yra prie duotojo kampo esantis statinis, su pagrindu sudaro smailųjį kampą β. Raskite smailųjį kampą tarp trečiosios šoninės sienos ir pagrindo.

12.446. Pasvirosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1$) pagrindas yra trikampis ABC, kurio kraštinė BC lygi a, o prie jos esantys kampai lygūs β ir γ. Prizmės tūris V ir $AA_1=A_1B=A_1C$. Raskite kampą tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos.

12.447. Į taisyklingąją nupjautinę trikampę piramidę įbrėžti du rutuliai; vienas jų liečia visas piramidės sienas, kitas — visas briaunas. Raskite kampo tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos sinusą.

12.448. Keturkampės piramidės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios pagrindai a ir b ($a>2b$) ir kampas tarp jos įstrižainių nelygių atkarpų φ. Piramidės viršūnės projekcija yra pagrindo įstrižainių susikirtimo taškas. Per trapecijos pagrindus einančios šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro kampus, kurių santykis $1:2$. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

12.449. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a. Šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite atstumą tarp šoninės briaunos bei jos nekertančios pagrindo kraštinės.

12.450. Trikampės piramidės visos sienos — taisyklingieji trikampiai. Per pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kuri dalija piramidės tūrį santykiu $1:3$ skaičiuojant nuo pagrindo. Raskite kampą tarp tos plokštumos ir pagrindo plokštumos.

12.451. Per taisyklingosios keturkampės piramidės dvi šonines briaunas, nepriklausančias vienai sienai, išvesta plokštuma. Pjūvio ploto ir piramidės šoninio paviršiaus santykis lygus k. Raskite kampą tarp dviejų gretimų šoninių sienų ir leistinąsias k reikšmes.

12.452. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio smailusis kampas tarp įstrižainių lygus φ. Kiekvienos iš gretimų šoninių sienų įstrižainės susikerta kampais α ir β ($\alpha>\beta$), kurie yra prieš atitinkamas pagrindo kraštines. Prizmės aukštinė lygi h. Raskite prizmės tūrį.

12.453. Piramidės $ABCDE$ pagrindas — rombas $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Piramidės aukštinė eina per kraštinės AB vidurio tašką. Šoninės briaunos EC ir ED su pagrindo plokštuma sudaro kampus, atitinkamai lygius α ir β. Apskaičiuokite rombo smailiojo kampo kosinusą, kai $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ir $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

12.454. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a. Kampas tarp piramidės aukštinės ir šoninės briaunos lygus α $\left(\alpha \leqslant \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Piramidę kerta plokštuma, einanti per aukštinės vidurio tašką ir statmena vienai iš šoninių briaunų. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

12.455. Sakykime, AB — ritinio apatinio pagrindo skersmuo, A_1B_1 — viršutinio pagrindo styga, lygiagreti AB. Plokštuma, išvesta per tieses AB ir A_1B_1, su ritinio apatinio pagrindo plokštuma sudaro smailųjį kampą α, o tiesė AB_1 su ta pačia plokštuma — kampą β. Ritinio pagrindo spindulys lygus R (taškai A ir A_1 yra toje pačioje tiesės, einančios per atkarpų AB ir A_1B_1 vidurio taškus, pusėje). Raskite ritinio aukštinę.

12.456. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ aukštinė lygi H. Per pagrindo ABC viršūnę A išvesta plokštuma, kuri yra statmena prieš ją esančiai šoninei briaunai SC ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite piramidės dalies, esančios tarp pagrindo plokštumos ir pjūvio plokštumos, tūrį.

12.457. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi H. Šoninė briauna ir pagrindas sudaro kampą α, o piramidės įstrižainė ir pagrindas — kampą β. Piramidę kerta plokštuma, kuri eina per piramidės įstrižainę ir yra lygiagreti jos nekertančiai pagrindo įstrižainei. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

12.458. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės apatinio ir viršutinio pagrindo kraštinė lygi atitinkamai a ir b ($a > b$). Šoninė siena ir pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Piramidę kerta plokštuma, kuri eina per šoninės sienos vidurinę liniją ir apatinio pagrindo centrą. Raskite pjūvio plotą.

12.459. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė H, o kampas tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos lygus α. Raskite į šią piramidę įbrėžto rutulio spindulį.

12.460. Apie taisyklingąją keturkampę piramidę apibrėžto rutulio spindulys sutinka su pagrindo kraštine kaip $3:4$. Raskite kampą tarp šoninės sienos ir pagrindo plokštumos.

12.461. Į kūgį, kurio ašinis pjūvis — statusis trikampis, įbrėžtas ritinys; jo apatinis pagrindas yra kūgio pagrindo plokštumoje. Kūgio ir ritinio šoninių paviršių santykis lygus $4\sqrt{2}$. Raskite kampą tarp kūgio pagrindo plokštumos ir tiesės, einančios per ritinio viršutinio pagrindo centrą ir bet kurį kūgio pagrindo apskritimo tašką.

12.462. Piramidės pagrindas — lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas α. Ta trapecija apibrėžta apie kūgio pagrindo apskritimą. Piramidės viršūnė yra vienoje iš kūgio sudaromųjų, jos projekcija pagrindo plokštumoje sutampa su trapecijos įstrižainių susikirtimo tašku. Kūgio sudaromoji lygi l ir su aukštine sudaro kampą β. Raskite piramidės tūrį.

12.463. Piramidės $ABCF$ pagrindas — lygiašonis trikampis ABC, kurio kampas tarp lygių kraštinių AB ir AC lygus α $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Į piramidę įbrėžta trikampė prizmė $AEDA_1E_1D_1$; taškai A_1, E_1 ir D_1 yra atitinkamai piramidės šoninėse briaunose AF, CF ir BF, o pagrindo AED kraštinė ED eina per apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centrą. Raskite prizmės ir piramidės tūrių santykį.

12.464. Per kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) briaunų DD_1 ir D_1C_1 vidurio taškus bei viršūnę A išvesta plokštuma. Raskite kampą tarp tos plokštumos ir sienos $ABCD$.

12.465. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės ir įbrėžto į ją rutulio tūrių santykis lygus k. Raskite kampą tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo plokštumos bei leistinąsias k reikšmes.

13 SKYRIUS
LYGČIŲ TAIKYMAS SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

1 pavyzdys. Iš vietovės A į vietovę B automobilis tam tikrą laiką važiavo pastoviu greičiu $v_1 = 60$ km/h. Likusią kelio dalį jis nuvažiavo per tą patį laiką greičiu $v_2 = 40$ km/h. Grįždamas automobilis pusę kelio važiavo greičiu $v_3 = 80$ km/h, o kitą pusę kelio — greičiu $v_4 = 45$ km/h. Kokiu vidutiniu greičiu automobilis važiavo: a) iš A į B? b) iš B į A?

△ a) Kadangi automobilis vienodus laiko tarpus važiavo nurodytu greičiu, tai $v_{\text{vid}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{60+40}{2} = 50$ (km/h).

b) Atgalinį reisą sudaro dvi lygios kelio dalys (tarkime, kad kiekviena jų lygi s km), kurias automobilis įveikia per nevienodus laiko tarpus; todėl būtų neteisinga manyti, jog $v_{\text{vid}} = \frac{v_3 + v_4}{2} = \frac{80+45}{2} = 62{,}5$ (km/h). Sakykime, automobilis x valandų važiavo greičiu v_3 ir y valandų — greičiu v_4. Tada $v_3 x = v_4 y = s$; iš čia $x = \frac{v_4 y}{v_3}$. Vadinasi, vidutinis greitis

$$v_{\text{vid}} = \frac{2s}{x+y} = \frac{2v_4 y}{\frac{v_4 y}{v_3} + y} = \frac{2v_3 v_4}{v_3 + v_4} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 45}{80+45} = 57{,}6 \text{ (km/h)}. \ ▲$$

2 pavyzdys. Darbininkų brigada atliko tam tikrą darbą. Jeigu brigadą sumažintume 20 žmonių, tai tą patį darbą ji atliktų 5 dienomis vėliau, o jeigu ją padidintume 15 žmonių, tai ji atliktų visą darbą 2 dienomis anksčiau. Kiek darbininkų iš pradžių buvo brigadoje ir per kiek dienų jie atliko darbą?

△ Sakykime, x darbininkų atliko darbą per y dienų; tada pagal sąlygą $xy = (x-20)(y+5)$ ir $xy = (x+15)(y-2)$.

Abi lygybes užrašykime kaip proporcijas: $\frac{x-20}{x} = \frac{y}{y+5}$ ir $\frac{x+15}{x} = \frac{y}{y-2}$.

Kiekvieną $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ išraiškos proporciją pakeiskime jai ekvivalenčia proporcija $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. Gausime $\frac{-20}{x} = \frac{-5}{y+5}$ ir $\frac{15}{x} = \frac{2}{y-2}$. Dabar nesunku apskaičiuoti, kad $x = 60$ ir $y = 10$. Taigi brigadoje buvo 60 žmonių, kurie užbaigė darbą per 10 dienų. ▲

3 pavyzdys. Trys siurbliai pradėjo veikti tuo pačiu metu. Pirmas ir trečias siurblys baigė darbą kartu, o antras — po 2 h nuo darbo pradžios. Pirmas siurblys išsiurbė 9 m^3 vandens, o antras ir trečias kartu — 28 m^3. Trečias siurblys per 1 h išsiurbia 3 m^3 vandens daugiau negu pirmas, o visi trys siurbliai, dirbdami kartu, per valandą išsiurbia 14 m^3 vandens. Kiek vandens per valandą išsiurbia kiekvienas siurblys?

△ Sakykime, pirmas ir antras siurblys per valandą išsiurbia atitinkamai x m^3 ir y m^3 vandens; tada trečias siurblys per valandą išsiurbia $(x+3)$ m^3. Antras ir trečias siurblys išsiurbė atitinkamai $2y$ m^3 ir $(28-2y)$ m^3 vandens. Pirmas siurblys dirbo $\frac{9}{x}$ valandų, trečias — $\frac{28-2y}{x+3}$ valandų. Pagal sąlygą $\frac{9}{x} = \frac{28-2y}{x+3}$ ir $2x+y+3 = 14$. Išsprendę lygčių sistemą, randame $x = 3$, $y = 5$.

Atsakymas: 3 m^3, 5 m^3 ir 6 m^3. ▲

4 pavyzdys. Turistas turi nueiti iš gyvenvietės į geležinkelio stotį. Per pirmąją valandą nuėjęs 3 km, jis apskaičiavo, kad, toliau eidamas tuo pačiu greičiu, pavėluos į traukinį 40 min. Todėl likusį kelią jis ėjo 4 km/h greičiu ir pasiekė stotį 15 min anksčiau, negu išvyksta traukinys. Koks atstumas nuo gyvenvietės iki stoties ir kokiu pastoviu greičiu eidamas turistas atvyktų į stotį tiksliai tuo laiku, kai išvyksta traukinys?

△ Sudarykime tokią lentelę:

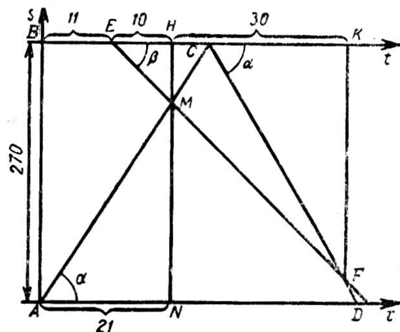
Turistas atvyktų į stotį	Atstumas, km	Greitis, km/h	Laikas, h
Laiku	x	v	$\frac{x}{v}$
Pavėlavęs	$x-3$	3	$\frac{x-3}{3}$
Anksčiau	$x-3$	4	$\frac{x-3}{4}$

Sulyginę laiko tarpus, užrašytus pirmoje ir antroje, pirmoje ir trečioje eilutėje, gauname lygčių sistemą:

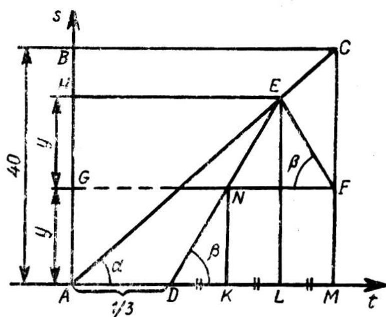
$$\frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{3}-\frac{2}{3}\ ;\quad \frac{x}{v}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{1}{4}\ ,$$

arba $\frac{x-2}{3}=\frac{x+2}{4}$; iš čia $x=14$. Taigi gauname atsakymą: $x=14$ km, $v=3{,}5$ km/h. ▲

5 pavyzdys. Atstumas tarp taškų A ir B lygus 270 m. Iš A į B kūnas juda tolygiai; pasiekęs tašką B, jis tuoj pat grįžta tuo pačiu greičiu. Antrasis kūnas pradeda judėti iš B į A, praėjus 11 s po to, kai pirmasis pajuda iš taško A, ir juda tolygiai, bet lėčiau negu pirmasis. Kelyje iš B į A jis susitinka su pirmuoju kūnu du kartus: po 10 s ir po 40 s. Apskaičiuokite kiekvieno kūno greitį.



13.1 pav.



13.2 pav.

△ Patogus uždavinio modelis — tolyginio judėjimo grafikas, nubraižytas koordinačių sistemoje „kelias (s — metrais) — laikas (t — sekundėmis)". Sakykime, AC (13.1 pav.) — kūno judėjimo iš A į B greičiu $v_1=\operatorname{tg}\alpha$ grafikas (laiko ašis At); CD — to paties kūno judėjimo iš B į A tuo pačiu greičiu $v_1=\operatorname{tg}\alpha$ grafikas (laiko ašis Bt); EF — kūno judėjimo iš B į A greičiu $v_2=\operatorname{tg}\beta$ grafikas, $\beta<\alpha$ (laiko ašis Bt).

Laiko tarpas $BE=11$, laiko tarpas iki pirmojo susitikimo $EH=10$, tarp pirmojo ir antrojo susitikimo $HK=30$; tada $NM=21v_1$, $HM=10v_2$, $KF=40v_2$, $NM+HM=AB=270$, t. y.

$$21v_1+10v_2=270. \qquad (*)$$

Laiko tarpas $HC=\frac{HM}{v_1}=\frac{10v_2}{v_1}$; laiko tarpas $CK=\frac{KF}{v_1}=\frac{40v_2}{v_1}$. Kadangi $HC+CK=30$, tai $\frac{10v_2}{v_1}+\frac{40v_2}{v_1}=30$; iš čia

$$5v_2=3v_1. \qquad (**)$$

Išsprendę (*) ir (**) lygtis, randame $v_1=10$ m/s, $v_2=6$ m/s. ▲

6 pavyzdys. Iš vietovės A į vietovę B išvyko automobilis. Po 20 min tuo pačiu maršrutu 45 km/h greičiu išvažiavo kitas automobilis. Pavijęs pirmąjį automobilį, vairuotojas perdavė paketą ir nedelsdamas grįžo tuo pačiu greičiu (į laiką, sugaištą sustojimui ir apsisukimui, neatsižvelgiama). Tuo momentu, kai pirmasis automobilis atvyko į B, antrasis buvo įveikęs tik pusę kelio nuo susitikimo vietos iki vietovės A. Atstumas tarp A ir B lygus 40 km. Raskite pirmo automobilio greitį.

△ Pasirinkime koordinačių sistemą „kelias (s — kilometrais) — laikas (t — valandomis)". Sakykime, AC (13.2 pav.) — pirmo automobilio judėjimo ieškomuoju greičiu $v=\operatorname{tg}\alpha$ grafikas; DE ir EF — antro automobilio judėjimo „pirmyn ir atgal" greičiu $\operatorname{tg}\beta=45$ grafikai; $AD=\frac{1}{3}$. Žinome, kad $AB=40$ ir G — kelio AH vidurio taškas. Sakykime, $AG=NK=y$. Tada laiko tarpas $DK=\frac{y}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{y}{45}$. Geometriškai aišku, kad $DK=KL=LM$, todėl pirmasis automobilis važiavo laiko tarpą $AM=\frac{1}{3}+\frac{3y}{45}$; iš čia

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{15}\right)v=40. \qquad (*)$$

Laiko tarpas $AL=\frac{1}{3}+\frac{2y}{45}$, $LE=AH=2y$, todėl

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2y}{45}\right)v=2y. \qquad (**)$$

Išsprendę (*) ir (**) lygtis, randame $y=15$ km ir $v=30$ km/h. ▲

7 pavyzdys. $\frac{1}{n}$ dalis kolboje esančio druskos tirpalo nupilama į mėgintuvėlį ir garinama tol, kol druskos procentai mėgintuvėlyje padidėja dvigubai. Po to susidaręs tirpalas išpilamas į kolbą ir sumaišomas su joje likusiu tirpalu. Dėl to druskos kiekis tirpale padidėjo $p\%$. Kiek procentų druskos buvo pradiniame tirpale?

△ Sakykime, kolboje iš pradžių buvo n litrų tirpalo, kuriame $x\%$ druskos, arba $\frac{nx}{100}$ litrų druskos. Į mėgintuvėlį nupilta $\frac{1}{n}\cdot n=1$ l tirpalo. Iš sąlygos žinome, kad, garinant šį tirpalą, druskos procentai mėgintuvėlyje padidėjo dvigubai; kadangi išgaravo tik vanduo, o druskos kiekis nepakito, tai į kolbą buvo įpilta tik 0,5 l tirpalo. Tada kolboje buvo $n-1+0{,}5=n-0{,}5$ litrų tirpalo, kuriame $\frac{nx}{100}$ litrų druskos. Pagal sąlygą $\frac{nx}{100}=\frac{(x+p)(n-0{,}5)}{100}$, arba $nx=(x+p)(n-0{,}5)$; iš čia $x=p(2n-1)$. ▲

8 pavyzdys. Raskite visus tuos natūraliuosius triženklius skaičius, kurių kiekvienam būdingos tokios savybės: pirmasis skaičiaus skaitmuo 3 kartus ma-

žesnis už kitų dviejų jo skaitmenų sumą; paties skaičiaus bei skaičiaus, gauto sukeitus vietomis paskutiniuosius du jo skaitmenis, skirtumas yra neneigiamas ir dalijasi iš 81.

△ Sakykime, ieškomojo skaičiaus išraiška yra tokia: $100x+10y+z$; čia x, y, z — jo skaitmenys. Pagal sąlygą $3x=y+z$ ir skaičius $100x+10y+z-(100x+10z+y)$ dalijasi iš 81. Suprastinę sužinome, kad $9(y-z)$ dalijasi iš 81, t. y. $y-z$ yra skaičiaus 9 kartotinis. Kadangi y ir z — skaitmenys, tai turi būti: 1) $y-z=0$ arba 2) $y-z=9$.

Pirmuoju atveju gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x=y+z, \\ y-z=0; \end{cases} \quad \text{iš čia } 3x=2y.$$

Tai įmanoma, kai $x=2$, $y=z=3$ (ieškomasis skaičius 233), kai $x=4$, $y=z=6$ (ieškomasis skaičius 466) ir kai $x=6$, $y=z=9$ (ieškomasis skaičius 699). Antruoju atveju gauname sistemą

$$\begin{cases} 3x=y+z, \\ y-z=9. \end{cases}$$

Lygybė $y-z=9$ įmanoma tik tada, kai $z=0$, $y=9$; tuomet $x=3$ ir ieškomasis skaičius 390. Taigi gauname atsakymą: 233, 390, 466, 699. ▲

A grupė

13.001. Iš keturių skaičių pirmieji trys sutinka kaip $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20}$, o ketvirtasis sudaro 15% antrojo skaičiaus. Raskite tuos skaičius, žinodami, kad antrasis skaičius 8 vienetais didesnis už kitų sumą.

13.002. Kiek kilogramų vandens reikia išgarinti iš 0,5 t celiuliozės masės, turinčios 85% vandens norint gauti masę, kurioje būtų 75% vandens?

13.003. Dviejuose bidonuose yra 70 l pieno. Jeigu 12,5% pieno, esančio pirmame bidone, perpiltume į antrą bidoną, tai abiejuose pieno būtų po lygiai. Kiek litrų pieno yra kiekviename bidone?

13.004. Per 12 h dvi brigados kartu įdirbo žemės sklypą. Per kiek laiko šį sklypą įdirbtų kiekviena brigada atskirai, jeigu jų darbo spartos santykis lygus 3 : 2?

13.005. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 12. Prie ieškomojo skaičiaus pridėjus 36, gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite tą skaičių.

13.006. Traktorininkas suarė tris žemės sklypus. Pirmo sklypo plotas lygus $\frac{2}{5}$ visų trijų sklypų ploto, o antro ir trečio sklypo plotų santykis $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$. Trečias sklypas 16 ha mažesnis už pirmąjį. Kiek hektarų iš viso suarė traktorininkas?

13.007. Prekės kaina iš pradžių buvo sumažinta 20%, po to nauja kaina sumažinta dar 15% ir paskiausiai sumažinta dar 10%. Kiek procentų iš viso sumažinta pradinė prekės kaina?

13.008. Jūros vandenyje druska sudaro 5% masės. Kiek gėlo vandens reikia įpilti į 30 kg jūros vandens, kad druskos koncentracija būtų 1,5%?

13.009. Bibliotekoje yra knygų anglų, prancūzų ir vokiečių kalbomis. Knygos anglų kalba sudaro 36% visų knygų užsienio kalbomis, prancūzų kalba — 75% knygų anglų kalba, o kitos 185 knygos parašytos vokiečių kalba. Kiek knygų užsienio kalbomis yra bibliotekoje?

13.010. Per 7,5 min siurblys išsiurbia iš baseino $\frac{2}{3}$ vandens. Siurblys veikė 0,15 h, po to buvo sustabdytas. Tuo metu baseine dar buvo 25 m^3 vandens. Apskaičiuokite baseino talpą.

13.011. Rekonstravus įrenginius, darbininko darbo našumas per metus padidėjo du kartus po tiek pat procentų. Per tą patį laiką darbininkas anksčiau pagamindavo dirbinių už 25 rb, o dabar pagamina už 28 rb 09 kp. Kiek procentų padidėjo darbo našumas kiekvieną kartą?

13.012. Darbo diena sutrumpėjo nuo 8 h iki 7 h. Kiek procentų reikia padidinti darbo našumą, kad, esant tiems patiems įkainiams, atlyginimas padidėtų 5%?

13.013. Sausio mėnesį gamykla įvykdė gatavos produkcijos gamybos mėnesio užduotį 105%, o vasario mėnesį ji pagamino produkcijos 4% daugiau negu sausį. Kiek procentų gamykla viršijo dviejų mėnesių produkcijos gamybos užduotį?

13.014. Pirmas skaičius sudaro 80% antrojo; antro ir trečio skaičiaus santykis lygus $0,5 : \frac{9}{20}$, o pirmo ir trečio skaičiaus suma 70 vienetų didesnė už antrą skaičių. Raskite tuos tris skaičius.

13.015. Iš vieno miesto į kitą turistas nuvažiavo per tris dienas. Pirmą dieną jis įveikė $\frac{1}{5}$ viso kelio ir dar 60 km, antrą dieną — $\frac{1}{4}$ viso kelio ir dar 20 km, o trečią dieną — $\frac{23}{80}$ viso kelio ir likusius 25 km. Apskaičiuokite atstumą tarp miestų.

13.016. Trijų trupmenų skaitikliai proporcingi skaičiams 1, 2 ir 3, o atitinkamų vardiklių atvirkštiniai dydžiai — skaičiams 1, $\frac{1}{3}$ ir 0,2. Trupmenų aritmetinis vidurkis lygus $\frac{136}{315}$. Raskite tas trupmenas.

13.017. Trečio ir pirmo skaičiaus santykis lygus $4,5 : 3\frac{3}{4}$, trečias skaičius sudaro 40% antro skaičiaus, o pirmo ir antro skaičiaus suma lygi 400. Raskite tų trijų skaičių sumą.

13.018. Indėlininkas iš pradžių paėmė iš taupomojo banko $\frac{1}{4}$ savo pinigų, po to — $\frac{4}{9}$ likusių pinigų ir dar 64 rb. Tada

banke dar liko $\frac{3}{20}$ visų jo pinigų. Kokio dydžio buvo indėlis?

13.019. Gatvę valo dvi mašinos. Viena jų gali nuvalyti visą gatvę nuo sniego per 1 h, o kita — per 75% to laiko. Abi mašinos pradėjo valyti kartu ir dirbo 20 min, po to pirma mašina nutraukė darbą. Per kiek laiko antra mašina užbaigs valyti gatvę?

13.020. Pirmųjų trijų proporcijos narių suma lygi 58. Trečiasis narys sudaro $\frac{2}{3}$, o antrasis — $\frac{3}{4}$ pirmojo nario. Raskite ketvirtąjį proporcijos narį.

13.021. Viena brigada gali nuimti derlių nuo viso lauko per 12 dienų. Kitai brigadai reikia 75% to laiko. Iš pradžių 5 dienas lauke dirbo tik viena pirmoji brigada, po to prie jos prisijungė antroji brigada, ir jos abi užbaigė darbą. Kiek dienų brigados dirbo kartu?

13.022. Per stojamąjį matematikos egzaminą 15% stojančiųjų neišsprendė nė vieno uždavinio, 144 abiturientai padarė klaidų, o teisingai išsprendusių visus uždavinius ir visai jų neišsprendusių abiturientų santykis buvo lygus 5 : 3. Kiek abiturientų tą dieną laikė egzaminą?

13.023. Vienodos detalės apdorojamos dvejomis staklėmis. Pirmų staklių darbo našumas 40% didesnis negu antrųjų. Pirmos staklės per pamainą veikė 6 h, o antros — 8 h. Abejomis staklėmis apdorota 820 detalių. Kiek detalių per pamainą buvo apdorota kiekvienomis staklėmis?

13.024. Per 4 h 15 min traktorininkų brigada gali suarti $\frac{5}{6}$ žemės sklypo. Iki pietų pertraukos brigada dirbo 4,5 h, po to liko nesuarta 8 ha. Kokio dydžio buvo sklypas?

13.025. Iš prieplaukos į miestą 12 km/h greičiu išplaukė valtis, o po pusvalandžio ta pačia kryptimi 20 km/h greičiu išvyko garlaivis. Į miestą jis atplaukė 1,5 h anksčiau negu valtis. Koks atstumas nuo prieplaukos iki miesto?

13.026. 90 km turistas nuplaukė valtimi ir 10 km nuėjo pėsčias. Ėjo jis 4 h mažiau negu plaukė. Jeigu turistas eitų tiek pat laiko, kiek plaukė, o plauktų tiek laiko, kiek ėjo, tai įveiktų vienodą atstumą. Kiek laiko turistas ėjo ir kiek plaukė?

13.027. Dviženklio skaičiaus skaitmenų kvadratų suma lygi 13. Iš to dviženklio skaičiaus atėmus 9, gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite tą skaičių.

13.028. Trijų trupmenų skaitikliai proporcingi skaičiams 1, 2, 5, o vardikliai — atitinkamai skaičiams 1, 3, 7. Šių trupmenų aritmetinis vidurkis lygus $\frac{200}{441}$. Raskite tas trupmenas.

13.029. Garažas turi 54 vairuotojus ir 60 autobusų. 25% jų kasdien lieka garaže profilaktiniam remontui. Po kiek poilsio dienų per mėnesį (30 dienų) gali turėti vairuotojai?

13.030. Trys darbininkų brigados supylė pylimą. Visas darbas buvo įvertintas 3255 rb. Pirmą brigadą sudarė 15 žmonių, kurie dirbo 21 dieną, antrą brigadą — 14 žmonių, dirbusių 25 dienas, o trečioje brigadoje, kuri dirbo 20 dienų, buvo 40% žmonių daugiau negu pirmoje. Kokį atlyginimą gavo kiekviena brigada?

13.031. Per atostogas grupė studentų keliavo po Lietuvą. Pirmuosius 30 km jie nuėjo pėsčiomis, 20% likusios maršruto dalies nuplaukė plaustu, po to pėsčiomis nuėjo 1,5 karto ilgesnį kelią negu nuplaukė upe. Likusį kelią per 1 h 30 min jie nuvažiavo pakeleivingu sunkvežimiu, kurio greitis 40 km/h. Koks viso maršruto ilgis?

13.032. Pirmas štampavimo presas per 3,5 h gali pagaminti 42% visų užsakytų detalių. Antras presas per 9 h gali pagaminti 60% visų detalių, o trečio ir antro presų atliekamo darbo spartos santykis lygus 6 : 5. Per kiek laiko bus įvykdytas užsakymas, jeigu visi trys presai dirbs kartu?

13.033. Dvi mašininkės perrašė po 72 puslapius rankraščio. Per tą patį laiką pirma mašininkė perrašydavo 6 puslapius, o antroji — 5 puslapius. Kiek puslapių per valandą perrašydavo kiekviena mašininkė, jeigu pirma mašininkė užbaigė darbą 1,5 h anksčiau negu antroji?

13.034. Knygynas gavo fizikos ir matematikos vadovėlių. Pardavus 50% matematikos ir 20% fizikos vadovėlių, kurie sudarė 390 knygų, matematikos vadovėlių liko 3 kartus daugiau negu fizikos. Kiek matematikos ir kiek fizikos vadovėlių gavo knygynas?

13.035. Batų fabrikas per pirmą savaitę įvykdė 20% mėnesio užduoties, per antrą savaitę pagamino 120% produkcijos, pagamintos per pirmą savaitę, o per trečią savaitę — 60% produkcijos, pagamintos per pirmąsias dvi savaites. Norint įvykdyti mėnesio užduotį, reikia per paskutinę mėnesio savaitę pagaminti 1480 porų batų. Kiek porų batų fabrikas turi pagaminti per mėnesį?

13.036. Šviežiuose grybuose yra 90% vandens, o džiovintuose — 12%. Kiek džiovintų grybų galima gauti iš 22 kg šviežių grybų?

13.037. Pirmas malūnas per 3 h gali sumalti 19 cnt kviečių, antras malūnas per 5 h — 32 cnt, trečias per 2 h — 10 cnt. Kaip paskirstyti 133 t kviečių šiems malūnams, kad jie pradėtų ir baigtų malti tuo pačiu metu?

13.038. Trijose sporto mokyklos sekcijose yra 96 sportininkai. Tinklinio sekcijos narių skaičius sudaro 0,8 rankinio sekcijos narių skaičiaus, o krepšinio sekcijos narių skaičius — $33\frac{1}{3}$ %

pirmųjų dviejų sekcijų narių bendro skaičiaus. Kiek sportininkų yra kiekvienoje sekcijoje?

13.039. Pirmą ketvirtį automobilių gamykla įvykdė metinę gamybos užduotį 25%. Antrą, trečią ir ketvirtą ketvirtį ji pagamino automobilių, kurių kiekis proporcingas skaičiams 11,25, 12 ir 13,5. Antrą ketvirtį gamykla pagamino 1,08 karto daugiau produkcijos negu pirmą ketvirtį. Kiek procentų gamykla viršijo metinę užduotį?

13.040. Trims išradėjams paskirta 1410 rb premija. Antrasis išradėjas gavo $\frac{1}{3}$ pirmajam paskirtos sumos ir dar 60 rb, o trečiasis — $\frac{1}{3}$ antrojo išradėjo gautų pinigų ir dar 30 rb. Kokio dydžio premiją gavo kiekvienas išradėjas?

13.041. Sumaišius 30% koncentracijos ir 10% koncentracijos druskos rūgšties tirpalus, gauta 600 g 15% koncentracijos tirpalo. Kiek gramų kiekvieno tirpalo buvo sumaišyta?

13.042. Trijų žemės sklypų plotų santykis lygus $2\frac{3}{4} : 1\frac{5}{6} : 1\frac{3}{8}$. Iš pirmo sklypo gauta 72 cnt grūdų daugiau negu iš antrojo. Iš 1 ha vidutiniškai gauta 18 cnt. Apskaičiuokite visų trijų sklypų plotą.

13.043. Atstumas nuo miesto M iki miesto S geležinkeliu lygus 415 km. Tarp šių miestų yra miestai K ir L. Atstumas tarp M ir K sutinka su atstumu tarp K ir L kaip 7 : 9, o atstumas tarp K ir L sudaro $\frac{27}{35}$ atstumo tarp L ir S. Raskite atstumus tarp kiekvienų dviejų gretimų miestų.

13.044. Į parduotuvę atvežė 63 maišus perlinių ir miežinių kruopų. Iš viso jie sveria 4,8 t. Miežinių kruopų maišų buvo 25% daugiau negu perlinių. Kiekvieno perlinių kruopų maišo masė lygi $\frac{3}{4}$ miežinių kruopų maišo masės. Kiek perlinių ir kiek miežinių kruopų atvežta į parduotuvę?

13.045. 36 kg masės vario ir cinko lydinio gabale yra 45% vario. Kiek vario reikia pridėti norint gauti lydinį, kuriame būtų 60% vario?

13.046. Medžiotojams skiriamą paraką sudaro salietra, siera ir anglis. Sieros ir salietros masių santykis turi būti lygus 0,2 : 1,3, o anglies masė turi sudaryti $11\frac{1}{9}$ % sieros ir salietros masės kartu. Kiek reikia kiekvienos medžiagos norint pagaminti 25 kg parako?

13.047. Muzikinis teatras paskelbė konkursą norintiems groti orkestre. Buvo numatyta, kad smuikininkų, violončelininkų ir trimitininkų skaičius pasiskirstys santykiu 1,6 : 1 : 0,4. Bet priimta smuikininkų 25% daugiau, o violončelininkų — 20% mažiau negu buvo numatyta. Kiek įvairaus žanro muzikantų priimta į orkestrą, jeigu jis padidėjo 32 žmonėmis?

13.048. Dunojaus ir Dnepro ilgių santykis lygus $\frac{19}{3} : 5$, o Dono ir Dunojaus — 6,5 : 9,5. Dnepras 300 km ilgesnis už Doną. Apskaičiuokite kiekvienos tų upių ilgį.

13.049. Pirmasis iš nežinomų skaičių sudaro 140% antrojo, o pirmojo ir trečiojo skaičiaus santykis lygus $\frac{14}{11}$. Trečiojo ir antrojo skaičiaus skirtumas 40 vienetų mažesnis už skaičių, kuris sudaro 12,5% pirmojo ir antrojo skaičių sumos. Raskite tuos skaičius.

13.050. Per vasaros atostogas mokinys dirbo pašte. Birželio ir liepos mėnesio jo atlyginimų santykis lygus $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$, o liepos ir rugpjūčio — $2 : \frac{8}{3}$. Rugpjūtį mokinys gavo 15 rb daugiau negu birželį, be to, premiją, kuri sudaro 20% trijų atlyginimų sumos. Apskaičiuokite premijos dydį.

13.051. 6 m ilgio nuožulniąja plokštuma rieda du ritiniai, kurių vieno apskritimo ilgis 3 dm, o kito — 2 dm. Ar galima tuo pačiu dydžiu padidinti abiejų ritinių apskritimų ilgį, kad riedėdami tokio pat ilgio keliu vienas jų apsisuktų 3 apsisukimais daugiau negu kitas?

13.052. Baseinas yra stačiakampis. Jo kraštinių skirtumas 1 km. Du žvejai iš vieno baseino kampo tuo pačiu metu išsirengė į priešingą jo kampą. Vienas žvejys plaukė tiesiai valtimi, o kitas išėjo palei krantą. Abu judėjo 4 km/h greičiu, ir vienas jų pasiekė sutartą vietą 30 min anksčiau negu kitas. Apskaičiuokite baseino matmenis.

13.053. Augančio kristalo masė tolygiai didėja. Stebint dviejų kristalų augimą, nustatyta, kad pirmo kristalo pradinė masė per metus padidėjo 4%, o antro — 5%; tuo tarpu pirmo kristalo masės prieaugis per 3 mėn. buvo lygus antro kristalo masės prieaugiui per 4 mėn. Kokia buvo pradinė kristalų masė, jeigu žinoma, kad, kiekvieno kristalo masei padidėjus 20 g, pirmo ir antro kristalo masių santykis pasidarė lygus 1,5?

13.054. Vienas ūkis gavo 21 cnt grikių iš 1 ha, o kitas — 25 cnt iš 1 ha. Antrame ūkyje grikiais buvo užsėta 12 ha mažiau ir prikulta 300 cnt grikių daugiau negu pirmame ūkyje. Kiek centnerių grikių prikūlė kiekvienas ūkis?

13.055. Per tam tikrą laiką vagonų remonto gamykla turėjo suremontuoti 330 vagonų. Kiekvieną savaitę ji vidutiniškai 3 vagonais viršydavo remonto užduotį ir dviem savaitėmis anksčiau numatyto laiko suremontavo 297 vagonus. Kiek vagonų kas savaitę suremontuodavo gamykla?

13.056. Nuvažiuodamas s km, sunkvežimis sunaudoja a l benzino daugiau negu lengvasis automobilis. Sunaudodamas 1 l benzino, sunkvežimis tuo pačiu keliu nuvažiuoja b km mažiau negu lengvasis automobilis. Kiek litrų benzino sunaudoja kiekvienas šių automobilių nuvažiuodamas s km?

13.057. Dvi viena kitai statmenos jėgos veikia vieną tašką. Vienos jų modulis 4 N didesnis negu kitos, o jėgų atstojamosios modulis 8 N mažesnis už duotųjų jėgų modulių sumą. Raskite tų jėgų ir jų atstojamosios modulius.

13.058. Laboratorijoje matuojamas greitis, kuriuo plinta garsas išilgai strypų, pagamintų iš skirtingų medžiagų. Pirmas bandymas parodė, kad trimis nuosekliai sujungtais strypais garsas nueina per a sekundžių, o antru ir trečiu strypu — du kartus greičiau negu pirmuoju. Atliekant antrą bandymą, antras strypas pakeistas nauju strypu, kurio ilgis l m. Tada trimis nuosekliai sujungtais strypais garsas nueina per b sekundžių, o pirmu ir antru strypu — du kartus lėčiau negu trečiuoju. Kokiu greičiu garsas plinta naujuoju strypu?

13.059. Gyvenvietės gatvė yra 1200 m ilgio. Abipus jos yra stačiakampės žemės juostos, suskirstytos į sklypus. Vienos juostos plotis 50 m, o kitos 60 m. Siauresnėje juostoje yra 5 sklypais daugiau negu platesnėje. Siauresnės juostos kiekvieno sklypo plotas 1200 m^2 mažesnis negu platesnės juostos kiekvieno sklypo plotas. Kiek sklypų yra gyvenvietėje?

13.060. 60 kg masės krovinys slegia atramą. Jeigu krovinio masę sumažinsime 10 kg, o atramos plotą — 5 dm^2, tai masė, tenkanti atramos ploto kiekvienam kvadratiniam decimetrui, padidės 1 kg. Apskaičiuokite atramos plotą.

13.061. Keturioms banderolėms išsiųsti prireikė keturių skirtingų pašto ženklų, kurie kainuoja iš viso 2 rb 80 kp. Tų pašto ženklų kainos sudaro aritmetinę progresiją, o pats brangiausias pašto ženklas 2,5 karto brangesnis už patį pigiausią ženklą. Apskaičiuokite kiekvieno pašto ženklo kainą.

13.062. Tekintojo mokinys tam tikram skaičiui šachmatų komplektų turi ištekinti pėstininkus. Jeigu jis kasdien ištekintų 2 pėstininkais daugiau negu pagamina dabar, užduotį įvykdytų 10 dienų anksčiau, jeigu 4 pėstininkais daugiau, tai užduoties atlikimo terminas sutrumpėtų 16 dienų. Kiekvienam komplektui reikia 16 pėstininkų. Keliems šachmatų komplektams tekintojo mokinys turi ištekinti pėstininkus?

13.063. Žiūrovų salėje buvo 320 kėdžių, sustatytų vienodomis eilėmis. Po remonto kiekvieną eilę padidino 4 kėdėmis ir pridėjo dar vieną eilę. Salėje dabar 420 kėdžių. Kiek eilių dabar yra žiūrovų salėje?

13.064. Ūkyje paruošta šieno tiek, kad visiems arkliams kasdien tektų jo 96 kg. Pardavus du arklius, kiekvieno arklio dienos davinys padidėjo 4 kg. Kiek arklių buvo ūkyje iš pradžių?

13.065. 108 mokiniai rašė kontrolinį darbą. Jiems buvo išdalyta 480 lapų popieriaus. Kiekviena mergaitė gavo vienu lapu daugiau negu berniukas, o visos mergaitės — tiek pat lapų, kiek ir visi berniukai. Kiek buvo mergaičių ir kiek — berniukų?

13.066. Mašinų gamykla pradėjo gaminti naujas generatorių detales. Iš 875 kg metalo dabar pagaminama 3 detalėmis daugiau negu senųjų detalių iš 900 kg. Dviejų naujųjų detalių masė 0,1 t mažesnė už vienos senosios detalės masę. Kokia yra naujosios ir kokia — senosios detalės masė?

13.067. Pirmąją sportinių varžybų dieną neįvykdė įskaitinių normų ir toliau nekovojo $\frac{1}{6}$ vaikinų ir $\frac{1}{7}$ merginų. Kitą dieną neįvykdė normų vienodas skaičius vaikinų ir merginų. Paaiškėjo, kad įskaitinių normų iš viso neįvykdė 48 vaikinai ir 50 merginų. Įskaitines normas įvykdė merginų dvigubai daugiau negu vaikinų. Kiek vaikinų ir kiek merginų pradėjo varžybas?

13.068. Meistrų A ir B darbas apmokamas nevienodai, nors jie dirba vienodą skaičių dienų. Jeigu A dirbtų viena diena mažiau, o B — penkiomis dienomis mažiau, tai A uždirbtų 72 rb, o B — 80 rb. Ir atvirkščiai, jeigu A dirbtų penkiomis dienomis mažiau, o B — viena diena mažiau, tai B uždirbtų 36 rb daugiau negu A. Kiek uždirba kiekvienas meistras?

13.069. Viename baseine yra 200 m^3 vandens, o kitame — 112 m^3. Atsukus čiaupus, į antrą baseiną per valandą pribėga 22 m^3 daugiau vandens negu į pirmą. Po kiek valandų vandens kiekis baseinuose bus vienodas?

13.070. Iš baseino tolygiai leidžiamas vanduo. Po valandos jame liko 400 m^3, o dar po trijų valandų — 250 m^3. Kiek vandens buvo baseine iš pradžių?

13.071. 60 t kroviniams pervežti pareikalauta tam tikro skaičiaus sunkvežimių. Tačiau į kiekvieną sunkvežimį pakrauta 0,5 t krovinių mažiau negu buvo numatyta. Dėl to prireikė dar 4 sunkvežimių. Kiek sunkvežimių buvo pareikalauta iš pradžių?

13.072. Miestas C yra tarp vietovių A ir B, kurios nutolusios viena nuo kitos per 500 km. Iš šių vietovių dujos tiekiamos į miestą C. Iš rezervuaro A kas minutę išsiurbiama 10 000 m^3 dujų, o iš rezervuaro B — 12% daugiau. Dujų nuotėkis kiekvienos magistralės viename kilometre sudaro 4 m^3. Žinodami, kad į miestą C iš vietovių A ir B patenka vienodas kiekis dujų, apskaičiuokite atstumą tarp miesto C ir vietovės A.

13.073. Yra dvi ritės skirtingo kabelio. Pirmosios ritės kabelio masė lygi 65 kg, antrosios — 120 kg. Antros ritės kabelis 3 m ilgesnis už pirmosios, o jo kiekvieno metro masė 2 kg didesnė už pirmos ritės kabelio kiekvieno metro masę. Apskaičiuokite abiejų ričių kabelių ilgį.

13.074. Į siuvimo cechą atvežti trys rietimai medvilninių audinių, iš viso 5000 m. Pirmame rietime buvo tris kartus mažiau audinio negu antrame, o trečiame — 22% viso kiekio. Iš pirmo

rietimo pasiūta 150 paklodžių ir 240 užvalkalų. Vienai paklodei sunaudota 3,25 m audinio daugiau negu vienam užvalkalui. Kiek metrų audinio prireikė vienam užvalkalui?

13.075. Du darbininkai kartu per pamainą pagamino 72 detales. Kai vienas darbininkas padidino darbo našumą 15%, o kitas — 25%, per pamainą abudu pagamino 86 detales. Kiek detalių per pamainą pagamino kiekvienas darbininkas, padidinęs darbo našumą?

13.076. Šiais metais ūkis prikūlė 4340 cnt grūdų. Kitais metais ūkis tikisi prikulti 5520 cnt grūdų, nes numato padidinti javų pasėlių plotą 14 ha ir derlingumą 5 cnt. Apskaičiuokite javų pasėlių plotą ir derlingumą centneriais (iš 1 ha prikulta mažiau negu 40 cnt).

13.077. Vyresnysis brolis išsirengė į mišką motociklu, o jaunesnysis — dviračiu. Juodu važinėjosi dvi valandas: iki miško ir nesustodami atgal. Motociklininkas kiekvieną kilometrą nuvažiuodavo 4 min greičiau negu dviratininkas. Vyresnysis brolis per tą laiką nuvažiavo 40 km ilgesnį atstumą. Kiek kilometrų nuvažiavo kiekvienas brolis?

13.078. $\frac{5}{8}$ viso kelio turistas važiavo automobiliu, o kitą dalį plaukė kateriu. Katerio greitis 20 km/h mažesnis negu automobilio. Automobiliu turistas važiavo 15 min ilgiau negu plaukė kateriu. Visas turisto kelias lygus 160 km. Koks automobilio greitis ir koks — katerio?

13.079. Pirmas turistas 1,5 h važiuoja dviračiu 16 km/h greičiu, po to 1,5 h ilsisi ir vėl keliauja pradiniu greičiu. Praėjus 4 h nuo pirmo turisto išvykimo, 56 km/h greičiu motociklu išvažiuoja antras turistas. Kiek kilometrų jie nuvažiuos, kol antras turistas pasivys pirmąjį?

13.080. Iš gyvenvietės į miestą, atstumas tarp kurių 60 km, šiandien turi atvažiuoti studentės tėvas. Jis ketina nueiti į paskaitą, tačiau ji perkelta į kitą dieną. Norėdama įspėti tėvą, mieste gyvenanti dukra išvažiuoja plentu jo pasitikti. Tėvas ir dukra išvažiavo mopedais tuo pačiu metu, bet dukra važiavo vidutiniškai du kartus greičiau. Grįždami po susitikimo, abu padidino savo pradinį greitį 2 km/h, ir dukra atvyko į miestą 5 min vėliau negu tėvas į gyvenvietę. Kokiu vidutiniu greičiu iš pradžių važiavo tėvas ir kokiu — dukra?

13.081. Motociklininkas nuvažiavo iš miesto A į miestą B, atstumas tarp kurių 120 km. Grįždamas 1 h jis važiavo tuo pačiu greičiu, po to 10 min stovėjo, o likusią kelio dalį nuvažiavo 6 km/h didesniu greičiu. Keliaudamas atgal, jis užtruko tiek pat laiko, kiek ir važiuodamas iš A į B. Koks buvo pradinis motociklininko greitis?

13.082. Iš turistinių bazių A ir B viena priešais kitą turi iškeliauti dvi grupės turistų. Atstumas tarp bazių lygus 30 km. Jeigu pirma grupė išeitų 2 h anksčiau negu antroji, tai jos susitiktų po 2,5 h nuo antros grupės išėjimo. O jeigu antra grupė išeitų 2 h anksčiau negu pirmoji, tai jos susitiktų po 3 h nuo pirmos grupės išėjimo. Koks vidutinis kiekvienos grupės greitis?

13.083. Prekinis traukinys buvo sulaikytas 12 min, po to, padidinęs greitį 15 km/h, jis 60 km kelyje kompensavo sugaištą laiką. Raskite pradinį traukinio greitį.

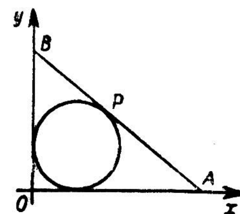
13.084. Iš vietovių A ir B tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo du autobusai. Atstumas tarp šių vietovių lygus 120 km. Pirmas autobusas kelyje stovėjo 10 min, o antrasis — 5 min. Pirmas autobusas atvyko į B 25 min anksčiau negu antrasis į A. Autobusų greitį galima laikyti pastoviu. Pirmo autobuso greitis 20 km/h didesnis negu antrojo. Kiek laiko važiavo kiekvieno šių autobusų keleiviai?

13.085. Du broliai nutarė dviračiais nukeliauti 42 km. Vyresnysis brolis visą kelią važiavo pastoviu greičiu, o jaunesnysis kas valandą atsilikdavo nuo vyresniojo 4 km. Kadangi vyresnysis brolis kelionėje ilsėjosi visą valandą, o jaunesnysis — tik 20 min, tai finišą jie pasiekė kartu. Kiek laiko truko kelionė?

13.086. Mokinys sugalvojo sveikąjį teigiamą skaičių. Prie jo iš dešinės prirašė skaitmenį 7 ir iš gauto naujo skaičiaus atėmė sugalvoto skaičiaus kvadratą. Po to skirtumą sumažino 75% ir dar kartą atėmė sugalvotą skaičių. Galiausiai gavo nulį. Kokį skaičių sugalvojo mokinys?

13.087. Sugalvotas sveikasis teigiamas skaičius. Prie jo iš dešinės prirašomas skaitmuo 5 ir iš gauto naujo skaičiaus atimamas sugalvoto skaičiaus kvadratas. Skirtumas padalijamas iš sugalvoto skaičiaus, po to atimamas sugalvotas skaičius ir gaunamas vienetas. Koks skaičius sugalvotas?

13.088. 13.3 paveiksle pavaizduotas apskritimas, liečiantis dvi tarpusavyje statmenas ašis Ox ir Oy, ir tiesė AB, liečianti apskritimą taške P. Apskritimo spindulys $R=10$ cm, o trikampio OAB plotas 600 cm². Raskite taškų A, B ir P koordinates, atsižvelgdami į tai, kad $OA>OB$.



13.3 pav.

13.089. Tam tikrą atstumą traukinys važiavo 120 km/h greičiu, po to 75 km ilgesnį kelią — 150 km/h greičiu, o likusią kelio atkarpą, kuri 135 km trumpesnė už įveiktąją,— 96 km/h greičiu. Paaiškėjo, kad vidutinis traukinio greitis lygus 120 km/h. Kokio ilgio buvo visas kelias?

13.090. 12 kg masės vario ir alavo lydinio gabale yra 45% vario. Kiek gryno alavo reikia pridėti prie šio gabalo, kad naujas lydinys turėtų 40% vario?

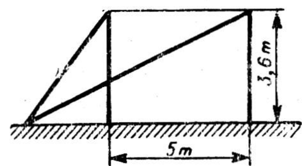
13.091. Dvi organizacijos nusipirko nevienodą kiekį tų pačių prekių, kurių vienas kilogramas kainuoja 1,25 rb. Abiem parduota jų 300 kg. Pirma organizacija nupirktas prekes turi pervežti 20 km, o antra — 30 km atstumu. Už 10 kg prekių pervežimą

1 km atstumu reikia mokėti 5 kp. Žinodami, kad antra organizacija už pirkinį ir pervežimą sumokėjo 90 rb daugiau negu pirmoji, apskaičiuokite, kiek kilogramų prekių pirko kiekviena organizacija ir kiek ji sumokėjo už prekes bei jų pervežimą.

13.092. Piniginė premija padalyta trims išradėjams: pirmasis gavo pusę visos premijos minus $\frac{3}{22}$ to, ką gavo kiti du išradėjai kartu. Antrasis gavo $\frac{1}{4}$ visos premijos ir $\frac{1}{56}$ pinigų, kuriuos gavo kiti du išradėjai kartu. Trečiasis gavo 300 rb. Kokio dydžio buvo premija ir kiek pinigų gavo kiekvienas išradėjas?

13.093. Vario ir sidabro lydinyje sidabro yra 1845 g daugiau negu vario. Jeigu į lydinį įmaišytume gryno sidabro, kurio masė lygi $\frac{1}{3}$ lydinyje esančio gryno sidabro masės, tai gautume naują lydinį, turintį 83,5% sidabro. Kokia lydinio masė ir kiek procentų sidabro iš pradžių buvo lydinyje?

13.094. 500 kg rūdos turi tam tikrą kiekį geležies. Iš tos rūdos pašalinus 200 kg priemaišų, turinčių vidutiniškai 12,5% geležies, gauta rūda, kurioje geležies kiekis padidėjo 20%. Kiek geležies dar liko rūdoje?



13.4 pav.

13.095. Lygioje aikštelėje 5 m atstumu vienas nuo kito stovi du stiebai. Prie kiekvieno jų 3,6 m aukštyje pritvirtinti galai virvės, kurios ilgis 13 m. Virvė ištempta ir pritvirtinta prie aikštelės taip, kaip parodyta 13.4 paveiksle. Kiek nutolęs nuo artimiausio stiebo virvės įtvirtinimo taškas?

13.096. Kiekvieną minutę dviratininkas nuvažiuoja 500 m mažiau negu motociklininkas, todėl 120 km atstumą jis įveikia 2 h vėliau. Apskaičiuokite kiekvieno jų greitį.

13.097. Atstumas nuo A iki B geležinkeliu lygus 88 km, o upe — 108 km. Iš A traukinys išvažiuoja 1 h vėliau negu išplaukia motorlaivis ir atvyksta į B 15 min anksčiau. Apskaičiuokite vidutinį traukinio greitį, jeigu žinoma, kad jis yra 40 km didesnis už vidutinį motorlaivio greitį.

13.098. Atstumas tarp miestų A ir B lygus 40 km. Iš šių miestų tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvyksta pėsčiasis ir dviratininkas. Po 2 h jie susitinka ir keliauja toliau. Dviratininkas atvažiuoja į miestą A 7 h 30 min anksčiau, negu pėsčiasis ateina į miestą B. Abiejų greitis pastovus. Apskaičiuokite, kokiu greičiu ėjo pėsčiasis ir kokiu greičiu važiavo dviratininkas?

13.099. Atstumas tarp gyvenviečių A ir B lygus s km. Iš A į B tuo pačiu metu tuo pačiu keliu išvažiavo du turistai, kurie turėjo pasiekti gyvenvietę B tuo pačiu metu. Iš tikrųjų pirmas turistas atvažiavo į B n h anksčiau, o antras $3n$ h pavėlavo, nes

kas valandą nuvažiuodavo vidutiniškai r km mažiau negu pirmas turistas. Nustatykite kiekvieno turisto vidutinį greitį.

13.100. Jeigu prie skaitmenimis užrašyto sveikojo teigiamo skaičiaus iš dešinės prirašysime skaitmenį 4, tai gausime skaičių, kuris dalijasi iš skaičiaus, 4 vienetais didesnio už ieškomąjį, o dalmuo bus lygus skaičiui, 27 vienetais mažesniam už daliklį. Raskite tą skaičių.

13.101. Tuo pačiu metu vienas priešais kitą iš gyvenvietės M turėjo išeiti keleivis A, o iš gyvenvietės N — keleivis B. Tačiau A užtruko ir išėjo 6 h vėliau. Kai abudu susitiko, paaiškėjo, kad keleivis A nuėjo 12 km mažiau negu keleivis B. Pailsėję jie tuo pačiu metu iškeliavo toliau pradiniu greičiu. Keleivis A atėjo į gyvenvietę N po 8 h, o keleivis B į gyvenvietę M — po 9 h nuo susitikimo. Apskaičiuokite atstumą nuo M iki N ir kiekvieno keleivio greitį.

13.102. Duoti du dviženkliai skaičiai, kurių antras užrašytas tais pačiais skaitmenimis, kaip ir pirmas, bet atvirkščia tvarka. Pirmą skaičių padalijus iš antro, gaunamas dalmuo 1,75. Pirmo skaičiaus ir jo dešimčių skaitmens sandauga 3,5 karto didesnė už antrą skaičių. Raskite tuos skaičius.

13.103. Iš geležinkelio stoties į turistinę bazę galima eiti plentu arba takeliu. Kelias takeliu yra 5 km trumpesnis. Du draugai susitarė, jog vienas jų eis plentu pastoviu v km/h greičiu, o kitas — takeliu 3 km/h greičiu. Antrasis atvyko į turistinę bazę 1 h anksčiau negu pirmasis. Apskaičiuokite atstumą nuo stoties iki turistinės bazės plentu ir pirmo draugo greitį v (v — sveikasis skaičius).

13.104. Autobuso maršruto ilgis 16 km. Spūsties valandomis autobusas važiuoja kaip ekspresas, t. y. sustodamas ne visose stotelėse. Todėl visą maršrutą nuvažiuoja 4 min greičiau, o vidutinis jo greitis padidėja 8 km/h. Kokiu greičiu autobusas važiuoja kaip ekspresas?

13.105. Viena linija pradėjo kursuoti naujos konstrukcijos tramvajai. Jų vidutinis greitis 5 km/h didesnis negu senųjų tramvajų. Todėl 20 km maršrutą nauji tramvajai nuvažiuoja 12 min greičiau negu senieji. Per kiek laiko nuvažiuoja visą maršrutą naujos konstrukcijos tramvajus ir koks vidutinis jo greitis?

13.106. Lėktuvas turi nuskristi 2900 km. Įveikęs 1700 km, jis nusileido ir po 1 h 30 min vėl pakilo, tačiau skrido 50 km/h mažesniu greičiu. Apskaičiuokite pradinį lėktuvo greitį, jeigu žinoma, kad jis atvyko į vietą po 5 h nuo skridimo pradžios.

13.107. Dvi brigados kartu per 18 dienų turi suremontuoti tam tikrą kelio ruožą. Tačiau iš pradžių dirbo tik pirmoji brigada, o baigė viena antroji brigada, kuri remontavo sparčiau negu pirmoji. Kelio remontas užtruko 40 dienų. Pirmoji brigada atliko $\frac{2}{3}$ viso darbo. Per kiek dienų šį kelio ruožą suremontuotų kiekviena brigada atskirai?

13.108. Iš dviejų bandymų sklypų pirmais metais prikulta 14,7 cnt grūdų. Kitais metais, pritaikius naujus agrotechnikos metodus, pirmo sklypo derlius padidėjo 80%, o antro — 24%, iš abiejų sklypų buvo prikulta 21,42 cnt grūdų. Kiek centnerių grūdų išauginama kiekviename sklype pritaikius naujus agrotechnikos metodus?

13.109. Iš dviejų vietovių tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo du dviratininkai. Atstumas tarp jų lygus 270 km. Antras dviratininkas kas valandą nuvažiuodavo 1,5 km mažiau negu pirmasis ir susitiko su pirmuoju po tiek valandų, kiek kilometrų kas valandą nuvažiuodavo pirmas dviratininkas. Apskaičiuokite kiekvieno dviratininko greitį.

13.110. Du traukiniai vienas priešais kitą išvažiuoja iš vietovių *A* ir *B*. Jeigu iš *A* traukinys išvyktų 2 h anksčiau negu iš *B*, tai jie susitiktų pusiaukelėje. Jeigu abu traukiniai išvažiuotų tuo pačiu metu, tai po 2 h atstumas tarp jų būtų lygus $\frac{1}{4}$ atstumo tarp *A* ir *B*. Per kiek laiko kiekvienas traukinys nuvažiuoja visą kelią?

13.111. Traukinys buvo sulaikytas ir stovėjo t h. Padidinęs greitį m km/h, mašinistas s km tarpustotėje kompensavo sugaištą laiką. Kokiu greičiu traukinys turėtų važiuoti tą tarpustotę, jeigu nebūtų sulaikytas?

13.112. Atstumas tarp dviejų kūnų lygus 390 m. Jie juda vienas priešais kitą. Pirmąją sekundę pirmas kūnas nuėjo 6 m, o kiekvieną sekančią sekundę — 6 m daugiau negu ankstesnę sekundę. Antras kūnas pradėjo judėti 5 s vėliau už pirmą ir judėjo tolygiai 12 m/s greičiu. Po kiek sekundžių, pajudėjus pirmam kūnui, abu kūnai susitiks?

13.113. Į vamzdį patenka viena materialioji dalelė, o po 6,8 min — kita. Kiekviena jų tuoj pat pradeda slinkti vamzdžiu: pirma dalelė juda tolygiai 5 m/min greičiu, o antra pirmąją minutę įveikia 3 m, o kiekvieną sekančią minutę — 0,5 m daugiau negu ankstesnę minutę. Per kiek minučių antra dalelė pavys pirmąją?

13.114. Atstumas tarp dviejų miestų lygus a km. Du automobilininkai, išvažiavę iš šių miestų vienas priešais kitą, susitiks pusiaukelėje, jeigu pirmasis jų išvyks t h anksčiau už antrąjį. Išvažiavę kartu, jie susitiks po $2t$ h. Raskite kiekvieno automobilio greitį, laikydami jį visame kelyje pastoviu.

13.115. Iš miesto *M* į miestą *N* pastoviu 12 km/h greičiu išvažiavo turistas *A*. Turistas *B*, esantis mieste *N*, sužinojęs, kad *A* jau nukeliavo 7 km, išvyko jo pasitikti ir kas valandą nuvažiuodavo 0,05 viso kelio tarp *M* ir *N*. Nuo to momento, kai išvažiavo *B*, iki susitikimo su *A* praėjo tiek valandų, kiek kilometrų kas valandą nuvažiuoja *B*. Raskite atstumą tarp miestų *M* ir *N*, jeigu žinoma, kad jis yra ne mažesnis kaip 100 km.

13.116. Traukinys iš vienos stoties išvyko pavėlavęs 20 min, tačiau, 160 km ilgio tarpustotę važiuodamas 16 km/h didesniu greičiu negu numatyta tvarkaraštyje, atvyko į kitą stotį laiku. Kokiu greičiu pagal tvarkaraštį turėjo važiuoti traukinys šią tarpustotę?

13.117. Dviratininkas nuvažiavo nuo vietovės *A* iki vietovės *B*. Atstumas tarp jų 60 km. Grįždamas pirmąją valandą jis važiavo pradiniu greičiu, po to 20 min stovėjo. Vėl pajudėjęs, jis padidino greitį 4 km/h, todėl kelyje iš *B* į *A* užtruko tiek pat laiko, kiek ir kelyje iš *A* į *B*. Kokiu greičiu dviratininkas važiavo iš *A* į *B*?

13.118. Iš fabriko tuo pačiu metu išvažiavo du autobusai ir pasuko į poilsio zoną prie ežero. Atstumas tarp fabriko ir ežero lygus 48 km. Pirmas autobusas atvyko prie ežero 10 min anksčiau negu antrasis, važiavęs vidutiniškai 4 km/h mažesniu greičiu negu pirmas autobusas. Apskaičiuokite kiekvieno autobuso greitį.

13.119. Dviženklio skaičiaus skaitmenų sandauga tris kartus mažesnė už patį skaičių. Prie ieškomo skaičiaus pridėjus 18, gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite tą skaičių.

13.120. Motociklininkas 12 min sugaišo degalinėje. Po to, padidinęs greitį 15 km/h, 60 km kelyje jis kompensavo prarastą laiką. Kokiu greičiu motociklininkas važiavo po sustojimo?

13.121. Išbandydamas naują lėktuvą, lakūnas per t_1 h nuskrido s km nuo gamyklos aerouosto iki numatytos vietovės. Po to jis pasuko atgal ir per t_2 h grįžo į aerouostą ($t_1<t_2$). Pirmyn ir atgal skrendančio lėktuvo tikrasis greitis (nejudančios oro masės atžvilgiu) buvo vienodas, bet $t_1<t_2$ dėl vėjo įtakos: pirmyn — palankaus, atgal — priešinio. Apskaičiuokite tikrąjį lėktuvo greitį v, vėjo greitį v_v ir kelią $s_t=v_v(t_2-t_1)$, kurį lėktuvas nuskrenda nejudančios oro masės atžvilgiu.

13.122. Du broliai turėjo nuvažiuoti į stadioną, esantį už 20 km nuo jų namų. Jie susitarė, jog išvyks kartu, vienas — dviračiu, kitas — pėsčiomis; nuvažiavęs dalį kelio, pirmas brolis paliks dviratį ir eis pėsčias, o antras, atėjęs iki tos vietos, kur paliktas dviratis, toliau važiuos juo ir pasivys pirmą brolį prie įėjimo į stadioną. Kur turi palikti dviratį pirmas brolis ir kiek laiko jie užtruks kelyje, jeigu kiekvienas brolis eis 4 km/h greičiu, o važiuos 5 kartus greičiau?

13.123. Prie užkardos motociklininkas užtruko 24 min. Padidinęs greitį 10 km/h, jis 80 km kelyje kompensavo sugaištą laiką. Apskaičiuokite motociklininko greitį iki sustojimo.

13.124. Iš uosto tuo pačiu metu išplaukė du motorlaiviai: vienas — į pietus, kitas — į rytus. Po 2 h atstumas tarp jų buvo lygus 174 km. Vienas iš motorlaivių kas valandą nuplaukdavo 3 km daugiau negu kitas. Apskaičiuokite kiekvieno motorlaivio greitį.

13.125. Keleivinio ir prekinio traukinio greičių santykis lygus $a:b$. Keleivinis traukinys išvyko iš stoties *A* 0,5 h vėliau negu

prekinis, o atvažiavo į stotį B 0,5 h anksčiau. Atstumas tarp A ir B lygus s km. Apskaičiuokite kiekvieno traukinio greitį.

13.126. Du taškai juda tolygiai dviem apskritimais. Vienas taškas apsuka ratą 5 s greičiau negu kitas, todėl per 1 min jis suspėja apsisukti dviem kartais daugiau. Kiek kartų per minutę apsisuka kiekvienas taškas?

13.127. Pagal dresiruotojo signalą du poniai tuo pačiu metu pradėjo bėgti tolygiai cirko arenos išoriniu apskritimu priešingomis kryptimis. Pirmas ponis lėkė šiek tiek greičiau už antrą ir iki jų susitikimo vietos nubėgo 5 m ilgesnį kelią. Prie dresiruotojo, stovinčio jų starto vietoje, pirmas ponis pribėgo praėjus 9 s po susitikimo su antruoju, o antras ponis — praėjus 16 s po jų susitikimo. Koks arenos skersmuo?

13.128. Virš vietovės A sraigtasparnis buvo 8 h 30 min. Tiesiai nuskridęs s km, jis atsidūrė virš vietovės B. Išbuvęs ore 5 min, sraigtasparnis sugrįžo ta pačia trasa. Į vietovę A jis atskrido 10 h 35 min. Iš A į B sraigtasparnis skrido pavėjui, o atgal — prieš vėją. Vėjas visą laiką pūtė pastoviu greičiu. Sraigtasparnio savasis greitis taip pat buvo pastovus ir lygus v km/h. Apskaičiuokite vėjo greitį. Kaip turi būti susiję nurodyti dydžiai, kad uždavinys turėtų sprendinį?

13.129. 9 h iš vietovės A savaeigė barža išplaukė prieš srovę į vietovę B; atvykusi į B, ji 2 h stovėjo, po to leidosi atgal ir tą pačią dieną 19 h 20 min, atplaukė į A. Upės tėkmės vidutinis greitis lygus 3 km/h, o baržos greitis visą laiką buvo pastovus. Atstumas tarp A ir B lygus 60 km. Kada barža atplaukė į vietovę B?

13.130. Berniukas valtimi nuplaukė ir grįžo išilgai upės kranto. Iš viso jis nuplaukė 10 km. Kelionė truko 5 h. Berniukas apskaičiavo, kad 2 km prieš srovę jis plaukė tiek laiko, kiek 3 km — pasroviui. Apskaičiuokite upės tėkmės greitį, plaukimo pasroviui laiką ir plaukimo prieš srovę laiką.

13.131. Upeivis, tikrindamas upės ruožą, irkline valtimi prieš srovę nuplaukė 12,5 km, po to ta pačia trasa grįžo į pradinę vietą. Kiekvienus 3 km prieš srovę ir kiekvienus 5 km pasroviui jis nuplaukė vidutiniškai per vienodą laiko tarpą, o iš viso kelyje užtruko lygiai 8 h. Apskaičiuokite upės tėkmės greitį ir laiką, kurio prireikė upeiviui nuplaukti prieš srovę.

13.132. Skystis patenka į laboratorinio įrenginio indą pro tris čiaupus. Visus čiaupus atsukus tuo pačiu metu, indas prisipildo per 6 min. Atsukę tik antrą čiaupą, indą pripildytume per 0,75 laiko, reikalingo indui pripildyti pro vieną pirmą čiaupą. Trečiu čiaupu indas pripildomas 10 min ilgiau negu tik antruoju. Per kiek laiko kiekvienu čiaupu atskirai pripildomas indas?

13.133. Plaukimo baseine įrengti trys įvairaus skersmens vamzdžiai, kuriais vanduo tolygiai išteka iš baseino. Kai vienas iš vamzdžių uždarytas, pro pirmą ir antrą vamzdį kartu vanduo išbėga iš pilno baseino per a min, pro pirmą ir trečią vamzdį —

per b min, o pro antrą ir trečią vamzdį — per c min. Per kiek laiko pilnas baseinas ištuštėja leidžiant vandenį kiekvienu vamzdžiu atskirai?

13.134. Pagal programą dvejos staklės per a h turi apdoroti vienodą kiekį detalių. Pirmos staklės užduotį įvykdė. Antrosios buvo ne visiškai tvarkingos, veikė su pertrūkiais, todėl per tą patį laiką apdorojo n detalių mažiau negu pirmos staklės. Antrosios staklės vieną detalę apdoroja vidutiniškai b min ilgiau negu pirmosios. Kiek detalių apdoroja kiekvienos staklės?

13.135. Šaltkalvių brigada gali atlikti tam tikrą užduotį 15 h greičiau negu mokinių brigada. Jeigu mokinių brigada dirbtų 18 h, po to dar 6 h tą užduotį vykdytų šaltkalvių brigada, tai būtų atlikta tik 0,6 visos užduoties. Kiek laiko reikia mokinių brigadai savarankiškai atlikti nurodytą užduotį?

13.136. Iš prieplaukos pasroviui išplaukė plaustas. Po 5 h 20 min paskui jį iš tos pačios prieplaukos išvyko motorinė valtis. Nuplaukusi 20 km, ji pasivijo plaustą. Motorinės valties greitis 12 km/h didesnis už plausto greitį. Koks plausto greitis?

13.137. Trys skirtingos skaičiavimo mašinos atlieka tam tikrą darbą. Jeigu visą darbą patikėtume tik antrai arba tik pirmai mašinai, tai antra mašina dirbtų 2 min ilgiau negu pirmoji. Trečia mašina šį darbą atliktų per dvigubai ilgesnį laiką negu pirma mašina. Kadangi darbo dalys yra vieno tipo, tai visą darbą galima paskirstyti trims mašinoms. Veikdamos kartu, jos po 2 min 40 s užbaigs darbą tuo pačiu metu. Per kiek laiko tą darbą gali atlikti kiekviena mašina atskirai?

13.138. Per 7 dienas du darbininkai, dirbdami atskirai, ištapetavo keletą kambarių. Antrasis pradėjo klijuoti 1,5 dienos vėliau negu pirmasis. Jeigu tą patį darbą pavestume atskirai kiekvienam darbininkui, tai pirmasis jį užbaigtų 3 dienomis vėliau negu antrasis. Per kiek dienų kiekvienas darbininkas atskirai atliktų tą darbą?

13.139. Dviženklį skaičių padalijus iš jo skaitmenų sandaugos, gaunamas dalmuo $\frac{8}{3}$. Ieškomo skaičiaus ir skaičiaus, užrašyto tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, skirtumas lygus 18. Raskite tą dviženklį skaičių.

13.140. Vienomis staklėmis tam tikras kiekis detalių apdorojamas 3 dienomis ilgiau negu kitomis. Per kiek dienų šias detales apdorotų kiekvienos staklės atskirai, jeigu žinoma, kad abejomis staklėmis kartu per 20 dienų buvo apdorota tris kartus daugiau detalių?

13.141. Sugalvotas sveikasis skaičius. Jį reikėjo padidinti 200 000 vienetų ir gautą skaičių patrigubinti. Tačiau prie sugalvoto skaičiaus iš dešinės buvo prirašytas skaitmuo 2 ir gautas tas pats rezultatas. Koks skaičius buvo sugalvotas?

13.142. Į kubilą teka vanduo pro du čiaupus: A ir B. Čiaupu A kubilas pripildomas 22 min vėliau negu čiaupu B. Atsukus abu

19. Užsak. Nr. 1941.

čiaupus, kubilas prisipildo per 1 h. Per kiek laiko pripildys kubilą tekantis vanduo iš čiaupo A? iš čiaupo B?

13.143. Tam tikrą užduotį darbininkas A atlieka a dienų vėliau negu darbininkas B ir b dienų vėliau negu darbininkas C. Dirbdami kartu, A ir B numatytą darbą atliko per tiek pat dienų, kaip ir C. Per kiek laiko šią užduotį įvykdytų kiekvienas darbininkas atskirai? Kaip turi būti susiję nurodyti dydžiai, kad uždavinys turėtų sprendinį?

13.144. Visų lyginių dviženklių skaičių suma dalijasi iš vieno jų be liekanos. Gautas dalmuo skiriasi nuo daliklio tik skaitmenų rašymo tvarka, o jo skaitmenų suma lygi 9. Iš kurio dviženklio skaičiaus buvo dalijama?

13.145. Iš pradžių kateris nuplaukė a km upe pasroviui, po to — dvigubai ilgesnį atstumą ežeru, į kurį įteka upė. Visa kelionė truko 1 h. Upės tėkmės greitis lygus c km/h. Raskite katerio greitį ežere.

13.146. Pirmasis iš trijų skaičių didesnis už antrąjį tiek pat kartų, kiek kartų antrasis didesnis už trečiąjį. Jeigu iš pirmojo skaičiaus atimtume kitų dviejų sumą, tai gautume 2, o jeigu prie pirmojo skaičiaus pridėtume pusę antrojo ir trečiojo skaičių skirtumo, tai gautume 9. Raskite tuos tris skaičius.

13.147. Stačiakampio skardos lakšto ilgio ir pločio santykis lygus 2 : 1. Iš šio lakšto pagaminta atvira dėžutė. Tuo tikslu lakšto kampuose išpjauta po kvadratą, kurio kraštinė 3 cm, ir kraštai užlenkti. Dėžutės tūris 168 cm³. Raskite skardos lakšto matmenis.

13.148. Berniukas įrėmino 12×18 cm dydžio fotografiją. Visų rėmelių plotis vienodas, o plotas lygus fotografijos plotui. Apskaičiuokite rėmelių plotį.

13.149. Dviejų skaičių suma lygi 44. Mažesnysis skaičius yra neigiamas. Didesniojo ir mažesniojo skaičių skirtumo bei mažesniojo skaičiaus santykis, išreikštas procentais, sutampa su mažesniuoju skaičiumi. Raskite tuos du skaičius.

13.150. Matematikos uždavinyno rankraštyje buvo parašytas toks pratimas: duotąjį skaičių reikia padauginti iš 3 ir iš gauto rezultato atimti 4. Spaustuvininkai padarė klaidą: vietoj daugybos ženklo surinko dalybos ženklą, o vietoj minuso — pliusą. Tačiau dėl to pratimo atsakymas nesikeičia. Kokį pratimą buvo numatyta pateikti uždavinyne?

13.151. Katė ilgu koridoriumi vijosi pelę ir sugavo ją po a s. Pradinis atstumas tarp jų buvo lygus l m. Jeigu, esant tam pačiam pradiniam atstumui, išsigandusi pelė lėktų ne tolyn nuo katės, o priešais ją, tai katė ją sugautų po b s. Laikydami, kad abiem atvejais katė ir pelė stengėsi bėgti kiek galėdamos, raskite kiekvienos jų greitį.

13.152. Atrėžus aptverto stačiakampio sklypo dalį, jis pasidarė kvadratinis, jo plotas sumažėjo 400 m², o tvora sutrumpėjo 20 m. Raskite pradinius sklypo matmenis.

13.153. Sporto aikštelei paskirtas stačiakampis sklypas, kurio įstrižainė 185 m. Atliekant statybos darbus, kiekviena kraštinė buvo sutrumpinta 4 m, tačiau aikštelė liko stačiakampė. Jos plotas sumažėjo 1012 m². Kokie yra sporto aikštelės matmenys?

13.154. Už 1 kg vieno produkto ir 10 kg kito produkto sumokėta 2 rb. Jeigu pirmas produktas pabrangtų 15%, o antras atpigtų 25%, tai už tokį pat kiekį šių produktų tektų sumokėti 1 rb 82 kp. Kiek kainuoja 1 kg kiekvieno produkto?

13.155. Pirmą kelionės savaitę draugai išleido 6 rb mažiau negu $\frac{2}{5}$ visų pasiimtų pinigų; antrą savaitę — $\frac{1}{3}$ likusių pinigų ir dar 2 rb bilietams į teatrą; trečią savaitę — $\frac{3}{5}$ naujo likučio ir dar 3 rb 20 kp iškyloms jūra. Po to jiems liko 20 rb. Kiek pinigų išleista per tris kelionės savaites?

13.156. Motorinė valtis, kurios greitis 20 km/h, per 6 h 15 min upe nuplaukė iš vienos vietovės į kitą ir nedelsdama sugrįžo. Atstumas tarp vietovių lygus 60 km. Koks upės tėkmės greitis?

13.157. Jeigu dviženklį skaičių padalysime iš jo skaitmenų sandaugos, tai dalmuo bus lygus $\frac{16}{3}$, o jeigu iš to skaičiaus atimsime 9, tai skirtumas bus irgi dviženklis skaičius, kuris skirsis nuo ieškomo skaičiaus tik skaitmenų tvarka. Raskite tą dviženklį skaičių.

13.158. Į kioską atvežta I rūšies obuolių už 22 rb 80 kp ir II rūšies obuolių už 18 rb. II rūšies obuolių gauta 5 kg daugiau negu I rūšies. Iškraunami obuoliai susimaišė. Apskaičiavus paaiškėjo: visus obuolius pardavus ta pačia kaina, 9 kp žemesne už I rūšies obuolių 1 kg kainą, bus gauta numatyta suma. Kiek kilogramų obuolių atvežta į kioską?

13.159. Trys instituto katedros pateikė paraiškas laboratoriniams įrenginiams įsigyti. Pirmos katedros prašomų įrenginių kaina sudaro 45% antros katedros pageidaujamų įrenginių kainos, o antros katedros paraiškoje nurodytų įrenginių kaina sudaro 80% trečios katedros norimų įsigyti įrenginių kainos. Trečios katedros paraiškoje išvardytų įrenginių kaina 640 rb didesnė negu pirmos katedros prašomų įrenginių kainos. Kokia yra visų trijų katedrų paraiškose išvardytų įrenginių kaina?

13.160. Dviženklį skaičių padalijus iš jo skaitmenų sumos, gaunamas dalmuo 4 ir liekana 3. Tą skaičių padalijus iš jo skaitmenų sandaugos, gaunamas dalmuo 3 ir liekana 5. Raskite tą skaičių.

13.161. 1 t krovinių pervežimas iš vietovės M į vietovę N geležinkeliu atsieina b kp brangiau negu upe. Kiek tonų krovinių galima pervežti iš M į N geležinkeliu už a rb, jeigu už tą pačią sumą upe galima pervežti k t krovinių daugiau negu geležinkeliu?

13.162. Už tam tikrą kiekį vienos prekės rudenį buvo sumokėta 810 rb. Kilogramas šios prekės rudenį kainuoja 10 kp pigiau negu pavasarį, todėl už 810 rb pavasarį nupirkta 90 kg tos prekės mažiau. Kiek kainuoja 1 kg tos prekės pavasarį ir kiek kilogramų jos buvo nupirkta rudenį?

13.163. Iš dviejų sklypų prikulta po 210 cnt kviečių. Pirmo sklypo plotas 0,5 ha mažesnis negu antrojo. Iš pirmo sklypo 1 ha prikulta 1 cnt kviečių daugiau negu iš antro sklypo vieno hektaro. Kiek centnerių kviečių prikulta iš kiekvieno sklypo 1 ha?

13.164. Pirmojo tomo 60 egzempliorių ir antrojo tomo 75 egzemplioriai kainuoja 270 rb. Iš tikrųjų už visas šias knygas buvo sumokėta tik 237 rb, nes pirmieji tomai parduoti su 15% nuolaida, o antrieji — su 10% nuolaida. Apskaičiuokite pradinę šių knygų kainą.

13.165. Stiklinės taros supirktuvė priėmė 140 dvejopos talpos stiklainių. Vieno didelio stiklainio talpa 2,5 l didesnė už mažo. Ir didelių, ir mažų stiklainių bendra talpa lygi 60 l. Kiek buvo didelių stiklainių ir kiek — mažų?

13.166. Mokinys turėjo apskaičiuoti skaičiaus 136 ir dviženklio skaičiaus, kurio vienetų skaitmuo dvigubai didesnis už dešimčių skaitmenį, sandaugą. Išsiblaškęs jis sukeitė vietomis dviženklio skaičiaus skaitmenis, todėl gavo sandaugą, 1224 vienetais didesnę už tikrąją. Kam lygi tikroji sandauga?

13.167. Motorinė valtis ir jachta plaukia ežeru viena priešais kitą. Nuotolis tarp jų 30 km. Po 1 h jos susitinka. Jei motorinė valtis būtų nutolusi nuo jachtos 20 km ir plauktų iš paskos, tai jachtą pasivytų po 3 h 20 min. Kokiu greičiu plaukia valtis ir kokiu — jachta?

13.168. Vienaženklis skaičius buvo padidintas 10 vienetų. Jeigu gautą skaičių padidintume tiek pat procentų, kiek vienaženklį, tai gautume 72. Raskite pradinį skaičių.

13.169. Stebint dviejų kristalų augimą, nustatyta, kad pirmojo masė per 3 mėn. padidėjo tiek pat, kiek antrojo per 7 mėn. Metų pabaigoje paaiškėjo, kad pirmojo kristalo pradinė masė padidėjo 4%, o antrojo — 5%. Raskite tų kristalų pradinių masių santykį.

13.170. Viena traktorininkų brigada suarė 240 ha, o kita — 35% daugiau negu pirmoji. Kasdien pirma brigada suardavo 3 ha mažiau negu antroji, bet užbaigė darbą 2 dienomis anksčiau. Kiek hektarų suardavo kiekviena brigada per darbo dieną, jeigu žinoma, kad abi brigados 20 ha viršydavo numatytą dienos užduotį?

13.171. Šeimoje yra tėvas, motina ir trys dukterys; visiems kartu 90 metų. Mergaičių amžiaus skirtumas — 2 metai. Motinos amžius 10 metų didesnis už dukterų amžių sumą. Tėvo ir motinos amžių skirtumas lygus viduriniosios dukters amžiui. Kiek metų turi kiekvienas šeimos narys?

13.172. Du indai su druskos tirpalu pastatyti garinti. Kasdien iš indo išgaruoja tas pats kiekis druskos. Iš pirmo indo gauta 48 kg druskos, o iš antro, stovėjusio 6 dienomis trumpiau,— 27 kg. Jeigu pirmas indas stovėtų tiek pat dienų, kiek antras, o antras — tiek pat dienų, kiek pirmas, tai iš abiejų tirpalų susidarytų vienodas kiekis druskos. Kiek dienų stovėjo kiekvienas tirpalas?

13.173. Jeigu nežinomą dviženklį skaičių padalysime iš skaičiaus, užrašyto tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, tai gausime dalmenį 4 ir liekaną 3. Ieškomą skaičių padaliję iš jo skaitmenų sumos, gausime dalmenį 8 ir liekaną 7. Raskite tą skaičių.

13.174. Keturiose dėžėse supiltos arbatžolės. Iš kiekvienos dėžės išėmus po 9 kg arbatžolių, visose dėžėse jų liktų tiek, kiek buvo kiekvienoje atskirai. Po kiek arbatžolių buvo supilta dėžėse?

13.175. Kateris ir plaustas tuo pačiu metu išplaukė iš prieplaukos pasroviui. Nuplaukęs $\frac{40}{3}$ km, kateris apsisuko ir ėmė plaukti prieš srovę. Įveikęs $\frac{28}{3}$ km, kateris susitiko su plaustu. Upės tėkmės greitis lygus 4 km/h. Koks katerio greitis stovinčiame vandenyje?

13.176. Trijų cisternų bendra talpa lygi 1620 l. Dvi cisternos pripiltos žibalo, o trečia — tuščia. Norint ją pripildyti, reikia supilti visą pirmoje cisternoje esantį žibalą ir $\frac{1}{5}$ antros cisternos žibalo arba visą antroje cisternoje esantį žibalą ir $\frac{1}{3}$ pirmos cisternos žibalo. Raskite kiekvienos cisternos talpą.

13.177. Įmonė numatė per kelis mėnesius pagaminti 6000 siurblių. Patobulinusi kai kuriuos įrengimus, ji kas mėnesį ėmė gaminti 70 siurblių daugiau negu buvo numatyta. Todėl, likus mėnesiui iki termino, ji buvo įvykdžiusi užduotį ir pagaminusi 30 siurblių daugiau. Per kiek mėnesių buvo numatyta pagaminti 6000 siurblių?

13.178. Du parkai, kurių bendras plotas 110 ha, suskirstyti į vienodą kiekį dalių. Kiekvieno parko dalių plotai tarpusavyje lygūs, tačiau skiriasi nuo kito parko dalių plotų. Jeigu pirmas parkas būtų padalytas į tokio pat ploto dalis, kaip antrasis, tai jį sudarytų 75 dalys, o jeigu antras parkas būtų padalytas į tokio pat ploto dalis, kaip pirmasis, tai jį sudarytų 108 dalys. Apskaičiuokite kiekvieno parko plotą.

13.179. Tėvas padalijo 36 obuolius penkiems vaikams. Pusę obuolių jis atidavė sūnums, kurie pasidalijo juos po lygiai, kitą pusę obuolių — dukterims, kurios taip pat pasidalijo juos po lygiai. Kiekviena duktė gavo 3 obuoliais daugiau negu kiekvienas sūnus. Kiek sūnų ir kiek dukterų turėjo tėvas?

13.180. Viena iš dviejų trupmenų dvigubai didesnė už kitą. Kiekvieną trupmeną pakėlus kvadratu ir sudėjus rezultatus, gaunama ta pati suma, kaip ir pakėlus kiekvieną trupmeną kubu bei sudėjus rezultatus. Raskite trupmenas.

13.181. Darbininkų brigada per pamainą turėjo pagaminti 7200 detalių, visi darbininkai — po vienodą kiekį. Tačiau trys darbininkai susirgo ir kiekvienam iš likusiųjų, kad įvykdytų visą užduotį, teko pagaminti 400 detalių daugiau. Kiek darbininkų buvo brigadoje?

13.182. Į du vienodos masės indus pripilta vandens. Indo A su vandeniu masė sudaro $\frac{4}{5}$ indo B su vandeniu masės. Jeigu vandenį iš indo B perpiltume į indą A, tai jo su vandeniu masė būtų 8 kartus didesnė už indo B masę. Yra žinoma, kad inde B yra 50 g vandens daugiau negu inde A. Raskite indų masę ir vandens kiekį juose.

13.183. Klubo salėje eilėmis buvo sustatyta 500 kėdžių, kiekvienoje eilėje po lygiai. Po rekonstrukcijos kiekvienoje eilėje tilpo 5 kėdėmis daugiau, o salėje — 5 eilėmis mažiau negu buvo. Dėl to bendras vietų skaičius salėje sumažėjo $\frac{1}{10}$ ankstesnio kėdžių skaičiaus. Kiek eilių iš pradžių buvo salėje ir kiek kėdžių kiekvienoje eilėje?

13.184. Jeigu mokinys teisingai sudaugintų du lentoje užrašytus skaičius, tai gautų 4500. Bet vieną jų nusirašė nuo lentos klaidingai: vietoj paskutinio skaitmens 5 parašė skaitmenį 3 ir sudauginęs gavo 4380. Kuriuos skaičius turėjo sudauginti mokinys?

13.185. Išbandžius du variklius, paaiškėjo, kad pirmasis sunaudojo 300 g, o antrasis — 192 g benzino, nors antrasis veikė 2 h trumpiau negu pirmasis. Pirmas variklis per valandą sunaudoja 6 g benzino daugiau negu antrasis. Kiek benzino per valandą sunaudoja kiekvienas variklis?

13.186. Mūrininkų brigada apsiėmė išmūryti 432 m^3 mūrinį, tačiau į darbą atėjo 4 žmonėmis mažiau. Kiek mūrininkų yra brigadoje, jeigu žinoma, kad kiekvienam dirbusiam mūrininkui teko išmūryti 9 m^3 daugiau negu buvo numatyta iš pradžių?

13.187. Darbininkų brigada per tam tikrą laiką turėjo pagaminti 8000 vienodų detalių. Faktiškai darbas buvo užbaigtas 8 dienomis anksčiau, nes brigada kasdien pagamindavo 50 detalių daugiau negu buvo numatyta. Per kiek laiko turėjo būti atliktas darbas ir kiek procentų kasdien buvo viršijama užduotis?

13.188. Vieną detalę darbininkas A šlifuoja k min trumpiau negu darbininkas B. Kiek detalių nušlifuoja kiekvienas jų per t h, jeigu per šį laiką darbininkas nušlifuoja n detalių daugiau negu darbininkas B?

13.189. Lygties $x^2-3ax+a^2=0$ šaknų kvadratų suma lygi 1,75. Raskite a reikšmę.

13.190. Gabalas platinos, kurios tankis $2{,}15 \cdot 10^4$ kg/m^3, surištas su kamščiamedžio gabalu (tankis $24 \cdot 10^2$ kg/m^3). Sistemos tankis lygus $48 \cdot 10^2$ kg/m^3. Platinos gabalo masė 86,94 g. Kokia medžio gabalo masė?

13.191. Materialųjį tašką veikia dvi jėgos, sudarančios 30° kampą. Vienos jėgos modulis $7\sqrt{3}$ kartų didesnis už kitos, o atstojamosios jėgos modulis 24 N didesnis negu mažesnės jėgos modulis. Apskaičiuokite mažesnės jėgos ir atstojamosios jėgos modulius.

13.192. Trijuose induose — nevienodas kiekis skysčio. Kad visuose būtų po lygiai, skystį teko perpilti tris kartus: iš pradžių $\frac{1}{3}$ jo perpilta iš pirmo indo į antrą, tada $\frac{1}{4}$ skysčio, esančio antrame inde,— į trečią indą ir pagaliau $\frac{1}{10}$ skysčio, esančio trečiame inde,— į pirmą indą. Po to kiekviename inde buvo 9 l skysčio. Kiek skysčio iš pradžių buvo kiekviename inde?

13.193. Per mokomąsias pratybas žvalgomasis kateris priplaukė prie eskadros priekinio laivo ir gavo įsakymą išžvalgyti jūrą priešais eskadrą jos plaukimo kryptimi 70 km atstumu. Katerio greitis 28 km/h, o eskadros 14 km/h. Per kiek laiko kateris grįš prie plaukiančios į priekį eskadros priekinio laivo?

13.194. Judančio modelio priekinis ratas, nuvažiuodamas 120 km, apsisuka 6 apsisukimais daugiau negu užpakalinis. Jeigu priekinio rato apskritimą pailgintume $\frac{1}{4}$ jo ilgio, tai tame pačiame kelyje priekinis ratas apsisuktų 4 apsisukimais daugiau negu užpakalinis. Raskite priekinio ir užpakalinio rato apskritimų ilgius.

13.195. Monterių brigada galėtų sutvarkyti elektros instaliaciją 4 h dienos, jeigu kas valandą nutiestų 8 m laido. Kai pusė visos užduoties buvo atlikta, vienas darbininkas išvyko; dėl to brigada ėmė tiesti kas valandą 6 m ir užbaigė darbą 6 h vakaro. Kiek metrų laido buvo nutiesta ir per kiek valandų?

13.196. Iš fabriko į stotį išvyko sunkvežimis su kroviniu. Po dviejų valandų kelionės vairuotojas pažvelgė į spidometrą ir pamatė, kad nuvažiavo tik 112 km. Jis mintyse sumetė: jeigu ir toliau važiuos tuo pačiu greičiu, tai 30 min pavėluos nuvežti krovinį. Todėl padidino greitį ir atvyko į stotį net 30 min anksčiau. Atstumas nuo fabriko iki stoties lygus 280 km. Apskaičiuokite automobilio pradinį ir vėlesnį greitį.

13.197. Kino salėje yra dvejos durys — plačios ir siauros. Pro abejas duris po seanso žiūrovai išeina iš salės per 3 min 45 s. Vien tik pro plačiąsias duris jie išeitų 4 min greičiau negu vien tik pro siaurąsias. Per kiek laiko žiūrovai išeitų iš salės pro kiekvienas duris atskirai?

13.198. Nuo drėgmės padidėja medžiagos masė. Kad sugertų 1400 kg drėgmės, reikia nesusmulkintos medžiagos paimti 300 kg daugiau negu susmulkintos. Kiek procentų medžiagos masės sudaro sugertos drėgmės masė, kai medžiaga susmulkinta ir kai nesusmulkinta, jeigu antruoju atveju šis skaičius procentų yra 105 vienetais mažesnis negu pirmuoju atveju?

13.199. Iš kaimo į lauką važiuojančio sunkvežimio ratas apsisuka 100 apsisukimų mažiau negu dviračio ratas ir 150 apsisukimų daugiau negu traktoriaus vikšras. Sunkvežimio rato apskritimo ilgis lygus $\frac{4}{3}$ dviračio rato apskritimo ilgio ir 2 m mažesnis už traktoriaus vikšro ilgį. Apskaičiuokite atstumą nuo kaimo iki lauko.

13.200. Aukcione pardavus du kailiukus už 225 rb, gauta 40% pelno. Už kiek parduotas kiekvienas kailiukas, jeigu pirmasis davė 25%, o antrasis — 50% pelno?

13.201. Stačiakampės sporto aikštelės ilgis b m didesnis už plotį. Palei aikštelės kraštus eina vienodo pločio a m takas. Sporto aikštelės plotas lygus to tako plotui. Kokie yra aikštelės matmenys?

13.202. Dvi mašininkės turi perrašyti rankraštį, sudarytą iš trijų skyrių, kurių pirmasis dvigubai trumpesnis už antrąjį ir trigubai ilgesnis už trečiąjį. Dirbdamos kartu, mašininkės perrašė pirmąjį skyrių per 3 h 36 min. Antrasis skyrius buvo perrašytas per 8 h, iš kurių 2 h dirbo tik pirma mašininkė, o likusį laiką — abi kartu. Per kiek laiko antra mašininkė perrašytų trečiąjį skyrių?

13.203. Atstumas tarp miestelio ir kaimo lygus 10 km. Du žmonės tuo pačiu metu išėjo iš miestelio į kaimą. Pirmasis keliavo 3 km/h didesniu greičiu negu antrasis ir atvyko į kaimą 3 h anksčiau. Kokiu greičiu ėjo kiekvienas žmogus?

13.204. Du darbininkai, dirbdami kartu, atlieka tam tikrą darbą per 8 h. Pirmas darbininkas šį darbą galėtų atlikti 12 h greičiau negu antrasis. Per kiek valandų atliktų tą darbą kiekvienas darbininkas atskirai?

13.205. Dviženklį skaičių padalijus iš jo skaitmenų sumos, gaunamas dalmuo 3 ir liekana 7. Jeigu iš to dviženklio skaičiaus skaitmenų kvadratų sumos atimtume tų pačių skaitmenų sandaugą, tai gautume pradinį skaičių. Raskite tą skaičių.

13.206. Triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 2. Jeigu šį skaitmenį perkeltume į skaičiaus pradžią, tai gautas skaičius būtų 18 vienetų didesnis už pradinį. Raskite tą skaičių.

13.207. Iš Maskvos į Sankt Peterburgą ekspresas nuvažiuoja 3 h 30 min greičiau negu keleivinis traukinys, nes jo greitis 35 km/h didesnis. Atstumą tarp Maskvos ir Sankt Peterburgo laikykite lygiu 650 km. Kiek kilometrų per valandą nuvažiuoja kiekvienas traukinys?

13.208. Dviženklis skaičius 4 kartus didesnis už jo skaitmenų sumą ir 3 kartus didesnis už tų skaitmenų sandaugą. Raskite tą skaičių.

13.209. Du kūnai tuo pačiu metu pradėjo judėti vienas prieš kitą. Pradinis atstumas tarp jų buvo lygus 100 m. Vienas kūnas kas sekundę pajuda į priekį 7 m, kitas pirmąją minutę — 24 m, o kiekvieną vėlesnę minutę — 4 m mažiau negu ankstesnę. Po kiek minučių abu kūnai susitiks?

13.210. Kiek procentų reikia pailginti skritulio spindulį, kad skritulio plotas padidėtų 96%?

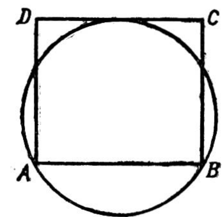
B grupė

13.211. Lentoje parašyto triženklio skaičiaus skaitmenys sudaro geometrinę progresiją. Jeigu jo šimtų ir vienetų skaitmenis sukeisime vietomis, tai naujas triženklis skaičius bus 594 vienetais mažesnis už parašytąjį. O jeigu parašyto skaičiaus šimtų skaitmenį nubrauksime ir gauto dviženklio skaičiaus skaitmenis sukeisime vietomis, tai naujas dviženklis skaičius bus 18 vienetų mažesnis už skaičių, išreikštą paskutiniais dviem parašyto skaičiaus skaitmenimis. Raskite lentoje parašytą skaičių.

13.212. Dviračiams pirkti sporto klubas paskyrė n rb. Tačiau paaiškėjo, kad kiekvienas dviratis kainuoja a rb mažiau, todėl nupirkta b dviračių daugiau negu buvo numatyta. Kiek dviračių nupirkta? Ištirkite sprendinį.

13.213. Paprastai vieną užduotį atlieka vienu metu du įrenginiai. Jų našumas nevienodas. Kartu veikdami, jie atlieka užduotį per 30 h. Tačiau šį kartą abu įrenginiai kartu veikė tik 6 h, po to pirmasis buvo sustabdytas ir visą likusį darbą per 40 h atliko antras įrenginys. Per kiek laiko šią užduotį gali atlikti atskirai kiekvienas įrenginys?

13.214. Iš vielos išlankstytas apskritimas ir stačiakampis. Jie sujungti taip: apskritimas eina per dvi stačiakampio viršūnes — A ir B — ir liečia kraštinę CD (13.5 pav.). Stačiakampio perimetras 4 kartus didesnis už apskritimo spindulį. Raskite stačiakampio kraštinių santykį.



13.5 pav.

13.215. Iš vietovės A plentu pastoviu a km/h greičiu išbėgo lenktynininkas. Po 30 min iš tos pačios vietovės pastoviu $1{,}25a$ km/h greičiu pasileido antras lenktynininkas. Kiek praėjo minučių nuo pirmo lenktynininko starto iki to laiko, kai iš tos pačios vietovės buvo išsiųstas trečias lenktynininkas, jeigu žinoma, kad jis bėgo $1{,}5a$ km/h greičiu ir kartu su antruoju lenktynininku pasivijo pirmąjį?

13.216. Iš vietovių A ir B vienas priešais kitą tuo pačiu metu išvažiavo du motociklininkai. Atstumas tarp vietovių lygus 600 km. Per tą patį laiką pirmasis nuvažiavo 250 km, antrasis — 200 km. Pirmasis motociklininkas atvyko į vietovę B 3 h anksčiau negu antrasis į vietovę A. Laikydami motociklininkų judėjimą tolyginiu, apskaičiuokite kiekvieno jų greitį.

13.217. Kelias tarp gyvenviečių A ir B iš pradžių kyla įkalnėn, po to leidžiasi nuokalne. Atstumas tarp gyvenviečių lygus b km. Dviratininkas nuokalne važiavo a km/h didesniu greičiu negu įkalne. Kelyje iš A į B užtruko lygiai t h, o grįždamas — pusę to laiko. Raskite dviratininko greitį įkalnėje ir nuokalnėje.

13.218. Sudauginęs du teigiamuosius skaičius, mokinys suabejojo gautos sandaugos teisingumu. Norėdamas patikrinti, jis sumanė rezultatą padalyti iš didesnio dauginamojo. Gavo dalmenį 17 ir liekaną 8. Tada mokiniui paaiškėjo, kad gautos sandaugos dešimčių skaitmuo 6 vienetais didesnis už tikrąjį. Kuriuos skaičius daugino mokinys, jeigu žinoma, kad jų skirtumas lygus 36?

13.219. Miesto gyventojų skaičius kasmet padidėja $\frac{1}{50}$ esamo gyventojų skaičiaus. Per kiek metų gyventojų skaičius padidės trigubai?

13.220. Petras išėjo į geležinkelio stotį, esančią už 10,5 km nuo jo namų. Po pusvalandžio iš tų pačių namų tuo pačiu keliu iškeliavo jo brolis. Eidamas 4 km/h greičiu, jis pasivijo Petrą, perdavė jam jo užmirštą daiktą ir tuoj pat pasuko atgal tuo pačiu greičiu. Yra žinoma, kad visą kelią Petras ėjo tolygiai, o jo brolis grįžo namo tuo momentu, kai Petras pasiekė stotį. Kokiu greičiu ėjo Petras?

13.221. Iš vietovių A ir C į vietovę B tuo pačiu metu išjojo du raiteliai. Nors atstumas nuo C iki B 20 km didesnis negu nuo A iki B, tačiau raiteliai atvyko į vietovę B kartu. Iš vietovės C išvykęs raitelis kiekvieną kilometrą nujodavo 1 min 15 s greičiau negu išjojęs iš vietovės A raitelis, kuris atvyko į vietovę B po 5 h. Raskite atstumą tarp vietovių C ir B.

13.222. Atstumas tarp stočių A ir B lygus 103 km. Iš A į B išvyko traukinys. Nuvažiavęs tam tikrą atstumą, jis turėjo sustoti, todėl likusią kelio dalį iki B judėjo 4 km/h didesniu greičiu. Iki stoties B traukiniui liko nuvažiuoti 23 km ilgesnį kelią negu buvo nuvažiavęs iki sustojimo. Po sustojimo traukinys riedėjo 15 min ilgiau negu iki sustojimo. Raskite pradinį traukinio greitį.

13.223. Vietovės A, B ir C yra ant upės kranto. Vietovė C yra žemiau negu vietovė B. Atstumas tarp jų 12 km. Vietovė A yra aukščiau negu vietovė B. Iš vietovės A į vietovę C žvejys valtele nuplaukė per 4 h. Grįždamas jis užtruko 6 h. Kitą kartą žvejys iš A išplaukė motorine valtimi, kurios greitis stovinčiame vandenyje 3 kartus didesnis už valtelės greitį, ir atvyko į B po 45 min. Raskite upės tėkmės greitį, laikydami, kad jis pastovus.

13.224. Jaunuolis dviračiu grįžo iš atostogų. Nuvažiavęs 246 km, jis apskaičiavo, kad šioje kelionėje užtruko viena diena ilgiau negu pusė likusių atostogų dienų. Kad spėtų laiku grįžti į namus, iki kurių dar 276 km, jaunuolis gali pasielgti dvejopai: arba kasdien nuvažiuoti h km daugiau negu iš pradžių, arba kasdien nuvažiuoti tokį pat kelią, kaip ir anksčiau, ir tik vieną kartą — paskutinę kelionės dieną — viršyti dienos kelią $2h$ km. Prieš kiek dienų iki atostogų pabaigos jaunuolis išvažiavo į namus, jeigu žinoma, kad ieškomas dienų skaičius yra sveikasis?

13.225. Atlikdama tam tikrą užsakymą, pirma dirbtuvė dirba 3,6 h ilgiau negu antra ir 10 h ilgiau negu trečia. Jeigu tomis pačiomis sąlygomis pirma ir antra dirbtuvė vykdytų užsakymą kartu, tai jį atliktų per tokį pat laiką, kaip ir trečia dirbtuvė. Kiek valandų ilgiau ar trumpiau, palyginti su septynių valandų darbo diena, dirba trečia dirbtuvė vykdydama užsakymą?

13.226. Dvi mašininkės turi perrašyti 80 puslapių rankraštį. Jeigu pirma mašininkė pradės rašyti 3 h vėliau negu antroji, tai kiekviena jų perrašys pusę rankraščio. Jeigu abi mašininkės pradės darbą kartu, tai po 5 h liks neperrašyta 15 puslapių. Per kiek laiko visą rankraštį gali perrašyti kiekviena mašininkė atskirai?

13.227. Dviem darbininkams pavesta atlikti tam tikrą užduotį. Antrasis pradėjo dirbti 1 h vėliau už pirmąjį. Praėjus 3 h po to, kai pirmasis ėmėsi darbo, abiem liko atlikti $\frac{9}{20}$ visos užduoties. Baigus darbą, paaiškėjo, kad kiekvienas darbininkas atliko pusę visos užduoties. Per kiek valandų šią užduotį gali padaryti kiekvienas darbininkas dirbdamas atskirai?

13.228. Dviem darbininkams pavesta pagaminti seriją detalių. Kai pirmasis buvo dirbęs 2 h, o antrasis — 5 h, paaiškėjo, kad abu jie atliko pusę viso darbo. Kartu padirbėję dar 3 h, jie nustatė, jog liko nepadaryta 0,05 viso darbo. Per kiek laiko kiekvienas jų, dirbdamas atskirai, gali pagaminti visas detales?

13.229. Keturi skaičiai sudaro proporciją. Kraštinių narių suma 14, vidurinių narių 11, o tų keturių skaičių kvadratų suma 221. Raskite tuos skaičius.

13.230. Trys teigiamieji dviženkliai skaičiai turi tokią savybę: kiekvienas lygus jį sudarančių skaitmenų sumos nepilnajam kvadratui. Raskite du iš šių skaičių; yra žinoma, kad antras skaičius 50 vienetų didesnis už pirmąjį.

13.231. Lydytojas gavo dviejų rūšių ketų. Chromo procentai jose nevienodi. Jeigu vienos rūšies ketaus jis paims 5 kartus daugiau negu kitos, tai chromo procentai lydinyje du kartus viršys chromo procentus mažesnėje sulydomų dalių. O jeigu jis paims vienodą kiekį abiejų rūšių ketaus, tai lydinyje bus 8% chromo. Kiek procentų chromo yra kiekvienos rūšies ketuje?

13.232. Nuo autobusų stoties iki paplūdimio yra 4,5 km. Tuo pačiu metu iš stoties į paplūdimį išėjo berniukas ir išvažiavo maršrutinis autobusas. Po 15 min berniukas sutiko iš paplūdimio

grįžtantį autobusą. Kai berniukas nutolo $\frac{9}{28}$ km nuo susitikimo vietos, jį pasivijo autobusas, spėjęs nuvykti į stotį ir vėl važiuojantis į paplūdimį. Berniuko ir autobuso greitis buvo pastovus, berniukas kelyje nebuvo sustojęs, o autobusas stovėjo po 4 min tik prie paplūdimio ir stotyje. Kokiu greičiu ėjo berniukas ir kokiu važiavo autobusas?

13.233. Turistas po atostogų grįžo namo dviračiu. Pirmąją kelio dalį — 246 km ir antrąją — 276 km jis nuvažiavo nevienodu greičiu: pirmąją kasdien nukeliaudamas 15 km mažiau negu antrąją. Į namus turistas atvyko laiku — baigiantis paskutinei atostogų dienai. Pirmoje kelio dalyje turistas užtruko viena diena ilgiau negu pusė likusių dienų iki atostogų pabaigos. Prieš kiek dienų iki atostogų pabaigos turistas išvažiavo į namus?

13.234. Dviejuose vario lydiniuose yra nevienodas procentas vario. Skaičius, išreiškiantis vario kiekį procentais pirmame lydinyje, 40 kartų mažesnis už skaičių, išreiškiantį vario kiekį procentais antrame lydinyje. Sulydžius abu lydinius, vario kiekis pasidarė lygus 36%. Pirmame lydinyje buvo 6 kg vario, o antrame — 12 kg. Apskaičiuokite, kiek procentų vario buvo kiekviename lydinyje.

13.235. Du automobiliai ir motociklas turėjo nuvažiuoti tą patį kelio ruožą. Antras automobilis jį nuvažiavo 1 min greičiau negu pirmasis. Pirmas automobilis važiavo 4 kartus greičiau negu motociklas. Antras automobilis per minutę nuvažiuodavo $\frac{1}{6}$ šio kelio daugiau negu motociklas, o motociklas užtruko kelyje mažiau negu 10 min. Kurią kelio ruožo dalį per minutę nuvažiuodavo antras automobilis?

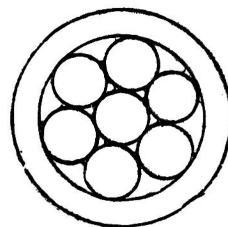
13.236. Didmeistris vienu metu žaidė daug partijų. Per pirmąsias dvi valandas jis laimėjo 10% visų žaistų partijų, o 8 partijas sužaidė lygiomis. Per kitas dvi valandas didmeistris laimėjo 10% likusių partijų, 2 partijas pralaimėjo, o paskutines 7 partijas sužaidė lygiomis. Kiek partijų vienu metu žaidė didmeistris?

13.237. Mokinys sugalvojo sveiką teigiamą skaičių. Prie jo iš dešinės prirašė tam tikrą skaitmenį. Iš gauto skaičiaus atėmė sugalvoto skaičiaus kvadratą. Gavo skirtumą, 8 kartus didesnį už sugalvotą skaičių. Kurį skaičių sugalvojo ir kurį skaitmenį jo dešinėje parašė mokinys?

13.238. Tire berniukui buvo pasakyta: „Už kiekvieną pataikymą gausi 5 žetonus, o prašovęs pro šalį turėsi grąžinti 3 žetonus". Berniukas buvo ne itin taiklus. Iššovęs paskutinį (n-tąjį) kartą, jis neturėjo nė vieno žetono. Kiek kartų berniukas šovė ir kiek buvo taiklių šūvių, jeigu $10<n<20$?

13.239. Prie tam tikro sugalvoto dviženklio skaičiaus iš dešinės buvo prirašytas tas pats skaičius ir iš gauto skaičiaus atimtas sugalvoto skaičiaus kvadratas. Po to skirtumas padalytas iš 4% sugalvoto skaičiaus kvadrato; gautas dalmuo, lygus pusei sugalvoto skaičiaus, o liekana — sugalvotam skaičiui. Kuris skaičius sugalvotas?

13.240. Į žiedą, kurį sudaro du koncentriniai apskritimai, įdėti septyni lygūs susiliečiantys diskai (13.6 pav.). Žiedo plotas lygus visų septynių diskų plotų sumai. Įrodykite, kad žiedo plotis lygus vieno disko spinduliui.


13.6 pav.

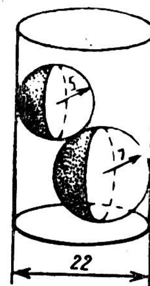
13.241. Prie sugalvoto teigiamojo skaičiaus iš dešinės buvo prirašytas teigiamas vienaženklis skaičius ir iš gauto skaičiaus atimtas sugalvoto skaičiaus kvadratas. Gautas skirtumas didesnis už sugalvotą skaičių tiek kartų, koks yra prirašyto skaičiaus papildinys iki 11. Įrodykite, kad šitaip rezultatas gaunamas tada ir tik tada, kai prirašomas skaičius lygus sugalvotam skaičiui.

13.242. Į du vienodus baseinus tuo pačiu metu pradedamas leisti vanduo. Į pirmą baseiną kas valandą pribėga 30 m³ vandens daugiau negu į antrąjį. Tam tikru momentu abiejuose baseinuose buvo tiek vandens, kiek jo telpa viename baseine. Paskui po 2 h 40 min prisipildė pirmas baseinas, o dar po 3 h 20 min — antrasis. Kiek vandens kas valandą pribėgdavo į kiekvieną baseiną?

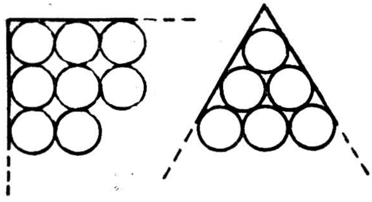
13.243. Viena statinė pilna vandens, o kitos dvi tuščios. Jeigu antrą statinę pripildytume semdami vandenį iš pirmos, tai pirmoje liktų $\frac{1}{4}$ joje buvusio vandens. Jeigu po to trečią statinę pripildytume semdami vandenį iš antros, tai antroje liktų $\frac{2}{9}$ joje buvusio vandens. Jeigu pagaliau trečioje statinėje esantį vandenį supiltume į pirmą tuščią statinę, tai ji būtų pilna tik supylus dar 50 kibirų vandens. Apskaičiuokite kiekvienos statinės talpą.

13.244. Du rutuliukai įdėti į ritinio formos indą, kurio skersmuo 22 cm (13.7 pav.). Rutuliukų skersmuo 10 cm ir 14 cm. Po to į indą buvo supilta 5 l vandens. Ar jis apsems rutuliukus?

13.245. Per 5 h cisterna buvo pripildyta vandens. Per pirmąsias keturias valandas į cisterną pribėgo vandens dvigubai daugiau negu per paskutines keturias valandas. Per pirmąsias dvi valandas į cisterną buvo prileista 48 m³ vandens. Į cisterną pritekančio vandens kiekis kiekvieną valandą sumažėdavo tiek pat kartų, kiek ir ankstesnę valandą. Koks cisternos tūris?



13.7 pav.


13.8 pav.

13.246. Kvadrate ir lygiakraščiame trikampyje išdėliotas vienodas kiekis lygių skritulių, kurie liečia vienas kitą ir šių figūrų kraštines. Palei trikampio kraštinę išsitenka 14 skritulių daugiau negu palei kvadrato kraštinę (13.8 pav.). Kiek iš viso skritulių išdėliota šiose figūrose?

13.247. Iš 5% riebumo pieno pagaminus varškę, kurios riebumas 15,5%, lieka 0,5% riebumo išrūgų. Kiek varškės gaunama iš 1 t to pieno?

13.248. Yra dvi vienodos skirtingų audinių atraižos. Pirmos atraižos kaina 12,6 rb didesnė už antrosios. Keturi metrai pirmos atraižos audinio kainuoja 13,5 rb brangiau negu trys metrai antros atraižos audinio. Moteris nusipirko 3 m pirmos atraižos audinio bei 4 m antros atraižos audinio ir už viską sumokėjo 38 rb 25 kp. Kiek metrų audinio buvo kiekvienoje atraižoje? Kiek kainuoja vienas metras kiekvieno audinio?

13.249. Premiją numatyta padalyti po lygiai geriausiai dirbusiems brigados nariams. Tačiau paaiškėjo, kad jos vertų yra 3 žmonėmis daugiau negu numatyta. Tokiu atveju kiekvienas jų gautų 4 rb mažiau. Bet bendra premijai skirta suma buvo padidinta 90 rb ir kiekvienas brigados narys gavo 25 rb. Kiek žmonių premijuota?

13.250. Medkirčių brigada per keletą dienų turėjo paruošti 216 m³ medienos. Pirmąsias tris dienas ji įvykdydavo numatytą normą, po to kasdien ją viršydavo 8 m³, todėl viena diena anksčiau numatyto termino paruošė 232 m³ medienos. Kiek kubinių metrų medienos brigada buvo numačiusi paruošti per dieną?

13.251. Vidurnaktį valandinė bei minutinė laikrodžio rodyklė sutampa ir prasideda nauja diena. Kurią naujos dienos valandą tolygiai judančios abi rodyklės pirmą kartą sutaps?

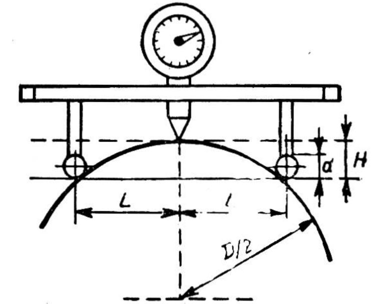
13.252. Per 24 s žmogus nulipo judančio metro eskalatoriaus laiptais iš viršutinės aikštelės į apatinę. Po to jis užlipo ir tuo pačiu tempu nulipo jau nejudančio eskalatoriaus laiptais. Antrą kartą jis nulipo per 42 s. Per kiek sekundžių žmogus nusileistų judančio eskalatoriaus laiptais stovėdamas ant laiptelio?

13.253. Hidrodinaminiams bandymams pagamintas nedidelis kanalo modelis. Prie jo prijungta keletas vienokių to paties skerspjūvio vamzdžių vandeniui įleisti ir keletas kitokių vienodo skerspjūvio vamzdžių vandeniui išleisti. Jeigu iš karto atidarytume keturis įleidimo ir tris išleidimo vamzdžius, tai po 5 h kanale būtų 1000 m³ vandens. Jeigu dviem valandoms tuo pačiu metu atidarytume du įleidimo ir du išleidimo vamzdžius, tai vandens tūris kanale padidėtų 180 m³. Kiek vandens per valandą prateka vienu įleidimo vamzdžiu ir vienu išleidimo vamzdžiu?

13.254. Turistas A išvyko iš turistinės bazės numatytu maršrutu. Po 45 min paskui jį išvažiavo turistas B. Ketindamas pavyti turistą A, kurio greitis v_1 km/h, turistas B važiavo v_2 km/h ($v_2>v_1$) greičiu. Po kiek minučių, skaičiuojant nuo turisto A išvykimo, turi išvažiuoti turistas C, kad kartu su turistu B pasivytų turistą A, jeigu žinoma, kad turistas C važiuos v_3 km/h ($v_3>v_2$) greičiu?

13.255. Trys plaukikai turi nuplaukti 50 m ilgio baseino takeliu, tučtuojau apsisukti ir grįžti į starto vietą. Iš pradžių startuoja pirmas plaukikas, po 5 s — antras, dar po 5 s — trečias. Dar nepasiekę takelio galo, vienu momentu plaukikai būna per vienodą atstumą nuo starto vietos. Trečias plaukikas, nuplaukęs iki takelio galo ir pasukęs atgal, sutinka antrą plaukiką per 4 m nuo takelio galo, o pirmą — per 7 m nuo takelio galo. Apskaičiuokite trečio plaukiko greitį.

13.256. Prietaisas didelės detalės ($D>2$ m) skersmeniui nustatyti parodo, kokia yra nuopjovos aukštinė H, kai atstumas $2L$ tarp prietaiso atraminių rutuliukų centrų pastovus (13.9 pav.). Reikia formule išreikšti detalės ieškomo skersmens D ir matuojamos jos nuopjovos aukštinės H sąryšį, kai L ir d pastovūs; čia d — kiekvieno atraminio rutuliuko skersmuo.



13.9 pav.

13.257. Kurjeris mopedu išvyko iš miesto A į miestą B, tarp kurių atstumas 120 km. Po 1 h iš miesto A motociklu 50 km/h greičiu išvažiavo antras kurjeris, kuris, pavijęs pirmąjį ir perdavęs jam laišką, tuo pačiu greičiu bemat pasuko atgal ir grįžo į miestą A tuo momentu, kai pirmas kurjeris atvyko į miestą B. Koks pirmo kurjerio greitis?

13.258. Traukinys važiuoja nuo stoties A iki stoties B. Kelio ruožas netoli stoties B remontuojamas, todėl čia traukiniui leidžiama važiuoti greičiu, kuris sudaro $\frac{1}{n}$ pradinio greičio. Dėl šios priežasties traukinys atvyko į stotį B pavėlavęs a h. Kitą dieną remonto darbai b km priartėjo prie stoties B ir tomis pačiomis sąlygomis traukinys pavėlavo tik c h. Raskite traukinio greitį.

13.259. Išplaukęs iš prieplaukos A, garlaivis po 2 h sustojo ir po 1 h vėl tęsė kelionę greičiu, kuris lygus 0,8 pradinio greičio, todėl 3,5 h pavėlavo atplaukti į prieplauką B. Jeigu garlai-

vis būtų sustojęs 180 km toliau, tai tomis pačiomis sąlygomis būtų pavėlavęs 1,5 h. Raskite atstumą tarp prieplaukų A ir B.

13.260. Dvi materialiosios dalelės, nutolusios viena nuo kitos per 295 m, tuo pačiu metu pradeda artėti viena prie kitos. Pirma dalelė juda tolygiai 15 m/s greičiu, antra dalelė pirmąją sekundę nueina 1 m, o kiekvieną sekančią sekundę — 3 m daugiau negu ankstesnę. Kokiu kampu pasisuks sekundinė laikrodžio rodyklė per laiką, praėjusį nuo dalelių judėjimo pradžios iki jų susitikimo?

13.261. Vidurdienį iš vietovės A į vietovę B išvyko pėsčiasis ir dviratininkas, o iš B į A — raitelis. Po 2 h dviratininkas ir raitelis susitiko 3 km atstumu nuo pusiaukelės tarp vietovių A ir B, o dar po 48 min susitiko pėsčiasis ir raitelis. Pėsčiasis ėjo dvigubai lėčiau negu važiavo dviratininkas. Nustatykite kiekvieno jų greitį ir atstumą tarp vietovių A ir B.

13.262. Laisvai krintantis kūnas pirmąją sekundę įveikia 4,9 m, o kiekvieną sekančią sekundę — 9,8 m daugiau negu ankstesnę. Sakykime, iš to paties aukščio buvo paleistas vienas kūnas ir po 5 s — kitas. Po kiek laiko jie bus nutolę vienas nuo kito 220,5 m?

13.263. Nuo stoties A iki stoties B keleivinis traukinys nuvažiuoja 3 h 12 min greičiau negu prekinis. Per tą laiką, kol prekinis traukinys nuvyksta iš A į B, keleivinis traukinys nuvažiuoja 288 km ilgesnį kelią. Jeigu kiekvieno jų greitį padidintume 10 km/h, tai keleivinis traukinys iš A į B nuvažiuotų 2 h 24 min greičiau negu prekinis. Nustatykite atstumą nuo stoties A iki stoties B.

13.264. Per tiek pat laiko paprastu liftu galima pakilti į aštuntą daugiaaukščio namo aukštą (33 m aukštį), du kartus sustojant 6 sekundėms, ir aukštuminio pastato liftu į 20-ąjį aukštą (81 m aukštį), vieną kartą sustojant 7 sekundėms. Aukštuminio pastato lifto keliamasis greitis 1,5 m/s didesnis už paprasto lifto, bet nesiekia 5 m/s. Raskite aukštuminio pastato lifto greitį.

13.265. Materialusis taškas juda tiese 60° kampo vidine dalimi. Išėjęs iš to kampo viršūnės, jis po tam tikro laiko atsiduria per atstumą a nuo vienos kampo kraštinės ir per atstumą b nuo kitos kraštinės. Po to taškas pakeičia judėjimo kryptį ir trumpiausiu keliu paprasčiausiai nukrinta ant artimesnės jam kraštinės. Raskite taško nueito kelio ilgį, jeigu $a<b$.

13.266. Du sportininkai išbėga tuo pačiu metu — pirmasis iš A į B, antrasis iš B į A. Jie bėga nevienodu, bet pastoviu greičiu ir susitinka 300 m nuo A. Nubėgęs takeliu AB iki galo, kiekvienas sportininkas beregint pasuka atgal ir sutinka kitą sportininką 400 m nuo B. Raskite AB ilgį.

13.267. Iš tos pačios vietos ta pačia kryptimi vienu metu išvyko motociklais du lenktynininkai: vienas 80 km/h greičiu, kitas 60 km/h greičiu. Po pusvalandžio iš tos pačios vietos ta pačia kryptimi išvažiavo trečias lenktynininkas. Jis pasivijo pirmą lenktynininką 1 h 15 min vėliau negu antrąjį. Apskaičiuokite trečio motociklininko greitį.

13.268. Sportininkas šauna į taikinį, esantį už d m. Stebėtojas, stovintis per a m nuo šaulio ir per b m nuo taikinio, vienu metu girdi šūvio garsą ir kulkos smūgio į taikinį garsą. Garso greitis lygus v m/s. Raskite kulkos greitį.

13.269. Prieplaukoje iš garlaivio išlipo du keleiviai ir pasuko į tą pačią gyvenvietę. Vienas jų pirmąją kelio pusę ėjo 5 km/h greičiu, o antrąją — 4 km/h greičiu. Antras keleivis pirmąją pusę laiko ėjo 5 km/h greičiu, o antrąją — 4 km/h greičiu ir atėjo į gyvenvietę 1 min anksčiau negu pirmas keleivis. Per kiek laiko kiekvienas jų nuėjo visą kelią ir koks atstumas nuo prieplaukos iki gyvenvietės?

13.270. Į uostą turi atplaukti vienas motorlaivis, o po 1 h — kitas. Abu jie plaukia vienodu greičiu. Paaiškėjo, kad pirmas vėluotų atplaukti t_1 min, o antras — t_2 min. Iš uosto gavę nurodymą atvykti laiku, abu kapitonai tuo pačiu metu padidino greitį: pirmasis — didumu v_1 km/h, antrasis — didumu v_2 km/h. Dėl to abu motorlaiviai atvyko į uostą tiksliai pagal tvarkaraštį. Kokiu greičiu motorlaiviai plaukė iki gauto nurodymo?

13.271. Dviratininkų varžybų trasa — statusis trikampis, kurio statinių skirtumas 2 km. Trikampio įžambinė eina lauko keliu, o abu statiniai — plentu. Vienas dviratininkas lauko kelio atkarpą nuvažiavo 30 km/h greičiu, o abi plento atkarpas — per tą patį laiką, kaip ir lauko keliu, 42 km/h greičiu. Nustatykite trasos ilgį.

13.272. Automobilis išvyko iš centrinio pašto A į pašto skyrių B. Po 20 min 60 km/h greičiu paskui jį išvažiavo motociklininkas. Pasivijęs automobilį, motociklininkas perdavė jo vairuotojui paketą ir bematant pasuko atgal. Automobilis atvažiavo į B tuo momentu, kai motociklininkas buvo pusiaukelėje tarp susitikimo su automobiliu vietos ir A. Atstumas nuo A iki B lygus 82,5 km. Raskite automobilio greitį.

13.273. Kamuolys rieda statmenai futbolo aikštės šoninei linijai. Sakykime, kad, tolygiai lėtėdamas, jis pirmąją sekundę nuriedės 4 m, o sekančią sekundę — 0,75 m mažiau. Futbolininkas, esantis per 10 m nuo kamuolio, pradėjo jį vytis. Tolygiai greitėdamas, futbolininkas pirmąją sekundę nubėgo 3,5 m, o sekančią sekundę — 0,5 m daugiau. Per kiek laiko futbolininkas pasivys kamuolį ir ar suspės jį pasivyti, kol šis neišriedės už šoninės linijos, jeigu iki jos futbolininkui reikia nubėgti 23 m?

13.274. Pagal grafiką 120 km tarpustotę traukinys važiuoja vienodu greičiu. Vakar pusę šio kelio jis važiavo tuo pačiu greičiu, bet buvo priverstas 5 min stovėti. Kad laiku atvyktų į stotį, antrąją kelio pusę mašinistas nuvažiavo 10 km/h didesniu greičiu. Šiandien tos pačios tarpustotės pusiaukelėje traukinys stovėjo 9 min. Kokiu greičiu antrąją kelio pusę nuvažiavo traukinys, jeigu į stotį jis vėl atvyko pagal tvarkaraštį?

20. Užsak. Nr. 1941.

13.275. Atstumas nuo miesto A iki stoties F geležinkeliu lygus 185 km. Priemiestinis elektrinis traukinys pirmuosius 40 km iš A važiuoja įkalne, po to 105 km — lygia vietove ir paskutinius 40 km — vėl įkalne. Įkalnėn traukinys kyla 10 km/h lėčiau negu rieda lygia vietove. Šiame kelyje 20 km, 70 km, 100 km ir 161 km atstumu nuo A yra stotys B, C, D ir E. Kiekvienoje jų traukinys stovi 3 min. Kada traukinys atvyko į B, C, D ir E, jeigu žinoma, kad iš A jis išvyko 8 h, o į F atvažiavo tą pačią dieną 10 h 22 min?

13.276. Geležinkelio stotis B yra 28 km toliau nuo gamyklos C negu to paties geležinkelio stotis A. Atstumas nuo A iki B per C 2 km ilgesnis negu nuotolis tarp A ir B geležinkeliu. 1 t krovinių pervežimas plentu iš C į A kainuoja 90 kp, o geležinkeliu iš A į B — 2 rb. 1 t krovinių pervežimas 1 km atstumu sunkvežimiu atsieina 3,5 kp brangiau negu traukiniu. Nustatykite atstumus nuo A iki C, nuo B iki C, nuo A iki B.

13.277. Mokomasis lėktuvas skrido 220 km/h greičiu. Kai liko nuskristi 385 km mažiau negu buvo nuskridęs, lėktuvas padidino greitį iki 330 km/h. Vidutinis jo greitis buvo 250 km/h. Kokį atstumą nuskrido lėktuvas?

13.278. Traukinio keleivis žino, jog šiame kelio ruože traukinio greitis lygus 40 km/h. Kai tik pro langą pasimatė priešpriešiais važiuojantis 75 m ilgio traukinys, keleivis įjungė sekundometrą. Priešpriešinis traukinys pravažiavo per 3 s. Raskite jo greitį.

13.279. Du kontrolės punktai slidžių trasą dalija į tris vienodo ilgio ruožus. Pirmą ir antrą ruožą slidininkas nušliuožia vidutiniu a m/min greičiu; antrą ir trečią ruožą — vidutiniu b m/min greičiu. Slidininko vidutinis greitis antrame ruože buvo toks pat, kaip vidutinis greitis pirmame bei trečiame ruože. Kokiu greičiu slidininkas šliuožė visa trasa ir kiekvienu ruožu atskirai? Išanalizuokite, kada realiai egzistuoja uždavinio sprendinys.

13.280. Siekdamas įvertinti slidininko pasiruošimą varžyboms, treneris suskirstė trasą į tris vienodo ilgio ruožus. Paaiškėjo, kad slidininko vidutinis greitis atskiruose ruožuose nevienodas. Pirmą ir antrą ruožą jis nušliuožė per 40,5 min, o antrą ir trečią — per 37,5 min. Be to, žinoma, kad slidininko vidutinis greitis antrame ruože buvo toks pat, kaip ir vidutinis greitis pirmame bei trečiame ruože. Per kiek laiko slidininkas nušliuožė visą trasą?

13.281. Iš tos pačios vietos ta pačia kryptimi tuo pačiu metu išvyko du dviratininkai. Po 10 min iš tos pačios vietos paskui juos išvažiavo trečias dviratininkas. Iš pradžių jis aplenkė pirmą dviratininką, po to važiavo dar 20 min, kol pasivijo antrą dviratininką. Nuo starto vietos iki finišo kiekvienas dviratininkas važiavo pastoviu greičiu: a km/h pirmas dviratininkas ir b km/h — antras dviratininkas. Apskaičiuokite trečio dviratininko greitį.

13.282. Keleivis per tam tikrą laiką turi atvykti iš vietovės A į vietovę B. Atstumas nuo A iki B lygus s km. Nusigavęs iki vietovės C, esančios tiksliai pusiaukelėje tarp A ir B, jis apskaičiavo, kad, toliau eidamas tuo pačiu greičiu, pavėluos 2 h. Jeigu vietovėje C keleivis ilsėsis 1 h, o likusią kelio dalį nueis v km/h didesniu greičiu, tai atvyks į B nustatytu laiku. Per kiek laiko keleivis turėjo atvykti iš vietovės A į vietovę B?

13.283. Atstumas tarp dviejų vietovių 28 km. Iš jų tuo pačiu metu vienas priešais kitą išėjo du keleiviai. Jeigu pirmas keleivis, nuėjęs 9 km, nebūtų sustojęs pailsėti 1 h, tai abu būtų susitikę pusiaukelėje. Po sustojimo pirmas keleivis padidino greitį 1 km/h ir susitiko antrąjį per 4 km nuo poilsio vietos. Kokiu greičiu ėjo pirmas keleivis, kokiu — antrasis?

13.284. Per 7 s vienodu pastoviu greičiu traukinys pravažiavo pro nejudantį stebėtoją ir per 25 s — išilgai 378 m ilgio platformos. Apskaičiuokite traukinio greitį ir ilgį.

13.285. 10 km ilgio plento ruože, kuriame nėra sankryžų, autobusas sustoja tik tada, kai reikia įleisti arba išleisti keleivius. Iš viso jis stabteli 6 kartus po 1 min, o visą laiką važiuoja tuo pačiu greičiu. Be sustojimų visą šį kelią jis nuvažiuotų 5 km/h didesniu greičiu negu vidutinis viso kelio su sustojimais greitis. Kiek minučių autobusas važiuotų šiuo plento ruožu be sustojimų?

13.286. Škuna plaukia ežeru iš A į B, po to upe prieš srovę iš B į C ir tuo pačiu keliu grįžta. Škunos greitis stovinčiame vandenyje visą laiką lygus c km/h. Iš A į C ji plaukia α h, o atgal — β h, be to, iš C į B nuplaukia tris kartus greičiau negu iš B į A. Raskite atstumą nuo A iki B ir nuo B iki C.

13.287. Du pieno kombinato cechai turi perdirbti tam tikrą kiekį litrų pieno, abu po lygiai. Antras cechas pradėjo vykdyti užduotį a darbo dienų vėliau, bet kasdien perdirbdavo m l pieno daugiau negu pirmas cechas. Praėjo dar $\frac{5a}{9}$ darbo dienų nuo tų cechų bendro darbo pradžios ir liko neįvykdyta $\frac{1}{3}$ visos užduoties. Kiek darbo dienų reikėjo užduočiai atlikti, jeigu ji buvo užbaigta kartu ir kiekvienas cechas perdirbo pusę numatyto skaičiaus litrų pieno?

13.288. Meistrui ir jo mokiniui pavesta pagaminti siuntą vienodų detalių. Meistras dirbo 7 h, o mokinys — 4 h. Paaiškėjo, kad jie atliko $\frac{5}{9}$ viso darbo. Padirbėję kartu dar 4 h, jie nustatė, kad liko atlikti $\frac{1}{18}$ visos užduoties. Per kiek laiko visas detales pagamintų vienas mokinys?

13.289. Du lydinius sudaro cinkas, varis ir alavas. Pirmame lydinyje yra 40% alavo, o antrame — 26% vario. Cinko kiekis procentais pirmame ir antrame lydinyje vienodas. Sulydžius 150 kg pirmo lydinio ir 250 kg antro lydinio, gautas naujas lydinys, kuriame yra 30% cinko. Kiek alavo yra naujame lydinyje?

13.290. Vienu metu atidarius du vamzdžius, baseinas prisipildo per 2 h 24 min. Tačiau pirmiausia buvo paleistas vanduo tik

pirmuoju vamzdžiu. Jis veikė $\frac{1}{4}$ laiko, per kurį baseiną pripildytų antras vamzdis. Po to $\frac{1}{4}$ laiko, per kurį baseiną pripildytų pirmas vamzdis, veikė antras vamzdis. Tada paaiškėjo, kad nepripildyta $\frac{11}{24}$ viso baseino. Per kiek laiko kiekvienas vamzdis gali pripildyti baseiną?

13.291. Jeigu keletą rankraščių tektų surinkti vienam iš trijų spaustuvės rinkėjų, tai pirmasis užbaigtų darbą 10 h anksčiau, o trečiasis — 6 h anksčiau negu antrasis. Jeigu vieną iš užsakytų rankraščių rinktų pirmas rinkėjas, o kitą tuo pačiu metu — antrasis, tai per 9 h jie surinktų tiek puslapių, kiek per 10 h surenka antras ir trečias rinkėjas dirbdami tomis pačiomis sąlygomis kartu. Per kiek laiko visus užsakytus rankraščius surinktų kiekvienas rinkėjas atskirai?

13.292. Dvi nevienodos galios žemkasės, dirbdamos tuo pačiu metu iš abiejų tunelio galų, galėtų iškasti tunelį per 5 dienas. Iš tikrųjų abi kasė tunelį iš vienos pusės viena po kitos. Pirma kasė $\frac{1}{3}$, o antra — likusias $\frac{2}{3}$ jo ilgio. Visą darbą jos atliko per 10 dienų. Per kiek dienų galėtų iškasti tunelį kiekviena žemkasė dirbdama atskirai?

13.293. Baseine įrengti du nevienodo skerspjūvio vamzdžiai. Vienu vanduo tolygiai įteka, kitu — tolygiai išteka. Baseinui pripildyti pirmu vamzdžiu reikia 2 h daugiau negu antruoju jis ištekа. Kai buvo pripildyta $\frac{1}{3}$ baseino, atidaryti abu vamzdžiai. Po 8 h baseinas buvo tuščias. Per kiek valandų, veikdami atskirai, pirmas vamzdis pripildo baseiną, o antras — jį ištuština?

13.294. Dviem darbininkams pavesta pagaminti tam tikrą kiekį vienodų detalių. Pirmasis dirbo a h, o antrasis — $0{,}6a$ h. Po to paaiškėjo, kad jie atliko $\frac{5}{n}$ visos užduoties. Kartu padirbėję dar $0{,}6a$ h, jie apskaičiavo, jog liko pagaminti $\frac{1}{n}$ visų detalių. Per kiek valandų kiekvienas jų, dirbdamas atskirai, atliktų visą užduotį? Skaičius n — natūralusis; raskite jį.

13.295. Vandens telkinys turi du kanalus. Pirmuoju vanduo tolygiai išteka, antruoju — tolygiai įteka. Antruoju kanalu įteka vandens du kartus daugiau, kai jis būna atviras a h mažiau už tą laiką, per kurį pirmuoju išteka n l vandens. Abu kanalus atidarius tuo pačiu metu, kas valandą į telkinį priteka a l vandens. Per kiek valandų pirmuoju kanalu išteka n l vandens?

13.296. Du ekskavatorininkai turi atlikti tam tikrą užduotį. Pirmasis jų dirbo 15 h, po to pradėjo dirbti antrasis, kuris po 10 h užbaigė darbą. Jeigu, dirbdami atskirai, pirmasis atliktų $\frac{1}{6}$, o antrasis — $\frac{1}{4}$ visos užduoties, tai jai užbaigti prireiktų dar 7 h jų bendro darbo. Per kiek valandų gali atlikti šį darbą kiekvienas ekskavatorininkas atskirai?

13.297. Hipodromo tako apskritimo ilgis lygus b km. Pirmą kartą du jojikai A ir B pradėjo lenktyniauti kartu, bet A pasiekė finišą 2 min anksčiau. Kitą kartą jojikas B padidino greitį c km/h, o jojikas A jį sumažino c km/h. Todėl B pasiekė finišą 2 min anksčiau negu A. Kokiu greičiu jojikai lenktyniavo pirmą kartą?

13.298. Du sportininkai bėga tuo pačiu uždaru stadiono taku. Kiekvieno jų greitis pastovus. Pirmas sportininkas visą taką nubėga 10 s greičiau negu antras. Jeigu jie kartu startuos iš tos pačios vietos ir bėgs viena kryptimi, tai dar kartą susitiks po 720 s. Kurią viso tako ilgio dalį kiekvienas sportininkas įveikia per sekundę?

13.299. Dviem koncentriniais apskritimais tolygiai skrieja du taškai. Vienas jų apskrieja vieną ratą 5 s greičiau negu kitas, todėl per minutę spėja apskrieti 2 ratais daugiau. Sakykime, kad pradinė taškų padėtis tokia: spinduliai, nubrėžti iš apskritimo centro į juos, sutampa. Apskaičiuokite, kokio didumo kampą jie sudarys po 1 s.

13.300. Mažesnysis lankas tarp apskritimo taškų A ir B lygus 150 m. Tuo pačiu metu vienas priešais kitą pradėję judėti mažesniuoju lanku taškai susitiks po 10 s, o didesniuoju lanku — po 14 s. Kol taškas A apibėga visą apskritimą, taškas B įveikia tik 90 m. Raskite kiekvieno taško greitį ir apskritimo ilgį.

13.301. Trys nevienodo skersmens krumpliaračiai susiję tarpusavyje taip: didžiausias jų liečia abu mažesnius, visi trys krumpliaračiai turi 60 krumplių. Kai besisukančiam ketvirtą kartą didžiausiam krumpliaračiui lieka pasisukti per 20 krumplių, antras ir trečias krumpliaratis būna apsisukę atitinkamai 5 ir 10 kartų. Kiek krumplių turi kiekvienas krumpliaratis?

13.302. Du taškai juda tolygiai 60 m ilgio apskritimu viena kryptimi. Vienas taškas apibėga vieną ratą 5 s greičiau negu kitas. Kas minutę vienas taškas pasiveja kitą. Raskite kiekvieno taško greitį.

13.303. Du ratai sujungti begaliniu diržu; mažesnysis jų per minutę apsisuka 300 kartų daugiau negu didesnysis. Didesnysis ratas apsisuka 10 kartų per 1 s ilgesnį laiko tarpą negu mažesnysis ratas. Kiek kartų per minutę apsisuka kiekvienas ratas?

13.304. Du sukibę krumpliaračiai A ir B tvirtai užmauti ant velenų: pirmasis — ant veleno O_1, antrasis — ant veleno O_2. Krumpliaratis A turi 10 krumplių daugiau negu krumpliaratis B. Velenui O_1 sukantis tam tikru greičiu, velenas O_2 per minutę apsisuka 63 kartus. Jeigu krumpliaračius sukeistume vietomis, tai, esant tam pačiam veleno O_1 greičiui, velenas O_2 per minutę apsisuktų 28 kartus. Kiek krumplių turi kiekvienas krumpliaratis?

13.305. Skaičiai A ir B yra dviženkliai. Jeigu skaičių A parašysime skaičiaus B priekyje ir gautą keturženklį skaičių padalysime iš skaičiaus B, tai gausime dalmenį 121. O jeigu skaičių B parašysime skaičiaus A priekyje ir gautą keturženklį skaičių padalysime iš A, tai gausime dalmenį 84 ir liekaną 14. Raskite dviženklius skaičius A ir B.

13.306. Iš stoties išvykęs traukinys po 2 h sustojo ir stovėjo 30 min. Kelio ruožas iki galinės stoties buvo remontuojamas, ir traukinys galėjo važiuoti greičiu, sudarančiu $\frac{1}{3}$ pradinio greičio, todėl atvyko į galinę stotį 1 h 10 min pavėlavęs. Kitą dieną traukinys sustojo 14 km arčiau galinės stoties ir tomis pačiomis sąlygomis pavėlavo 50 min. Raskite atstumą tarp stočių ir traukinio greitį.

13.307. Triženklio skaičiaus skaitmenys sudaro geometrinę progresiją. Tą skaičių sumažinus 495 vienetais, gaunamas skaičius, kurio skaitmenys tokie pat kaip ir duotojo, bet užrašyti atvirkščia tvarka; jeigu to skaičiaus skaitmenis sumažinsime (iš kairės į dešinę) atitinkamai 1, 1 ir 2 vienetais, tai gausime aritmetinę progresiją. Raskite tą triženklį skaičių.

13.308. Kuris dviženklis skaičius 11 vienetų mažesnis už jo skaitmenų kvadratų sumą ir 5 vienetais didesnis už jo skaitmenų dvigubą sandaugą?

13.309. Yra du aukso ir sidabro lydiniai. Vieno lydinio šių metalų kiekio santykis lygus 1 : 2, o kito — 2 : 3. Kiek gramų kiekvieno lydinio reikia paimti norint gauti 19 g naujo lydinio, kuriame aukso ir sidabro kiekio santykis būtų lygus 7 : 12?

13.310. Vienas plieno laužas turi 5% nikelio, kitas — 40%. Kiek reikia paimti kiekvienos rūšies laužo norint gauti 140 t plieno, turinčio 30% nikelio?

13.311. Iš dviejų vietovių, nutolusių viena nuo kitos 2400 km, tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvyksta keleivinis ir greitasis traukiniai. Kiekvienas jų važiuoja pastoviu greičiu, ir tam tikru laiko momentu abu traukiniai susitinka. Jeigu abudu važiuotų greitojo traukinio greičiu, tai susitiktų 3 h anksčiau, o jeigu keleivinio traukinio greičiu, tai 5 h vėliau negu iš tikrųjų. Raskite kiekvieno traukinio greitį.

13.312. Iš pradžių 2 h baržą iškrovinėjo keturi vienodos galios kranai. Po to prie jų prisidėjo du mažesnės galios vienodi kranai. Visi jie baržą iškrovė per 3 h. Jeigu visi šie kranai pradėtų dirbti tuo pačiu metu, tai barža būtų iškrauta per 4,5 h. Per kiek laiko iškrautų baržą vienas mažesnės galios kranas ir vienas didesnės galios kranas dirbdami kartu?

13.313. Trupmenos vardiklis 1 vienetu mažesnis už jos skaitiklio kvadratą. Jeigu prie skaitiklio ir vardiklio pridėsime po 2, tai trupmenos reikšmė bus didesnė už $\frac{1}{4}$; jeigu iš pradinės trupmenos skaitiklio ir vardiklio atimsime po 3, tai trupmenos reikšmė bus lygi $\frac{1}{12}$. Raskite tą trupmeną.

13.314. Krumpliaračiai A ir B yra sukabinti. Krumpliaratis A turi 12 krumplių, o krumpliaratis B — 54. Kiek kartų būna apsisukęs kiekvienas krumpliaratis, kai jie sukimba kaip iš pradžių?

13.315. Produkcijos vieneto pradinė savikaina buvo lygi 50 rb. Pirmaisiais gamybos metais ji padidėjo tam tikrą skaičių procentų, o antraisiais metais tiek pat procentų sumažėjo (padidėjusios savikainos atžvilgiu). Po to ji buvo lygi 48 rb. Kiek procentų padidėjo, po to kiek procentų sumažėjo produkcijos vieneto savikaina?

13.316. Kasmet įmonė tiek pat procentų padidindavo produkcijos gamybą. Per dvejus metus pagamintos produkcijos kiekis padidėjo dvigubai. Kiek procentų kasmet padidėjo gamyba?

13.317. Vienas priešais kitą išėjo du turistai: vienas — 6 valandą, o kitas — 7 valandą. 8 valandą jie susitiko ir nesustodami ėjo toliau. Pirmasis pasiekė tą vietą, iš kurios išėjo antrasis, 28 min vėliau negu antrasis atėjo į pirmojo išvykimo vietą. Kiekvienas jų ėjo nesustodamas pastoviu greičiu. Kiek laiko visame kelyje užtruko kiekvienas turistas?

13.318. Dviejų produktų pradinė kaina buvo vienoda. Vieno produkto kaina buvo sumažinta du kartus po 15%, kito — vieną kartą x%. Koks turi būti skaičius x, kad po sumažinimo abiejų produktų kaina vėl būtų vienoda?

13.319. 8 l talpos indas pripildytas deguonies ir azoto mišinio, deguonis užima 16% indo talpos. Iš šio indo buvo išleista dalis mišinio ir įleistas toks pat kiekis azoto. Po to vėl išleista tiek pat, kaip pirmą kartą, mišinio ir įleista tiek pat azoto. Dabar mišinyje yra 9% deguonies. Koks kiekis mišinio kiekvieną kartą buvo išleidžiamas iš indo?

13.320. Priemaišos sudaro 20% tirpalo tūrio. Kiekvienas filtras sugeria 80% priemaišų. Per kiek filtrų mažiausiai turi praeiti tirpalas, kad priemaišų kiekis jame būtų ne didesnis kaip 0,01%? (Yra žinoma, kad $\lg 2 \approx 0{,}30$.)

13.321. Dviejų triženklių skaičių, užrašytų tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, suma lygi 1252. Kiekvieno jų skaitmenų suma lygi 14, o skaitmenų kvadratų suma 84. Raskite tuos skaičius.

13.322. Perdirbdamos gėlių nektarą į medų, bitės pašalina daug vandens. Bandymai parodė, kad nektare paprastai yra apie 70% vandens, o iš jo gautame meduje — tik 17%. Kiek kilogramų nektaro turi perdirbti bitės, kad gautų 1 kg medaus?

13.323. Užmaišant duoną, įpilta tiek kilogramų miltų, kiek procentų sudaro duonos priekepis. Ruginių miltų suvartota 10 kg daugiau negu kvietinių. Iš viso iškepta 112,5 kg duonos. Kiek kilogramų paimta kiekvienos rūšies miltų?

13.324. Pirmąją atostogų savaitę inžinierius išleido keletu rublių mažiau negu $\frac{3}{5}$ visų pasiimtų pinigų; antrąją savaitę — $\frac{1}{4}$ likusių pinigų ir dar 3 rb; trečiąją savaitę — $\frac{2}{5}$ naujo likučio ir dar 1 rb 20 kp; po to jam liko $\frac{6}{35}$ pasiimtų pinigų. Pirmosios, antrosios ir trečiosios savaitės pabaigoje neišleistų pinigų kiekis mažėjo kaip aritmetinė progresija. Kiek pinigų inžinierius išleido per tris atostogų savaites?

13.325. Kelerios naujos vienodos staklės ir vienos senos staklės, dirbančios dvigubai lėčiau už naująsias stakles, pagamina 9000 detalių. Jei senąsias stakles pakeistume naujomis tos pačios konstrukcijos, kaip ir kitos, staklėmis, kiekvienoms staklėms tektų gaminti 200 detalių mažiau negu vienoms naujoms staklėms pirmuoju atveju. Kiek staklių buvo iš viso?

13.326. Iš vietovės A į vietovę B vienodais laiko tarpais išvažiuoja trys automobiliai. Į vietovę B visi jie atvyksta kartu, po to tuo pačiu metu išvažiuoja į vietovę C, esančią už 120 km nuo B. Pirmas automobilis atvyksta į C viena valanda vėliau negu antrasis. Trečias automobilis, atvažiavęs į C, tuoj pat pasuka atgal ir per 40 km nuo C susitinka pirmą automobilį. Raskite pirmo automobilio greitį, laikydami kiekvieno automobilio greitį visoje trasoje pastoviu.

13.327. Trijuose induose buvo 24 l skysčio. Pirmiausia iš pirmo indo į kitus du įpylė skysčio tiek, kiek buvo kiekviename jų. Po to iš antro indo į kitus du įpylė tiek, kiek buvo juose perpylus pirmą kartą. Pagaliau iš trečio indo į pirmą ir antrą įpylė skysčio tiek, kiek buvo kiekviename jų perpylus antrą kartą. Tada kiekviename inde buvo vienodas kiekis skysčio. Kiek skysčio buvo kiekviename inde iš pradžių?

13.328. Žvejų brigada numatė per tam tikrą laiką sugauti 1800 cnt žuvies. $\frac{1}{3}$ šio laiko truko audra, todėl kasdien buvo sugaunama 20 cnt žuvies mažiau negu numatyta. Tačiau per likusias dienas brigadai pavyko kasdien sugauti 20 cnt žuvies daugiau negu numatyta ir įvykdyti užduotį viena diena anksčiau. Kiek centnerių žuvies numatyta sugauti kas dieną?

13.329. Du sezoniniai darbininkai buvo priimti į darbą tokiam pačiam laikotarpiui. Jų darbo dienos užmokestis nevienodas. Pirmas dirbo a dienų mažiau negu buvo sutarta ir gavo r rb, o antras dirbo a dienų daugiau ir gavo s rb. Jeigu pirmas būtų dirbęs tiek dienų, kiek antras, o antras — tiek dienų, kiek pirmas, tai jie būtų uždirbę po lygiai. Kuriam laikotarpiui darbininkai buvo priimti į darbą?

13.330. Du krovininiai automobiliai per 6 h turėjo pervežti visą krovinį. Antras automobilis užtruko garaže. Kai jis atvyko į pakrovimo vietą, pirmas jau buvo pervežęs $\frac{3}{5}$ viso krovinio; likusią dalį krovinio pervežė antras automobilis. Taigi visas krovinys buvo pervežtas per 12 h. Per kiek laiko kiekvienas automobilis gali pervežti krovinį?

13.331. Iš metalo pagaminta vienodos masės guolių rutuliukų ir vienodos masės siurblių žiedų. Jeigu skaičius, išreiškiantis kiekvieno rutuliuko masę gramais, būtų 2 vienetais mažesnis už pagamintų žiedų skaičių, o skaičius, išreiškiantis kiekvieno žiedo masę gramais, 2 vienetais didesnis už pagamintų rutuliukų skaičių, tai skaičius, išreiškiantis jų bendrą masę, būtų 800 vienetų didesnis už dvigubą žiedų ir rutuliukų skaičių skirtumą. O jeigu skaičius, išreiškiantis kiekvieno daikto masę gramais, būtų lygus pagamintų tos pačios rūšies daiktų skaičiui, tai jų bendra masė būtų lygi 881 g. Kiek rutuliukų ir žiedų buvo pagaminta?

13.332. Trys berniukai A, B ir C susitarė, kad keliaudami kateriu kiekvienas jų galės būti kapitonu, o šių pareigų trukmė bus proporcinga skaičiui taškų, kuriuos jis gaus dalyvaudamas geografijos viktorinoje. Berniukas A gavo 3 taškais daugiau negu C; B ir C kartu gavo 15 taškų. Skaičius, išreiškiantis $\frac{1}{10}$ viso kelionės laiko (valandomis), 25 vienetais didesnis už berniukų surinktų taškų skaičių. Kiek laiko kapitonais buvo A ir C, jeigu B šias pareigas ėjo 160 h?

13.333. Sviedinys krinta iš 2 m 43 cm aukščio ir, atsitrenkęs į žemę, keliskart atšoka, kiekvieną kartą pakildamas į $\frac{2}{3}$ aukščio, iš kurio kaskart krito. Kiek kartų atšokęs nuo žemės kamuolys pakils į 32 cm aukštį?

13.334. Į siuvyklą atvežė po vieną rietimą juodo, žalio ir mėlyno audinio. Nors žalio audinio buvo 9 m mažiau negu juodo ir 6 m daugiau negu mėlyno, tačiau visų rietimų kaina vienoda. Taip pat žinoma, kad 4,5 m juodo audinio kainuoja tiek, kiek 3 m žalio ir 0,5 mėlyno audinio kartu. Kiek metrų audinio buvo kiekviename rietime?

13.335. Dviženklį skaičių padalijus iš jo skaitmenų sandaugos, gaunamas dalmuo 3 ir liekana 8. Skaičių, sudarytą iš tų pačių skaitmenų, bet užrašytą atvirkščia tvarka, padalijus iš skaitmenų sandaugos, gaunamas dalmuo 2 ir liekana 5. Raskite tą skaičių.

13.336. Iš sandėlio į dvi gamyklas kasdien, įskaitant ir sekmadienius, buvo vežamos joms skirtos anglys. Pirmoji gamykla jas pradėjo gabenti birželio 1-ąją ir per dieną parsiveždavo m t, antroji — birželio 8-ąją ir per dieną parsiveždavo n t. Birželio 16-osios pabaigoje sandėlyje liko pusė pradinio anglių kiekio. Kurią dieną iš sandėlio buvo išvežtos visos anglys, jeigu abi gamyklos jų gavo po lygiai?

13.337. Įmonė, gaminanti tirpią kavą, paskutinėmis gegužės mėn. dienomis gavo siuntą kavos pupelių. Vienas pupelių malimo mechanizmas, paleistas pirmadienį, birželio 1-ąją, kasdien sumaldavo m kg pupelių. Birželio 6-ąją pradėjo veikti antras mechanizmas, kuris kasdien sumaldavo n kg. Birželio 10-ąją, baigiantis darbo dienai, liko nesumalta pusė pradinio pupelių kiekio. Abu mechanizmai dirbo visas dienas, išskyrus sekmadienius, ir sumalė po lygiai pupelių. Kada buvo sumaltos visos gautos pupelės?

13.338. Šešiaženklis skaičius prasideda skaitmeniu 2. Jeigu šį skaitmenį iš pirmos vietos perkeltume į paskutinę nekeisdami kitų penkių skaitmenų tvarkos, tai gautume skaičių, trigubai didesnį už pradinį. Raskite pradinį skaičių.

13.339. Norint gauti $c°$ temperatūros mišinį, reikia sumaišyti keletą litrų $a°$ temperatūros skysčio su kitokiu kiekiu to paties $b°$ temperatūros skysčio. Tačiau antro skysčio paimta tiek, kiek buvo numatyta pilti pirmo skysčio, o pirmo — tiek, kiek reikėjo antro. Kokia gauta mišinio temperatūra?

13.340. Kintamųjų dydžių z ir y skirtumas proporcingas dydžiui x, o dydžių x ir z skirtumas — dydžiui y. Abiejų proporcingumo koeficientas lygus sveikajam teigiamam skaičiui k. Tam tikra dydžio z reikšmė $\frac{5}{3}$ karto didesnė už atitinkamų x ir y reikšmių skirtumą. Raskite koeficiento k skaitinę reikšmę.

13.341. Vieną dieną trys darbininkai nutarė palenktyniauti, kuris jų našiau dirba. Pirmas ir trečias darbininkas pagamino du kartus daugiau produkcijos negu antras, o antras ir trečias — tris kartus daugiau negu pirmas. Kurią vietą užėmė kiekvienas darbininkas?

13.342. Atstumas tarp stočių A ir B lygus 360 km. Tuo pačiu metu iš šių stočių vienas priešais kitą išvyksta du traukiniai. Išvykstantis iš A traukinys atvažiuoja į B ne anksčiau kaip po 5 h. Jeigu jo greitis būtų 1,5 karto didesnis, tai jis susitiktų antrą traukinį anksčiau negu po 2 h nuo savo išvykimo iš A. Katro traukinio greitis didesnis?

13.343. Teigiama, kad reiškinys

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$$

yra trinario $x^2+px+qa^2$ kvadratas. Kaip galima patikrinti šio teiginio teisingumą ir rasti koeficientus p bei q?

13.344. Dviejų viena kitai statmenų jėgų, veikiančių materialųjį tašką, didumas ir jų atstojamosios didumas sudaro aritmetinę progresiją. Nustatykite jėgų didumo santykį.

13.345. Laikrodžio rodyklės juda tolygiai. Po kiek minučių 8 valandą rodžiusio laikrodžio minutinė rodyklė pasivys valandinę?

13.346. Medžiagos A tūris lygus pusei medžiagų B ir C tūrių sumos, o medžiagos B tūris — $\frac{1}{5}$ medžiagų A ir C tūrių sumos. Raskite medžiagos C tūrio ir medžiagų A ir B tūrių sumos santykį.

13.347. Dviejų skaičių suma lygi 1244; jeigu pirmo skaičiaus gale prirašysime skaitmenį 3, o antro skaičiaus gale nubrauksime skaitmenį 2, tai gausime du lygius skaičius. Raskite tuos du skaičius.

13.348. Iš stoties A stoties B link išvažiavo keleivinis traukinys. Po a h priešais jį iš stoties B išvyko greitasis traukinys. Abu traukiniai susitiko stotyje C. Po to keleivinis traukinys važiavo b h, o greitasis traukinys — c h. Kiek laiko užtruko kiekvienas šių traukinių kelyje tarp A ir B? Laikykite, jog abiejų greitis buvo pastovus.

13.349. Nuo pašto A iki gyvenvietės B yra 9 km. Per 3 h 41 min laiškininkas nueina iš pašto į gyvenvietę ir nesustojęs sugrįžta. Kelias iš A į B iš pradžių kyla į kalną, po to eina lygia vietove ir paskui leidžiasi nuokalnėn. Įkalne laiškininkas eina 4 km/h greičiu, lygia vietove — 5 km/h, o nuokalne — 6 km/h greičiu. Kokio ilgio kelias eina lygia vietove?

13.350. Du automobilininkai susitiko pusiaukelėje tarp miestų A ir B. Paaiškėjo, kad pirmasis išvažiavo iš A tiek valandų anksčiau negu antrasis iš B, kiek sudaro pusė to laiko (taip pat valandomis), kuris praeitų iki jų susitikimo, jeigu abu automobilininkai išvyktų iš tų pačių vietovių tuo pačiu metu ir važiuotų tuo pačiu keliu tais pačiais pastoviais greičiais. Kiek kartų antras automobilininkas važiavo greičiau už pirmąjį?

13.351. Nuo pašto A iki gyvenvietės B kelias 2 km kyla į kalną, po to 4 km eina lygia vietove ir 3 km leidžiasi nuokalne. Keleivis iš A į B nueina per 2 h 16 min, o atgal — per 2 h 24 min. Jeigu gyvenvietė būtų dvigubai arčiau pašto A, tai, eidamas tuo pačiu keliu pirmyn ir atgal, jis užtruktų 2 h 19 min. Kiek kilometrų per valandą nueina keleivis: a) įkalne; b) lygia vietove; c) nuokalne?

13.352. Palei važiuojantį tramvajų priešinga jam kryptimi ėjo mergina, tramvajuje prie lango sėdėjo jos draugas. Praėjus 8 s nuo to momento, kai mergina buvo ties langu, vaikinas iššoko iš tramvajaus ir nusekė paskui ją. Per kiek laiko jis pasivijo merginą? Vaikinas ėjo dvigubai greičiau už merginą ir penkis kartus lėčiau už tramvajų.

13.353. Sudauginus du teigiamuosius skaičius, kurių vienas 75 vienetais didesnis už kitą, per klaidą gauta sandauga, 1000 vienetų mažesnė už tikrąją. Norint patikrinti, klaidinga sandauga buvo padalyta iš mažesnio dauginamojo. Gautas dalmuo 227 ir liekana 113. Raskite abu skaičius.

13.354. Daugindamas du skaičius, kurių vienas 10 vienetų didesnis už kitą, mokinys padarė klaidą — sandaugos dešimčių skaitmenį sumažino 4 vienetais. Norėdamas patikrinti atsakymą, jis gautą sandaugą padalijo iš mažesnio dauginamojo ir gavo dalmenį 39, o liekaną 22. Raskite dauginamuosius.

13.355. Automobilis nuvažiavo 300 km iš vietovės A į vietovę B ir pasuko atgal; praėjus 1 h 12 min nuo jo išvažiavimo iš B, automobilis 16 km/h padidino greitį. Dėl to grįždamas jis užtruko 48 min trumpiau negu kelyje iš A į B. Apskaičiuokite pradinį automobilio greitį.

13.356. Atstumas tarp vietovių A ir B lygus 308 m. Iš vietovės A į vietovę B juda taškas, kuris pirmąją sekundę nueina 15 m, o kiekvieną sekančią sekundę — 1 m mažiau. Iš vietovės B į vietovę A juda kitas taškas. Pirmąją sekundę jis nueina 20 m, o kiekvieną sekančią sekundę — 3 m daugiau. Kokiu atstumu nuo vietovės A susitiks taškai, jeigu taškas iš B pradės judėti 3 s vėliau negu taškas iš A?

13.357. 96 km atstumą dviratininkas nuvažiavo 2 h greičiau negu buvo numatęs, nes kas valandą jis nukeliaudavo 1 km daugiau negu tikėjosi nuvažiuoti per 1 h 15 min. Kokiu greičiu važiavo dviratininkas?

13.358. Šešiaženklis sveikasis skaičius prasideda skaitmeniu 1. Jeigu šį skaitmenį perkeltume į galą, tai gautume skaičių, tris kartus didesnį už ieškomąjį. Raskite tą skaičių.

13.359. Vienas dviženklis skaičius mažesnis už kitą dviženklį skaičių. Dvigubo didesniojo ir trigubo mažesniojo suma lygi 72. Jeigu prie didesniojo dešinėje parašysime nulį, o po jo — mažesnįjį skaičių, o mažesnio dviženklio skaičiaus dešinėje — didesnįjį skaičių ir po to nulį, tai gausime du penkiaženklius skaičius. Po to pirmąjį jų padaliję iš antro, gausime dalmenį 2 ir liekaną 590. Raskite tuos dviženklius skaičius.

13.360. Dviratininkas pastoviu greičiu nuvažiuoja iš vietovės A į vietovę B, tarp kurių yra 60 km. Neužtrukęs vietovėje B, jis grįžta tuo pačiu greičiu, bet po 1 h nuo išvažiavimo iš B sustoja ir 20 min ilsisi. Po to, padidinęs greitį 4 km/h, dviratininkas keliauja toliau. Kelyje iš B į A jis užtrunka ne ilgiau kaip važiuodamas iš A į B. Kokios yra dviratininko greičio v ribos?

13.361. Raudonas pieštukas kainuoja 17 kp, mėlynas — 13 kp. Pieštukams galima išleisti ne daugiau kaip 4 rb 95 kp. Nupirkti jų iš viso reikia kiek galima daugiau, o raudonų — kuo mažiau, tačiau mėlynų ir raudonų pieštukų skaičius negali skirtis daugiau kaip penkiais. Kiek raudonų ir kiek mėlynų pieštukų reikia nupirkti nurodytomis sąlygomis?

13.362. Vienas lydinys susideda iš dviejų metalų, kurių santykis $1:2$, o kitas — iš tų pačių metalų, kurių santykis $2:3$. Kiek reikia paimti kiekvieno lydinio dalių norint gauti trečią lydinį, kuriame šių metalų santykis būtų lygus $17:27$?

13.363. Vieną lydinį sudaro metalai A ir B, kurių santykis $m:n$, o kitą lydinį — tie patys metalai, kurių santykis $p:q$. Kiek reikia pirmo ir antro lydinio norint iš jų gauti 1 kg trečio lydinio, kuriame būtų vienodas kiekis metalų A ir B?

13.364. Laipsnio pagrindas k kartų buvo padidintas, o rodiklis tiek pat kartų sumažintas. Dėl to pati laipsnio reikšmė nepasikeitė. Raskite tokio laipsnio pagrindą.

13.365. Du laivai plaukia tiesiai ir tolygiai į tą patį uostą. Pradiniu laiko momentu laivų ir uosto padėtys sudarė lygiakraštį trikampį, po to, kai antras laivas nuplaukė 80 km, — statųjį trikampį. Tuo metu, kai pirmas laivas atvyko į uostą, antrajam iki jo dar reikėjo nuplaukti 120 km. Raskite atstumą tarp laivų pradiniu laiko momentu.

13.366. Palei upę, kurios tėkmės greitis 5 km/h, yra prieplaukos A, B ir C, be to, B — per vidurį tarp A ir C. Iš prieplaukos B tuo pačiu metu išplaukia plaustas ir kateris. Plaustas plaukia pasroviui į prieplauką C, o kateris — prieš srovę į prieplauką A. Pasiekęs prieplauką A, kateris apsisuka ir plaukia į prieplauką C. Katerio greitis stovinčiame vandenyje lygus v km/h. Raskite tas v reikšmes, kurioms esant kateris atplaukia į C vėliau negu plaustas.

13.367. Vienos grupės studentai ketino nusipirkti magnetofoną, kurio kaina yra tarp 170 rb ir 195 rb. Tačiau paskutiniu metu du iš jų atsisakė prisidėti, todėl kiekvienam iš likusiųjų teko sumokėti 1 rb daugiau. Kiek kainavo magnetofonas?

13.368. Kroviniui pervežti iš vienos vietos į kitą užsakyta tam tikras skaičius vienodos galios sunkvežimių. Dėl prasto kelio į kiekvieną sunkvežimį teko krauti 0,5 t mažiau negu buvo numatyta, todėl prireikė dar 4 tokių pat sunkvežimių. Pervežto krovinio masė buvo ne mažesnė kaip 55 t, bet ne didesnė kaip 64 t. Kiek tonų krovinio pervežta kiekvienu sunkvežimiu?

13.369. Prie namo pasodinta daugiau kaip 14 liepų ir beržų. Jeigu liepų skaičių padidintume dvigubai, o beržų — 18 vienetų, tai būtų daugiau beržų. O jeigu beržų skaičių padvigubintume nekeisdami liepų skaičiaus, tai vis tiek būtų daugiau liepų. Kiek liepų ir kiek beržų pasodinta?

13.370. Visus savo pašto ženklus mokinys nori suklijuoti į albumą. Jeigu kiekviename lape klijuos 20 ženklų, tai pritrūks lapų, o jeigu 23 ženklus, tai mažiausiai vienas lapas liks tuščias. Jeigu mokiniui padovanosime tokį pat albumą, kurio kiekviename lape suklijuotas 21 pašto ženklas, tai iš viso jis turės 500 pašto ženklų. Kiek lapų yra albume?

13.371. Pilama 100 m ilgio geležinkelio sankasa, kurios skerspjūvis — lygiašonė trapecija. Jos apatinis pagrindas lygus 5 m, viršutinis ne mažesnis kaip 2 m, o šlaito kampas lygus 45°. Kokio aukščio h turi būti sankasa, kad žemės darbų apimtis būtų ne mažesnė kaip 400 m^3, bet ne didesnė kaip 500 m^3?

C grupė

13.372. Komiso parduotuvė priėmė fotoaparatų, laikrodžių, automatinių plunksnakočių ir radijo imtuvų už 240 rb. Radijo imtuvo ir laikrodžio kainų

suma 4 rb didesnė už fotoaparato ir automatinio plunksnakočio kainų sumą, o laikrodžio ir plunksnakočio kainų suma 24 rb mažesnė už fotoaparato ir radijo imtuvo kainų sumą. Plunksnakočio kaina lygi sveikam rublių skaičiui, ne didesniam kaip 6. Priimtų fotoaparatų skaičius lygus vieno fotoaparato kainai (rubliais), padalytai iš 10; laikrodžių priimta tiek pat, kiek radijo imtuvų ir kiek fotoaparatų. Automatinių plunksnakočių yra tris kartus daugiau negu fotoaparatų. Kiek iš viso nurodytų pavadinimų daiktų priėmė parduotuvė?

13.373. Elektroninė skaičiavimo mašina turėjo išspręsti vieną po kito keletą uždavinių. Registruojant uždavinio atlikimo trukmę, pastebėta, kad kiekvieną sekantį uždavinį mašina išsprendė per tiek pat kartų trumpesnį laiką negu ankstesnį. Visus uždavinius, išskyrus pirmąjį, mašina išsprendė per 63,5 min, visus uždavinius, išskyrus paskutinį,— per 127 min, o visus uždavinius, išskyrus du pirmuosius ir du paskutinius,— per 30 min. Kiek buvo uždavinių ir per kiek laiko mašina juos išsprendė?

13.374. Trys žvakės yra vienodo ilgio, bet skirtingo storio. Pirma žvakė buvo uždegta 1 h anksčiau negu kitos dvi, uždegtos tuo pačiu metu. Tam tikru momentu pirma ir trečia žvakė buvo vienodo ilgio, o dar po 2 h susilygino pirmos ir antros žvakės ilgis. Antra žvakė sudegė per 12 h, o trečia — per 8 h. Per kiek valandų sudegė pirma žvakė?

13.375. Triženklio skaičiaus dešimčių skaičius yra šimtų ir vienetų skaičių geometrinis vidurkis. Jeigu jo šimtų ir vienetų skaitmenis sukeisime vietomis ir iš ieškomojo skaičiaus atimsime naują skaičių, tai skirtumas bus lygus 297. Raskite tą triženklį skaičių.

13.376. Ieškomas triženklis skaičius baigiasi skaitmeniu 1. Jeigu tą vienetą nubrauktume, po to jį parašytume kaip pirmą skaičiaus skaitmenį, tai gautas naujas triženklis skaičius būtų $10a^{\log_{\sqrt{a}} 3}$ mažesnis už ieškomąjį. Raskite tą skaičių.

13.377. Triženklio skaičiaus šimtų ir dešimčių skaitmenų logaritmų skirtumas lygus tų pačių skaitmenų skirtumo logaritmui, o šimtų ir dešimčių skaitmenų logaritmų suma — tų pačių skaitmenų sumos, padaugintos iš $\frac{4}{3}$, logaritmui. Jeigu iš šio triženklio skaičiaus atimsime skaičių, kurio skaitmenys užrašyti atvirkščia tvarka, tai skirtumas bus lygus teigiamajam skaičiui, kurio šimtų skaitmuo sutampa su duotojo skaičiaus dešimčių skaitmeniu. Raskite tą skaičių.

13.378. Buvo du luitai lydinio: vieno masė 6 kg, kito — 8 kg. Juose nevienodas procentas vario. Darbininkas nuo pirmo luito atpjovė tam tikrą dalį, o nuo antro — dvigubai didesnės masės dalį. Kiekvieną šių atpjovų sulydė su kito luito likučiu ir gavo du naujus lydinius, kuriuose yra vienodas procentas vario. Kokia kiekvienos atpjovos masė?

13.379. Brilianto kaina proporcinga jo masės kvadratui. Briliantas, kurio masė lygi p karatų, buvo padalytas į dvi dalis, dėl to jo kaina sumažėjo k kartų. Apskaičiuokite abiejų brilianto dalių masę (1 karatas=0,2 g). Įrodykite, kad didžiausias nuostolis būna tada, kai abi brilianto dalys yra vienodos masės.

13.380. Nupirkta keletas kilogramų dviejų rūšių prekių: pirmos rūšies už 45 rb ir antros rūšies už 20 rb, be to, pirmos rūšies prekių 1 kg daugiau. 1 kg pirmos rūšies prekių kainuoja a rb daugiau negu 1 kg antros rūšies prekių. Kiek kilogramų kiekvienos rūšies prekių nupirkta? Raskite sprendinių skaičių, priklausomai nuo galimų a reikšmių.

13.381. Vietovėje A iškastų anglių tona parduodama po q rb, o vietovėje B iškastų — p% brangiau. Vietoves A ir B jungia s km ilgio kelias. 1 t anglių pervežimas 1 km atstumu kainuoja r rb. Kurioje kelio AB zonoje yra anglių vartotojai, kuriems pigiau pirkti ir vežti anglis iš B negu iš A? Kurioje kelio AB vietoje yra įmonė, kurios išlaidos anglims nepriklauso nuo vietovės A arba B padėties? Išnagrinėkite galimus atvejus.

13.382. Taškas P yra R spindulio apskritimo skersmenyje AB. Iš taško P išilgai atkarpų PA, PB ir PC juda trys vienetinės masės kūnai taip, kad PC yra pusstygė, statmena skersmeniui AB. Kokiu atstumu nuo A nutolęs taškas P, jeigu žinoma, kad kūnai juda pastoviu greičiu ir per laiko vienetą pirmasis pasiekia tašką A, antrasis — tašką B, o trečiasis — tašką C? Visa išeikvota kinetinė energija $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ sudaro a^2 vienetų. Nurodykite dydžio a^2 galimas kitimo ribas.

13.383. Grupė darbininkų per 14 dienų atliko jiems pavestą darbą. Jeigu jų būtų 4 žmonėmis daugiau ir kiekvienas kas dieną dirbtų 1 h ilgiau, tai tą patį darbą jie atliktų per 10 dienų. Jeigu jų būtų dar 6 žmonėmis daugiau ir kiekvienas kasdien dirbtų dar 1 h ilgiau, tai tą darbą atliktų per 7 dienas. Kiek buvo darbininkų ir kiek valandų per dieną jie dirbo?

13.384. Penki žmonės atlieka tam tikrą darbą. Pirmas, antras ir trečias, dirbdami kartu, gali įvykdyti visą užduotį per 7,5 h; pirmas, trečias ir penktas kartu — per 5 h; pirmas, trečias ir ketvirtas kartu — per 6 h; antras, ketvirtas ir penktas kartu — per 4 h. Per kiek laiko šį darbą atlieka visi 5 žmonės dirbdami kartu?

13.385. Aviamodelių su varikliais varžybose geriausių rezultatų pasiekė du modeliai. Pučiant priešiniam vėjui, pirmas modelis išsilaikė ore m min trumpiau negu antrasis, bet nuskriejo h m toliau. Vėjo greitis lygus c m/min, tačiau modelio lėkio trukmei jis neturi įtakos; nuo vėjo priklauso tik lėkio nuotolis. Kiekvieno modelio savasis greitis visą laiką pastovus. Kuris šių modelių nulėks toliau nevėjingą dieną?

13.386. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėse tarp jo viršūnių išsidėstę taškai A_1, B_1 ir C_1, be to, $AA_1=BB_1=CC_1=x$. Trikampio kraštinė lygi a. Raskite tokią x reikšmę, su kuria trikampių $A_1B_1C_1$ ir ABC plotų santykis būtų lygus duotajam teigiamam skaičiui m. Nurodykite dydžio m galimas kitimo ribas.

13.387. Iš vietovės A upe prieš srovę išplaukė motorinė valtis, o iš vietovės B tuo pačiu metu pasroviui — plaustas. Po a h jie susitiko ir toliau plaukė nesustodami. Pasiekusi vietovę B, valtis tuoj pat grįžo ir vietovėje A pasivijo plaustą. Valties greitis stovinčiame vandenyje visą laiką buvo pastovus. Kiek laiko plaukė plaustas ir kiek — valtis?

13.388. Trys plaukikai turi nuplaukti 50 m baseino takeliu, tuoj pat apsisukti ir grįžti į starto vietą. Pirmiausia startuoja pirmas plaukikas, po a s — antras ir dar po a s — trečias. Tam tikru laiko momentu, dar nepasiekę takelio galo, plaukikai buvo vienodai nutolę nuo starto. Trečias plaukikas nuplaukė iki takelio galo ir grįždamas susitiko antrą plaukiką už s m, o pirmą — už r m nuo takelio galo. Raskite pirmo ir trečio plaukiko greitį. Nurodykite nelygybes, kurias turi tenkinti parametrai r bei s, kad uždavinys turėtų sprendinį.

13.389. Dviejų lydinio luitų masė vienoda, bet juose skirtingas vario procentas. Nuo šių luitų atpjauta po vienodos masės gabalą. Kiekvienas atpjautas gabalas sulydytas su kito luito likučiu. Po to abiejuose naujuose lydiniuose vario procentas pasidarė vienodas. Kiek kartų atpjautas gabalas mažesnis už visą luitą?

13.390. 5 km ilgio automobilių kolonos greitis visą laiką vienodas. Paskutiniuoju automobiliu važiuoja kolonos viršininkas, o šalia jo — motociklininkas. Viršininko įpareigotas, motociklininkas padidino greitį, susilygino su priekiniu automobiliu, perdavė jo vairuotojui paketą, akimirksniu apsisuko ir tuo pačiu didesniuoju greičiu grįžo į savo vietą. Viršininkas pasakė motociklininkui, kad per tą laiką, kol jis vykdė užduotį, kolona nuvažiavo į priekį 5 km. Kiek kilometrų nuvažiavo motociklininkas?

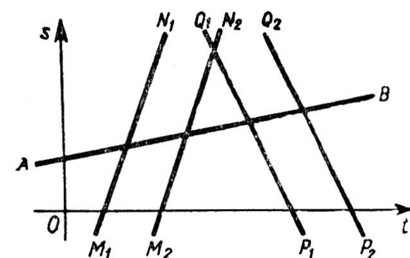
13.391. Iš vietovių A ir B tuo pačiu metu išvažiuoja du automobiliai. 12 valandą jie susitinka. Jeigu pirmo automobilio greitis padidėtų dvigubai, o antrojo liktų toks pat, tai abudu susitiktų 56 min anksčiau. Jeigu antro greitis padidėtų dvigubai, o pirmo nepasikeistų, tai jie susitiktų 65 min anksčiau. Kurią valandą susitiktų automobiliai, jeigu abudu važiuotų dvigubai didesniu greičiu?

13.392. Iš aerouosto į miesto centrą išvažiavo lengvasis automobilis, o tuo pačiu metu iš miesto centro į aerouostą — autobusas. Kai pirmasis buvo nu-

važiavęs pusę kelio, antrajam iki maršruto pabaigos dar liko 19,2 km, o kai antrasis buvo pusiaukelėje, pirmajam iki maršruto pabaigos liko 12 km. Kiek kilometrų autobusui dar reikės nuvažiuoti, kai lengvasis automobilis pasieks savo maršruto galą? Laikykite, jog automobilis ir autobusas visą kelią važiuoja pastoviu greičiu.

13.393. Atstumas tarp dviejų taškų lygus d. Veikiami tam tikrų jėgų, šie taškai pradeda tolygiai judėti vienas priešais kitą. Kad jie susitiktų pusiaukelėje, pirmasis taškas turi pradėti judėti t laiko vienetų anksčiau už antrąjį. Jeigu taškai pradės judėti tuo pačiu metu, tai po T laiko vienetų atstumas tarp jų sudarys k-tąją dalį ($k>1$) pradinio atstumo. Raskite taškų judėjimo greičius.

13.394. Du broliai turėjo bilietus į stadioną, esantį už 10 km nuo jų namų. Iš pradžių jie ketino eiti į stadioną pėsti, bet vėliau nusprendė pasinaudoti dviračiu. Jie sutarė, kad vienas išvyks dviračiu, o kitas tuo pačiu metu — pėsčiomis. Nuvažiavęs dalį kelio, pirmasis paliks dviratį, o antrasis, priėjęs iki palikto dviračio, važiuos juo toliau ir pasivys pirmąjį prie įėjimo į stadioną. Kiek laiko sutaupys broliai, palyginti su pradiniu jų ketinimu visą kelią eiti pėsčiomis, jeigu kiekvienas jų kiekvieną kilometrą dviračiu nuvažiuos 12 min greičiau negu nueis pėsčiomis?



13.10 pav.

13.395. Per sportinio ėjimo treniruotę sportininkas pastebėjo, kad kas 6 min jį paveja troleibusas ir kas 3 min pro jį pravažiuoja priešinis troleibusas. Troleibusai abiem kryptimis išvyksta vienodais laiko tarpais, važiuoja nesustodami pastoviu ir vienodu greičiu. Sportininkas taip pat eina nesustodamas pastoviu greičiu (13.10 pav.; čia AB — sportininko ėjimo grafikas, tiesės $M_1N_1 \| M_2N_2$ ir $P_1Q_1 \| P_2Q_2$ — kurių nors dviejų vienas po kito sportininkui iš paskos ir iš priekio važiuojančių troleibusų judėjimo grafikai). Kas kiek minučių troleibusai išvyksta iš galinių stočių ir kiek kartų lėčiau už troleibusą eina sportininkas?

13.396. Pagal treniruočių tvarkaraštį iš vietovės A turi išvažiuoti pirmas ryšininkas, o po 6 h — antras ryšininkas tokiu greičiu, kad pasivytų pirmąjį už 180 km nuo vietovės A. Kartą pirmajam ryšininkui išvykimo momentu buvo nurodyta važiuoti a km/h didesniu greičiu negu numatyta, o antrajam nedidinti tvarkaraštyje numatyto greičio. Norėdamas tiksliai įvykdyti užduotį, antras ryšininkas turėjo išvažiuoti iš vietovės A 3 h anksčiau negu buvo numatyta. Kiek laiko važiavo kiekvienas ryšininkas? Įrodykite, kad uždavinys turi sprendinį tik tada, kai $a<30$.

13.397. Du traukiniai tuo pačiu metu išvažiuoja iš A ir B vienas priešais kitą ir susitinka per atstumą p km nuo B. Praėjus t h nuo susitikimo, antras traukinys, pravažiavęs pro vietovę A, buvo q km atstumu nuo jos, o pirmas tuo metu, pravažiavęs pro vietovę B, buvo nutolęs nuo antro traukinio dvigubai didesniu atstumu negu atstumas tarp A ir B. Raskite traukinių greičius ir atstumą nuo A iki B. Traukiniai nebuvo sustoję, o jų greičiai laikomi pastoviais.

13.398. Du draugai išvyko į medžioklę, vienas — pėsčiomis, kitas — automobiliu. Pėsčiajam iki medžiotojų bazės 46 km, važiuojančiam automobiliu — 30 km. Pastarojo gyvenamoji vieta yra tarp draugo namų ir bazės. Iš vietos jie pajudėjo tuo pačiu metu, bet automobilio savininkas pasuko į priešingą bazei pusę pasitikti draugo, einančio pėsčiomis. Susitikę jie kartu nuvažiavo į bazę, praėjus 1 h po išvykimo iš vietos. Jeigu pėsčiasis būtų išėjęs iš namų 2 h 40 min anksčiau už automobilio savininką, tai draugai būtų susitikę už 11 km nuo pėsčiojo namo. Koks automobilio greitis? Ir pėsčiojo, ir automobilio greitį laikykite pastoviu.

13.399. Traukinys užtruko stotyje 1 h 42 min. Gavęs signalą išvykti, mašinistas važiavo tokiu grafiku: kelio ruože, sudarančiame 0,9 viso kelio nuo išvykimo stoties iki paskyrimo stoties, jis važiavo 20% didesniu greičiu negu greitis pagal tvarkaraštį ir 0,1 kelio — 25% didesniu greičiu negu greitis pagal tvarkaraštį. Į paskyrimo stotį traukinys atvyko laiku. Kiek laiko pagal tvarkaraštį šis traukinys važiuotų tarp stočių?

13.400. Prie plento nuosekliai išsidėstę šie miesteliai: D, A, C ir B. Tuo pačiu metu iš A į C ir iš B į D išvažiavo motociklininkas ir dviratininkas. Susitikę miestelyje E, jie pasikeitė transporto priemonėmis ir keliavo toliau. Keleivis iš A į C atvyko per 6 h, o keleivis iš B į D — per 12 h. Motociklininkas važiavo 60 km/h greičiu, o dviratininkas — 25 km/h greičiu, be to, pirmojo vidutinis greitis kelyje AC lygus antrojo vidutiniam greičiui kelyje BD. Apskaičiuokite kelio nuo A iki B ilgį.

13.401. Bėgimo takelyje tuo pačiu metu startavo du čiuožėjai, turėję įveikti s m distanciją. Kai nugalėtojas buvo pasiekęs finišą, kitam liko nučiuožti dar visą ratą. Nugalėtojas kiekvieną ratą įveikdavo a s greičiau negu pralaimėjęs sportininkas ir nučiuožė visą distanciją per t min. Sportininkų greitis visoje distancijoje buvo pastovus. Raskite bėgimo takelio ilgį.

13.402. Indai A, B ir C yra kubo formos. Jų talpos santykis lygus $1:8:27$, o juose esančio vandens tūrio santykis $1:2:3$. Dalį vandens perpylus iš indo A į indą B ir iš indo B į indą C, visuose trijuose induose vandens sluoksnio storis pasidarė vienodas. Po to iš indo C į indą B perpilta $128\frac{4}{7}$ l vandens, vėliau iš indo B į indą A — tiek, kad inde A vandens sluoksnis pasidarė dvigubai storesnis negu inde B. Dabar inde A yra 100 l mažiau negu buvo iš pradžių. Kiek vandens iš pradžių buvo kiekviename inde?

13.403. Lenktyniavo trys medkirčių brigados. Pirma ir trečia brigada paruošė dvigubai daugiau medienos negu antra brigada, o antra ir trečia — tris kartus daugiau negu pirma. Kuri brigada nugalėjo?

13.404. Du žmonės tuo pačiu metu pradėjo leistis slenkančio žemyn metro eskalatoriaus laiptais. Vienas jų lipo dvigubai greičiau negu kitas. Vienas suskaičiavo 60 laiptelių, o kitas — 40. Kiek laiptelių jie turėjo nulipti nejudančiu eskalatoriumi?

13.405. Iš A į B ir iš B į A tuo pačiu metu išėjo du pėstieji. Kai pirmasis buvo nuėjęs pusę kelio, tai antrajam dar reikėjo nueiti 24 km, o kai antrasis nuėjo pusę kelio, tai pirmajam dar buvo likę 15 km. Kiek kilometrų turės nueiti antrasis pėsčiasis po to, kai pirmasis pasieks B?

13.406. Tą patį kelio ruožą AB trys motociklininkai nuvažiuoja pastoviu, bet skirtingu greičiu. Pirmiausia pro vietovę A pravažiavo pirmas motociklininkas, o po 5 s ta pačia kryptimi — antras ir trečias. Po tam tikro laiko pirmą motociklininką pralenkė trečias, o dar po 10 s — ir antras. Antras motociklininkas nuvažiavo atstumą AB per 1 min, o trečiasis — per 40 s. Per kiek laiko pirmas motociklininkas nuvažiuos atstumą AB?

13.407. Prie tvenkinio kranto priėjo trys žmonės: A, B ir C. Žmogus A išplaukė greičiu v km/h į priešingą krantą; B ir C tuo pačiu metu išplaukė motorine valtimi greičiu $10v$ km/h. Po tam tikro laiko žmogus C nutarė likusį kelią nuplaukti tuo pačiu greičiu, kaip ir A. Tuo momentu B pasuko atgal, norėdamas paimti A, kuris tuoj pat įsėdo į valtį ir plaukė kartu su B. Priešingame krante visi trys atsidūrė tuo pačiu metu. Per kiek laiko jie perplaukė tvenkinį, jeigu žinoma, kad jo plotis lygus b km, vandens tėkmės greitis laikomas lygus nuliui?

13.408. Tarp taškų A ir B, nutolusių vienas nuo kito per 3,01 m, pastoviu greičiu svyruoja materialioji dalelė m_1. Galiniuose taškuose ji nesustoja. Praėjus 11 s po to, kai dalelė m_1 pajudėjo iš taško A, dalelė m_2 pajudėjo iš taško B irgi pastoviu, bet mažesniu greičiu. Judėdama taško A link, ši dalelė du kartus susitiko su dalele m_1, būtent po 10 s ir 45 s nuo antros dalelės judėjimo pradžios. Raskite kiekvienos dalelės greitį.

21. Užsak. Nr. 1941.

13.409. Savaeigis plentvolis, naudojamas kelių remontui, gali suvoluoti 0,85 m pločio juostą. Kiekviena sekanti juosta dengia ankstesnės $\frac{1}{4}$ pločio. Kokiu greičiu turi važiuoti tas plentvolis, kad per laiko tarpą, ne ilgesnį kaip 6 h ir ne trumpesnį kaip 5 h, būtų galima du kartus suvoluoti 750 m ilgio ir 6,5 m pločio plento ruožą?

13.410. Išilgai stačiojo kampo kraštinių viršūnės link juda du rutuliai, kurių spinduliai 2 cm ir 3 cm; šių rutulių centrai slenka kampo kraštinėmis nevienodu, bet pastoviu greičiu. Tam tikru laiko momentu mažesnio rutulio centras buvo nutolęs nuo viršūnės 6 cm, o didesniojo — 16 cm. Po 1 s atstumas tarp centrų pasidarė lygus 13 cm, o dar po 2 s rutuliai susidūrė nepasiekę viršūnės. Kokiu greičiu judėjo kiekvienas rutulys?

13.411. Du taškai A ir B nutolę vienas nuo kito atstumu a. Tuo pačiu metu jie pradėjo judėti vienokiu pastoviu greičiu v skirtingomis stačiojo kampo kraštinėmis viršūnės link. Taškas B pasiekė viršūnę t laiko vienetų anksčiau negu taškas A (visi matmenys išreikšti tos pačios sistemos vienetais). Per kiek laiko pasiekė viršūnę taškas A? Kokia turi būti dydžio a reikšmė, kad ieškomas laikas įgytų mažiausią iš galimų reikšmių?

13.412. Trys ūkiai yra ne vienoje tiesėje. Atstumas nuo pirmo iki trečio ūkio, einant per antrąjį, keturis kartus didesnis už atstumą tarp jų tiese; atstumas nuo pirmo ūkio iki antro, einant per trečiąjį, a km ilgesnis už tiesų kelią, atstumas nuo antro ūkio iki trečio per pirmą ūkį lygus 85 km. Kokiame intervale yra visos a reikšmės, su kuriomis ūkiai gali būti išsidėstę ne vienoje tiesėje? Apskaičiuokite atstumą tarp ūkių, kai $a=5$.

13.413. Lydinį sudaro alavas, varis ir cinkas. Jeigu atpjautume 20 g šio lydinio ir atpjovą sulydytume su 2 g alavo, tai gautume lydinį, kuriame vario masė būtų lygi alavo masei. O jeigu atpjautume 30 g pradinio lydinio ir atpjovą sulydytume su 9 g cinko, tai gautume lydinį, kuriame alavo ir cinko būtų po lygiai. Kiek procentų kiekvieno metalo yra pradiniame lydinyje?

13.414. Iš dviejų vietovių A ir B tuo pačiu metu į eismo nelaimės vietą, vietovę C, išvažiavo kelių policininkai. Pirmas policininkas pasiekė vietovę C per a min. Kad antras policininkas atvyktų iš vietovės B į vietovę C tuo pačiu metu, kaip ir pirmas, kiekvieną kilometrą turėtų nuvažiuoti c min greičiau negu pirmasis, nes atstumas nuo B iki C b km ilgesnis už atstumą nuo A iki C. Kiek kilometrų nuo vietovės A įvyko eismo nelaimė?

13.415. Du dviratininkai tuo pačiu metu išvažiavo iš vietovių A ir B vienas priešais kitą. Praėjus 4 h po susitikimo, iš A važiavęs dviratininkas atvyko į B, o praėjus 9 h po susitikimo, iš B važiavęs dviratininkas pasiekė vietovę A. Kiek valandų važiavo kiekvienas dviratininkas?

13.416. Sandėlyje yra dviejų rūšių (didelių ir mažų) statinių, kurių bendra talpa 7000 l. Jeigu visos statinės būtų didelės, tai bendra jų talpa padidėtų 1000 l. Jeigu visos statinės būtų mažos, tai jų talpa sumažėtų 4000 l. Apskaičiuokite kiekvienos rūšies visų statinių talpą.

13.417. Kamanė v_1 m/min greičiu nuskrido žydinčios obels link. Tuo pačiu metu prie kitos obels greičiu v_2 m/min nulėkė bitė. Kamanei reikėjo įveikti atstumą $2a$ m, o bitei — $2b$ m. Tarkime, kad jų lėkio trajektorijos — viena kitai statmenos tiesės, kurios susikerta taške, dalijančiame pusiau ir kamanės, ir bitės kelią. Užrašykite formulę, išreiškiančią atstumo y tarp kamanės ir bitės priklausomybę nuo jų lėkio trukmės x. Kuriuo momentu atstumas tarp lekiančios kamanės ir bitės yra mažiausias? Ištirkite, ar perskris bitė arba kamanė jų trajektorijų susikirtimo tašką iki to momento, kai atstumas tarp kamanės ir bitės bus mažiausias.

13.418. Du dviratininkai tuo pačiu metu nevienodu (tačiau pastoviu) greičiu išvažiuoja iš vietovės A į vietovę B ir tuoj pat grįžta atgal. Pirmas dviratininkas, važiavęs greičiau už antrąjį, grįždamas susitinka pastarąjį už a km nuo B; po to, pasiekęs A, jis vėl važiuoja į B ir, įveikęs k-tąją dalį kelio AB, susitinka antrą dviratininką, grįžtantį iš B. Raskite atstumą nuo A iki B.

13.419. Du 490 m ir 210 m ilgio traukiniai tolygiai važiuoja vienas priešais kitą lygiagrečiais keliais. Vieno traukinio mašinistas pamatė atvažiuojantį sąstatą už 700 m; po 28 s traukiniai susitiko. Vienas jų važiavo pro šviesoforą 35 s ilgiau negu kitas. Apskaičiuokite kiekvieno traukinio greitį.

13.420. Automobilių kortežas su kosmonautais važiuoja prospektu tolygiai v km/h greičiu. Kortežo ilgis visą kelią yra vienodas ir lygus m m. Pro namo langą išmesta puokštė gėlių pataikė į važiuojančio paskui kortežą motociklo priekabą. Motociklininkas nuvažiavo į priekį, perdavė pirmame automobilyje sėdinčiam kosmonautui puokštę ir tuoj pat grįžo atgal. Apskaičiuokite motociklo greitį išilgai kortežo pirmyn ir atgal, jei motociklininkas važiavo t min visą laiką vienodu greičiu.

13.421. Dviženklį skaičių padalijus iš tam tikro sveikojo skaičiaus, gaunamas dalmuo 3 ir liekana 8. Dalinio skaitmenis sukeitus vietomis, o daliklį palikus nepakeistą, gaunamas dalmuo 2, o liekana 5. Raskite pradinį dalinį.

13.422. Į bazę atvežti arbūzai buvo skirti dviem parduotuvėms. Pirma parduotuvė tuoj pat ėmėsi darbo ir kasdien parsivežda̋vo vienodos masės dalį. Antra parduotuvė pradėjo vežti arbūzus a dienų vėliau ir kasdien išsiveždavo irgi vienodos masės dalį, tik kitokį negu pirma parduotuvė. Praėjus b dienų nuo vežimo pradžios, bazėje liko pusė pradinio arbūzų kiekio. Per kiek dienų iš bazės buvo išvežti visi arbūzai, jeigu abi parduotuvės juos baigė gabenti kartu ir gavo jų po lygiai?

13.423. Visi grioviakasių brigados nariai kasdien turėjo dirbti vienodą skaičių valandų, vienodas jų ir darbo našumas. Taip dirbdama brigada galėjo per 6 dienas iškasti griovį kabeliui kloti. Tačiau, dar nepradėjus kasti, paaiškėjo, kad darbo diena sutrumpinama 1 h, o brigada sumažinama 5 žmonėmis. Tada griovys galėjo būti iškastas per 9 dienas. Iš tikrųjų brigada iškasė griovį per 12 dienų, nes darbo diena buvo sutrumpinta ne 1 h, o 2 h ir du darbininkai susirgo. Kiek darbininkų turėjo kasti griovį iš pradžių? Po kiek valandų kas dieną brigada dirbo?

13.424. Trys mašinos turi atlikti tam tikrą darbą. Jeigu dirbtų tik pirma mašina, tai tą užduotį įvykdytų a dienų vėliau negu visos trys kartu. Jeigu dirbtų tik antra mašina, tai tą užduotį įvykdytų b dienų vėliau negu visos kartu. Trečiai mašinai prireiktų c kartų daugiau laiko negu visoms mašinoms kartu. Per kiek dienų darbą atliktų kiekviena iš jų atskirai? Kurias skaitines reikšmes gali įgyti c?

13.425. Yra n menzūrų su skysčiu. Iš pirmos menzūros $\frac{1}{n}$ skysčio perpilta į antrą menzūrą, po to iš antros papildytos menzūros $\frac{1}{n}$ skysčio perpilta į trečią menzūrą ir t. t. Galiausiai iš n-tos menzūros, papildytos iš ankstesnės, $\frac{1}{n}$ skysčio vėl perpilta į pirmą menzūrą. Tada kiekvienoje menzūroje buvo po a cm^3 skysčio. Kiek skysčio iš pradžių buvo kiekvienoje menzūroje?

13.426. Vandeniui pumpuoti į baseiną pastatyti du siurbliai. Pirmas siurblys gali pripildyti jį 8 h greičiau negu antrasis. Iš pradžių buvo įjungtas tik antras siurblys ir veikė dvigubai ilgiau negu laikas, kurio prireiktų abiem siurbliams pripildyti baseiną, jei jie pumpuotų kartu. Po to buvo įjungtas pirmas siurblys ir po 1,5 h nuo to momento baseinas buvo pilnas vandens. Per kiek valandų gali pripildyti baseiną kiekvienas siurblys veikdamas atskirai?

13.427. Perėjęs pro akytą filtravimo medžiagą, skystis tolygia srove teka į 40 kibirų talpos statinę, kurios dugne yra čiaupas. Jeigu tas čiaupas atsuktas, tai skysčio priteka ir išteka tiek, kad kas 4 min statinėje jo sumažėja vienu kibiru. Per kiek laiko filtracinis skystis pripildo tuščią statinę, kai čiaupas apačioje užsuktas, jeigu žinoma, kad tam reikia laiko 3 min mažiau negu pro atvirą apatinį čiaupą išbėga 66 kibirai skysčio?

13.428. Vienodų detalių partija apdorojama trejomis skirtingos konstrukcijos staklėmis. Iš pradžių pirmos staklės veikia tiek valandų, kiek reikėtų antroms ir trečioms staklėms kartu atlikti visą darbą; po to apdoroja detales antros staklės tiek valandų, kiek reikėtų pirmoms ir trečioms staklėms kartu

atlikti visą darbą. Likusi detalių partijos dalis trečiomis staklėmis apdorojama per tiek valandų, kiek reikėtų pirmoms ir antroms staklėms kartu įvykdyti užduotį. Kiek kartų greičiau būtų atliktas šis darbas, jeigu trejos staklės veiktų kartu?

13.429. Iš pradžių kateris nuplaukė a km ežeru, po to pusę šio atstumo — upe, kuri įteka į ežerą. Visa ši kelionė truko 1 h. Upės tėkmės greitis lygus c km/h. Raskite katerio greitį stovinčiame vandenyje.

13.430. Iš Vilniaus į miestą N keleivis gali važiuoti traukiniu. Šioje kelionėje jis užtruktų 20 h. Jeigu keleivis sulauktų lėktuvo (o laukti tektų ilgiau negu 5 h po traukinio išvykimo), tai atskristų į miestą N per 10 h, įskaitant ir laukimo laiką. Lėktuvas atsiduria virš traukinio, praėjus $\frac{8}{9}$ h nuo išvykimo iš aerouosto, ir per tą laiką nuskrenda tiek pat kilometrų, kiek būna nuvažiavęs traukinys. Kiek kartų lėktuvo greitis didesnis už traukinio?

13.431. Kintamųjų dydžių y ir z skirtumas proporcingas dydžiui x, o dydžių z ir x skirtumas — dydžiui y. Proporcingumo koeficientai lygūs atitinkamai k_1 ir k_2. Tam tikra dydžio z reikšmė 3 kartus didesnė už atitinkamų x ir y reikšmių skirtumą. Įrodykite, kad skaičių k_1+3 ir k_2+3 sandauga lygi 8 (laikoma, kad dydžiai x ir y neįgyja reikšmių, lygių nuliui).

13.432. Du sportininkai bėga vienu uždaru stadiono taku. Kiekvieno jų greitis pastovus, tačiau pirmasis visą takelį nubėga a s greičiau negu antrasis. Pradėję bėgti ta pačia kryptimi iš vienos vietos, sportininkai susilygina kas b s. Po kiek laiko jie susitiktų, jeigu tais pačiais greičiais ir tuo pačiu taku bėgtų priešingomis kryptimis?

13.433. Įmonė A perka ledą vietovėje B, mokėdama po a rb už toną. Kartais šiai įmonei tenka pirkti ledą vietovėje C ir mokėti $1{,}5a$ rb už toną. Abu tiekėjai patys pristato įmonei A pirktą ledą, priskaičiuodami už tonos pervežimą po p rb už kilometrą. Transportuojamo ledo masės nuostoliai sudaro $\frac{n}{1000}$ masės vienam kilometrui kelio. Įmonė A yra tarp B ir C, ir kiekviena tona faktiškai gauto iš vietovės B ir vietovės C ledo įmonei A atsieina vienodai (rubliais). Atstumas nuo B iki C per A lygus s km. Kiek rublių įmonei atsieina tona ledo?

13.434. Įrodykite, kad didžiausio iš trijų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių kubas negali būti lygus kitų dviejų skaičių kubų sumai.

13.435. Ieškomas skaičius didesnis už 400 ir mažesnis už 500. Jo skaitmenų suma lygi 9 ir sudaro $\frac{47}{36}$ skaičiaus, užrašyto tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite tą skaičių.

13.436. Ruože AB upė teka taip lėtai, kad į tėkmę galima neatsižvelgti; ruože BC tėkmė turi pastebimą įtaką valties greičiui. Nuo A iki C valtis pasroviui nuplaukia per 6 h, o nuo C iki A prieš srovę — per 7 h. Jeigu ruože AB upės tėkmė būtų tokia pat, kaip ruože BC, tai visame kelyje iš A į C valtis užtruktų 5,5 h. Kiek laiko tada prireiktų valčiai nuplaukti prieš srovę iš C į A? Visais atvejais valties greitis stovinčiame vandenyje laikomas pastoviu.

13.437. Iš kurio sveikojo teigiamojo skaičiaus reikia padalyti 180, kad liekana būtų lygi 25% dalmens?

13.438. Sumaišius 2 cm³ trijų medžiagų, gauta 16 g mišinio. Yra žinoma, jog 4 g antros medžiagos užima 0,5 cm³ didesnį tūrį negu 4 g trečios medžiagos. Mišinyje esančios antros medžiagos masė yra dvigubai didesnė už pirmosios. Raskite trečios medžiagos tankį.

13.439. Ieškomą dviženklį skaičių padidinus 46 vienetais, gaunamas skaičius, kurio skaitmenų sandauga lygi 6. Ieškomo skaičiaus skaitmenų suma lygi 14. Raskite tą skaičių.

13.440. Nubrėžtos dvi viena kitai statmenos ašys Ox ir Oy ir pažymėtas taškas $A(a;\ a)$; čia $a>0$. Ox ašyje pažymėtas taškas M, Oy ašyje — taškas P taip, kad trikampis AMP yra lygiakraštis. Raskite taškų M ir P koordinates.

13.441. Pasroviui per atstumą l m vienas nuo kito yra tiltai A ir B. Kai sportininkas plaukė pro tiltą A tilto B link, jam buvo numesti du kamuoliai. Pirmą kamuolį sportininkas sugavo, o antrą paliko plaukti pasroviui. Nuplaukęs su kamuoliu tam tikrą ruožą, sportininkas paliko sugautą kamuolį ir ėmė plaukti prieš srovę pasiimti antro kamuolio. Sugriebęs jį, vėl pasuko tilto B link ir pasiekė jį kartu su srovės nešamu pirmu kamuoliu. Sportininko greitis visą laiką buvo k kartų didesnis už upės tėkmės greitį. Kokį atstumą teko nuplaukti sportininkui?

13.442. Į parduotuvę atvežė pirmos ir antros rūšies prekių už 450 rb. Prekių žinovai nustatė, kad visas gautas prekes galima pardavinėti tik antros rūšies kaina, dėl to firma patirtų 50 rb nuostolį. Atvykę specialistai neatlyginamai ne tik ištaisė pirmos rūšies prekių defektus, bet ir antros rūšies prekes pavertė pirmos rūšies prekėmis. Po to visos prekės buvo parduotos pirmos rūšies kaina, ir parduotuvė davė firmai 30 rb pelno. Kokia suma iš pradžių buvo įvertintos visos pirmos rūšies ir kokia — visos antros rūšies prekės?

13.443. Kolba buvo pilna druskos tirpalo. Po to $\frac{1}{n}$ jo nupilta į mėgintuvėlį, o kolboje likęs tirpalas virinamas tol, kol druskos kiekis procentais padidėjo dvigubai. Tada į kolbą buvo supiltas mėgintuvėlyje esantis tirpalas, dėl to druskos kiekis tirpale padidėjo p%, palyginti su pradiniu. Kiek procentų druskos buvo pradiniame tirpale? Kurią pradinio tirpalo dalį reikia nupilti, kad po aprašytos procedūros druskos procentai padidėtų pusantro karto?

13.444. Žinodamas trikampio kraštinių ilgį, mokinys apskaičiavo jo plotą ir atkreipė dėmesį į tai, kad to trikampio kiekvienos kraštinės ilgio ir ploto reikšmės lygios atitinkamai keturiems vienas po kito einantiems natūraliesiems skaičiams. Kokio ilgio trikampio kraštinės?

13.445. Ant stalo stovi ritinio formos indas su vandeniu. Indo pagrindo spindulys lygus R. Į tą indą įmestas r spindulio rutuliukas nusileido ant dugno, o vandens paviršius pakilo tiek, kad lietė rutuliuką. Įrodykite, kad taip pat bus ir tada, kai į tą patį indą su tuo pačiu vandens kiekiu įmesime kito spindulio rutuliuką. Raskite to rutuliuko spindulį ir nustatykite sąlygas, kuriomis jis bus didesnis ir kuriomis mažesnis už pirmojo rutuliuko spindulį.

13.446. Iš tos pačios vietovės tuo pačiu metu ta pačia kryptimi tiesiu plentu pastoviu, bet skirtingu greičiu išėjo du pėstieji. Po 2 h atstumas tarp jų buvo lygus s km. Po to pėstieji paspartino žingsnį ir kiekvieną kilometrą nueidavo 10 min greičiau. Dar po 2 h atstumas tarp jų buvo lygus $3s$ km. Apskaičiuokite atstumą, kurį kiekvienas pėsčiasis nuėjo per pirmąsias dvi valandas.

13.447. Lyginant du stačiakampio gretasienio formos tašelius, nustatyta, kad antro tašelio ilgis, plotis ir aukštis atitinkamai 1 cm didesnis negu pirmo tašelio, o antro tašelio tūris ir visas paviršius atitinkamai 18 cm³ ir 30 cm³ didesnis negu pirmo. Kam lygus pirmo tašelio visas paviršius?

13.448. Iš stoties A išvažiavo vienas elektrinis traukinys, o po 12 min ta pačia kryptimi — kitas, ir abu tuoj pat įgijo vienodą pastovų 50 km/h greitį. Kokiu pastoviu greičiu važiavo priešinis traukinys, jeigu tarp jo susitikimo su pirmu ir antru elektriniu traukiniu praėjo 5 min?

13.449. Ieškomas triženklis skaičius prasideda skaitmeniu 1. Jeigu jį perkeltume į skaičiaus paskutinio skaitmens vietą, tai gautume naują triženklį skaičių, kuris būtų $9a^{1/\lg a}$ didesnis už ieškomąjį. Raskite pradinį triženklį skaičių.

13.450. Jeigu laiko atskaitos pradžioje medžiagos A buvo m_0 g, o medžiagos B — $2m_0$ g, tai po t metų dėl radioaktyviojo skilimo šių medžiagų liks atitinkamai $m=m_0\cdot 2^{-\lambda_1 t}$ ir $M=2m_0\cdot 2^{-\lambda_2 t}$; čia λ_1 ir λ_2 — konstantos, priklausančios nuo medžiagų savybių. Apskaičiuokite kiekvienos šių medžiagų skilimo pusamžį, t. y. po kiek metų liks pusė kiekvienos šių medžiagų pradinio kiekio, jeigu žinoma, kad medžiagos B skilimo pusamžis perpus mažesnis negu medžiagos A ir kad per 20 metų medžiagų bendra masė sumažės 8 kartus.

II DALIS

ALGEBRA, GEOMETRIJA (PAPILDOMI UŽDAVINIAI). ANALIZĖS PRADMENYS. KOORDINATĖS IR VEKTORIAI

14 SKYRIUS
PAPILDOMI ALGEBROS UŽDAVINIAI

1 pavyzdys. Įrodykite, kad $\log_2 \cos 20° + \log_2 \cos 40° + \log_2 \cos 80° = -3$.

△ Teiginys yra teisingas, jeigu $\log_2(\cos 20° \cos 40° \cos 80°) = -3$ (pritaikyta (7.4) formulė), arba $\log_2 A = -3$; čia $A = \cos 20° \cos 40° \cos 80°$. Paskutiniosios lygybės dešiniąją pusę padauginkime ir padalykime iš $8 \sin 20°$:

$$A = \frac{4 \cdot 2 \sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80°}{8 \sin 20°}.$$

Tris kartus nuosekliai pritaikę (3.13) formulę, gauname:

$$A = \frac{4 \sin 40° \cos 40° \cos 80°}{8 \sin 20°} = \frac{2 \sin 80° \cos 80°}{8 \sin 20°} = \frac{\sin 160°}{8 \sin 20°} =$$
$$= \frac{\sin(180° - 20°)}{8 \sin 20°} = \frac{\sin 20°}{8 \sin 20°} = 2^{-3}.$$

Vadinasi, $\log_2 A = \log_2 2^{-3} = -3$. ▲

2 pavyzdys. Su kuriomis p reikšmėmis lygtis

$$x^2 - (2^p - 1)x - 3(4^{p-1} - 2^{p-2}) = 0$$

turi lygias šaknis?

△ Kvadratinė lygtis turi lygias šaknis, kai jos diskriminantas $D = b^2 - 4ac$ lygus nuliui. Randame

$$D = (2^p - 1)^2 + 12(4^{p-1} - 2^{p-2}) = 2^{2p} - 2 \cdot 2^p + 1 +$$
$$+ \frac{12 \cdot 2^{2p}}{4} - \frac{12 \cdot 2^p}{4} = 4 \cdot 2^{2p} - 5 \cdot 2^p + 1.$$

Kintamąjį 2^p pakeitę kintamuoju y, gauname lygtį $4y^2 - 5y + 1 = 0$, kurios šaknys $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = 1$. Sprendžiame lygtis $2^p = 2^{-2}$ ir $2^p = 1$; iš čia $p = -2$ ir $p = 0$. ▲

3 pavyzdys. Išspręskite lygtį $|x-1| \cdot |x+2| = 4$.

△ Kadangi $|xy| = |x| \cdot |y|$, tai duotąją lygtį užrašysime taip: $|(x-1) \times (x+2)| = 4$. Ji ekvivalenti dviejų sistemų visumai:

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > 0, \\ (x-1)(x+2) = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x+2) < 0, \\ -(x-1)(x+2) = 4. \end{cases}$$

Pirmos sistemos lygties šaknys $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ tenkina tos sistemos nelygybę, taigi ir pačią sistemą; antros sistemos kvadratinės lygties diskriminantas neigiamas; vadinasi, ši sistema yra nesuderinta. Gauname atsakymą: -3; 2. ▲

4 pavyzdys. Su kuriomis sveikosiomis a reikšmėmis nelygybė

$$2 \log_{0,5} a - 3 + 2x \log_{0,5} a - x^2 < 0$$

yra teisinga bet kuriame taške x?

△ Duotąją nelygybę pakeičiame jai ekvivalenčia: $x^2 - 2x \log_{0,5} a + 3 - 2 \log_{0,5} a > 0$. Koeficientas prie x^2 yra teigiamas, todėl nelygybė bus teisinga kiekviename taške x tada, kai kvadratinio trinario diskriminantas neigiamas (žr. 9 skyriaus 4⁰ nurodymą). Vadinasi,

$$4 \log^2_{0,5} a - 4(3 - 2 \log_{0,5} a) < 0, \text{ arba } \log^2_{0,5} a + 2 \log_{0,5} a - 3 < 0.$$

Kintamąjį $\log_{0,5} a$ pakeitę kintamuoju y, gauname nelygybę $y^2 + 2y - 3 < 0$; $f(y) = y^2 + 2y - 3 = 0$, kai $y_1 = 1$, $y_2 = -3$. 14.1 paveiksle schemiškai parodyta parabolės padėtis y ašies atžvilgiu. Iš čia randame: $-3 < y < 1$.



14.1 pav.

Sprendžiame nelygybę $-3 < \log_{0,5} a < 1$. Pritaikę (7.6) ir (7.2) formules, ją užrašome taip: $\log_{0,5} 0{,}5^{-3} < \log_{0,5} a < \log_{0,5} 0{,}5$. Kadangi logaritmo pagrindas $0 < 0{,}5 < 1$, tai pagal 9 skyriaus 7⁰ nurodymą gauname šiai nelygybei ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0{,}5 < a < 0{,}5^{-3}, \text{ t. y. } 0{,}5 < a < 8. \end{cases}$$

Sveikosios a reikšmės, tenkinančios paskutiniąją nelygybę, yra skaičiai 1, 2, ..., 7. ▲

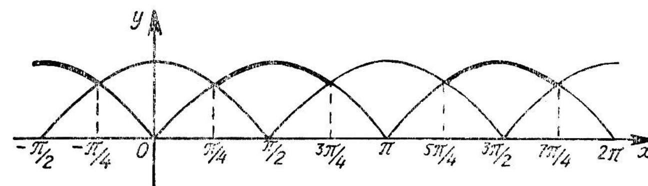
5 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

△ Kadangi laipsnio pagrindas $10 > 1$, tai, remdamiesi 9 skyriaus 7⁰ nurodymu, gauname ekvivalenčią nelygybę $|\sin x| > |\cos x|$. Iš čia, atsižvelgę į 9 skyriaus 2⁰ d) nurodymą, gauname $\sin^2 x > \cos^2 x$, arba

$$\cos^2 x - \sin^2 x < 0,$$
$$\cos 2x < 0;$$

iš čia $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Taigi atsakymas toks: $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. ▲

Nelygybės $|\sin x| > |\cos x|$ sprendinius taip pat galima rasti grafiškai — viename brėžinyje reikia nubraižyti funkcijų $|\sin x|$ ir $|\cos x|$ grafikus (14.2 pav.).



14.2 pav.

6 pavyzdys. Kai $mn < 0$, funkcijų $y = m \cdot 3^x + n$ ir $y = n \cdot 3^{-x} + m$ grafikai susikerta dviejuose taškuose, kurių vienas yra abscisių ašyje, o kitas — ordinačių ašyje. Įrodykite.

△ Grafikų susikirtimo taškų abscisės yra lygties $m \cdot 3^x + n = n \cdot 3^{-x} + m$ šaknys; visus jos narius padauginę iš $3^x \neq 0$ ir sugrupavę panašiuosius dėmenis, gauname: $m \cdot 3^{2x} + (n-m)3^x - n = 0$.

Tarkime, kad $3^x = y > 0$, ir išspręskime kvadratinę lygtį $my^2 + (n-m)y - n = 0$. Turime $D = (n-m)^2 + 4mn = (n+m)^2$. Vadinasi,

$$y_{1,2} = \frac{-(n-m) \pm (n+m)}{2m}; \; y_1 = 1, \; y_2 = -\frac{n}{m} > 0 \; (mn < 0 \text{ pagal sąlygą}).$$

Iš lygties $3^x = 1$ randame $x = 0$, o iš lygties $3^x = -\frac{n}{m}$ gauname $x = \log_3\left(-\frac{n}{m}\right)$. Raskime susikirtimo taškų ordinates. Jeigu $x_1 = 0$, tai $y_1 =$

$=m\cdot 3^0+n=m+n$. Taškas $(0;\ m+n)$ yra ašyje Oy. Jeigu $x_2=\log_3\left(-\frac{n}{m}\right)$, tai $y_2=m\cdot 3^{\log_3\left(-\frac{n}{m}\right)}+n=m\left(-\frac{n}{m}\right)+n=0$ $\left(\text{nes pagal (7.1) lygybę } 3^{\log_3\left(-\frac{n}{m}\right)}=-\frac{n}{m}\right)$. Taškas $\left(\log_3\left(-\frac{n}{m}\right);\ 0\right)$ yra ašyje Ox. ▲

Suprastinkite reiškinius (**14.001—14.004**):

14.001. $\frac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2}$.

14.002. $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^3}}$.

14.003. $\sqrt{\frac{1-\cos 246^\circ}{1+\cos 246^\circ}}$

14.004. $\sqrt{\frac{\cos(\pi+\alpha)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$.

Išspręskite lygtis (**14.005—14.026**):

14.005. $\sqrt{x^2-1}-\frac{6}{\sqrt{x^2-1}}=1$.

14.006. $\sqrt{\frac{1+x}{x}+\frac{1}{x}}=5$.

14.007. $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

14.008. $\frac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4}=3^{\sqrt{-3x}}$.

14.009. $4^{\log_2 x}+x^2=8$.

14.010. $\lg^2 x^2=1$.

14.011. $\log_2\log_3\log_4 x=0$.

14.012. $x^{2\log_2 x}=8$.

14.013. $\log_3(\log_{\frac{1}{2}}^2(x-4))=0$.

14.014. $\lg^2 10x+\lg x=19$.

14.015. $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=5$.

14.016. $x^{\log_3 x}=\sqrt[4]{3x^3}$.

14.017. $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

14.018. $\log_2(\sqrt{4x+5}-1)=0{,}5\log_2(\sqrt{4x+5}+11)$.

14.019. $\log_2^2 4x-4\log_4 x=12$.

14.020. $\log_{x+6}(2x-\sqrt{x+6})=0{,}5$.

14.021. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$.

14.022. $2x-\lg(5^{2x}+4^x-16)=x\lg 4$.

14.023. $x+\lg(1+4^x)=\lg 50$.

14.024. $\cos^{58}x+\sin^{40}x=1$.

14.025. $\log_{\cos x}\sin x=1$.

14.026. $\operatorname{ctg}(\sin x)=1$.

Išspręskite lygčių sistemas (**14.027—14.032**):

14.027. $\begin{cases} 6{,}751x+3{,}249y=26{,}751, \\ 3{,}249x+6{,}751y=23{,}249. \end{cases}$

14.028. $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2{,}5, \\ x^2-y^2=3{,}0. \end{cases}$

14.029. $\begin{cases} 2^x+2^y=5, \\ 2^{x+y}=4. \end{cases}$

14.030. $\begin{cases} 8^x=10y, \\ 2^x=5y. \end{cases}$

14.031. $\begin{cases} 0{,}5\log_2 x-\log_2 y=0, \\ x^2-5y^2+4=0. \end{cases}$

14.032. $\begin{cases} x^{\log_y x}=2, \\ y^{\log_x y}=16. \end{cases}$

14.033. Su kuria q reikšme lygties $x^2-x-q=0$ šaknų kubų suma lygi 19?

14.034. Su kuriomis p reikšmėmis lygties $x^2+px+35=0$ šaknų kvadratų suma lygi 74?

14.035. Nespręsdami lygties $x^2-3x-10=0$, apskaičiuokite jos šaknų kubų sumą.

14.036. Ar lygtis $(2x-1)^2+(x+1)^2=0$ turi realiųjų šaknų?

14.037. Kiek šaknų turi lygtis $0{,}3^x=x^2-x+1$?

14.038. Patikrinkite, ar lygties $2^x+x^2-3=0$ abi šaknys didesnės už $-\sqrt{3}$, be to, ar viena jų tiksliai lygi 1.

14.039*. Išspręskite lygtį $x^3-7x-6=0$. Įsitikinkite, kad visų jos šaknų suma lygi nuliui. Ar galima tuo įsitikinti neieškant pačių šaknų?

14.040. Grafiškai išspręskite lygtį $|x-1|+2x-5=0$.

14.041. Grafiškai įrodykite, kad lygtis $\lg x=\lg 2x$ neturi šaknų.

14.042. Kiek šaknų turi lygtis $x^3=\sin 3x$?

14.043. Įrodykite, kad lygtis $\sqrt{9-x^2}-\log_3(|x|-3)=0$ neturi šaknų.

14.044. Kiek realiųjų sprendinių turi lygčių sistema

$$\begin{cases} x^2+y=5, \\ x+y^2=3? \end{cases}$$

14.045. Išspręskite lygtį $|x^2+1{,}5x+1|=m$. Su kuriomis m reikšmėmis ji turi vienintelį sprendinį?

14.046. Skaičiai 1, 7, 13, ..., x sudaro aritmetinę **progresiją.** Jų suma lygi 280. Raskite skaičių x.

14.047. Raskite lygties

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{x+2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

racionaliąsias šaknis.

14.048. Raskite lygties $x^3-|x-1|=1$ sveikąsias šaknis.

14.049. Bikvadratinė lygtis turi realiųjų šaknų. Kam lygi jos visų šaknų suma?

14.050. Įrodykite, kad seka, išreikšta formule $y_n=\frac{10n+7}{2n}$, yra mažėjanti.

14.051. Ar ekvivalenčios lygtys

$$(1+2\sin x)\operatorname{tg} x=0 \quad \text{ir} \quad \frac{1+2\sin x}{\operatorname{ctg} x}=0?$$

14.052. Įrodykite, kad lygtis $\sin x+\sin 2x=2$ neturi šaknų.

14.053. Su kuria m reikšme sistema

$$\begin{cases} 2x+(m-1)y=3, \\ (m+1)x+4y=-3 \end{cases}$$

turi be galo daug sprendinių? Neturi sprendinių?

Koks skaičiaus ženklas (**14.054—14.056**)?

14.054. $\log_{1,7}(0,5(1-\log_7 3))$.

14.055. $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}\left(\log_2 5-1\right)\right)$.

14.056. $\dfrac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3} 4-\log_{0,3} 3}$.

14.057. Kam lygus logaritmo pagrindas, su kuriuo skaičius a lygus jo paties logaritmui?

14.058. Užrašykite skaičių x dešimtaine trupmena, kai $x=49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$.

14.059. Apskaičiuokite $x=0,8(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$.

14.060. Be lentelių apskaičiuokite $\lg 32,11-\lg 0,03211$.

14.061. Apskaičiuokite $\log_{1/2}28$, kai $\log_7 2=a$.

14.062. Raskite $\lg^2\sqrt{x}$, kai $\log_x 100=a$.

14.063. Raskite $\log_9 2,97$, kai $\lg 3=a$ ir $\lg 11=b$.

Apskaičiuokite (**14.064—14.067**):

14.064. $\lg\operatorname{tg} 2°+\lg\operatorname{tg} 4°+\lg\operatorname{ctg} 2°+\lg\operatorname{ctg} 4°$.

14.065. $\lg\operatorname{tg} 3°\cdot\lg\operatorname{tg} 6°\cdot\lg\operatorname{tg} 9°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg} 87°$.

14.066. $\lg\operatorname{tg} 1°\cdot\lg\operatorname{tg} 2°\cdot\lg\operatorname{tg} 3°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg} 89°$.

14.067. $\lg\operatorname{tg} 1°+\lg\operatorname{tg} 2°+\lg\operatorname{tg} 3°+\ldots+\lg\operatorname{tg} 89°$.

14.068. Yra žinoma, kad $\lg 2=0,3010$. Kam lygi sandauga $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9$?

14.069. Apskaičiuokite $\log_2 36$, kai $\log_{12} 9=m$.

14.070. Koks sandaugos

$$\lg\sin 32°\cdot\lg\cos 17°\cdot\lg\operatorname{tg} 40°\cdot\lg\operatorname{ctg} 20°$$

ženklas?

14.071. Koks yra skaičiaus $\lg\operatorname{arctg} 2$ ženklas?

14.072. Įrodykite, kad $\log_2 5$ — iracionalusis skaičius.

14.073. Ar visada lygybė $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$ yra neteisinga?

14.074. Įrodykite: jeigu $a^2+b^2=7ab$, tai

$$\log_k\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_k a+\log_k b).$$

14.075. Raskite klaidą šiuose samprotavimuose:

$$\frac{1}{4}>\frac{1}{8}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^3; \quad 2\log_a\frac{1}{2}>3\log_a\frac{1}{2}.$$

Abi nelygybės puses suprastinę iš $\log_a\frac{1}{2}$, gauname $2>3$.

Išspręskite nelygybes (**14.076—14.100**):

14.076. $x^3+4\leqslant x^2+4x$.

14.077. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>\frac{6}{x^3}$.

14.078. $-\frac{15}{x^2}-\frac{16}{x^4}<-1$.

14.079. $x^3-2x^2-x+2>0$.

14.080. $x^2-4|x|+3>0$.

14.081. $x^2-5|x|+6<0$.

14.082. $\dfrac{3|x|-14}{x-3}\leqslant 4$.

14.083. $\dfrac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

14.084. $\left|\dfrac{2}{x-4}\right|>1$.

14.085. $\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}+x}{x}>0$.

14.086. $7^{x^3-4x-2}>\frac{1}{49}$.

14.087. $0,5^{(x^2+x-2)(3-x)}>1$.

14.088. $1<2^{x(x+2)}<8$.

14.089. $\log_{0,5}(2x+6)>\log_{0,5}(x+8)$.

14.090. $2\lg x<\lg^2 x$.

14.091. $\lg\frac{6}{x}>\lg(x+5)$.

14.092. $\log_2(1+\log_{1/3} x)<1$.

14.093. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$.

14.094. $x^{\log_{0,2} 0,3}+0,3^{\log_{0,2} x}\leqslant 0,18$.

14.095. $\log_{1/2}\log_3 x>1$.

14.096. $x^2\log_2 0,3-2\log_2 0,09>0$.

14.097. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}<1$.

14.098*. $x^{-3x-8}>x^7$.

14.099. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\geqslant 0$.

14.100. $\sin x\cos x>\frac{1}{4}$.

14.101. Su kuriais ašies Ox taškais teisinga nelygybė: a) $\sin x<\frac{1}{2}$; b) $|\sin x|<\frac{1}{2}$?

14.102. Kas daugiau: $\sin 2x$ ar $2\sin x$?

14.103. Su kiekviena teigiama x reikšme nustatykite, kas daugiau: $\lg x^2$ ar $\lg^2 x$.

14.104. Raskite leistinąsias x reikšmes, kai $\log_x(a^2+1)<0$.

14.105. Kuris skaičius didesnis: 3^{400} ar 4^{300}?

14.106. Su kuriomis a reikšmėmis teisinga nelygybė $\frac{5a+6}{4-a}>1$?

14.107. Ar yra tokių a reikšmių, su kuriomis lygties $x^2-2(a-3)x-a+3=0$ šaknys priklauso intervalui $(-3; 0)$?

14.108. Su kuriomis x reikšmėmis reiškinys $\log_{1/2}(x^2-8)$ yra neneigiamas?

14.109. Įrodykite, kad $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, kai $ab>0$.

14.110*. Duota: a, b, c — realieji skaičiai ir $a+b+c=1$. Įrodykite, kad $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.

14.111. Įrodykite, kad trikampio statinių kubų suma mažesnė už įžambinės kubą.

14.112. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio trijų pusiaukraštinių ilgių suma mažesnė už trikampio perimetrą, bet didesnė už pusperimetrį.

14.113. Trikampio statiniai ir įžambinė atitinkamai lygūs a, b ir c. Įrodykite, kad $a+b\leqslant c\sqrt{2}$.

14.114*. Įrodykite nelygybę $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}$ $(a>0,\ b>0)$.

Nubraižykite funkcijų grafikus (**14.115—14.134**):

14.115. a) $y=x^2+5x+6$; b) $y=x^2+5|x|+6$; c) $y=|x^2+5x+6|$; d) $y=|x^2+5|x|+6|$.

14.116. a) $y=-x^2+4x-5$; b) $y=-x^2+4|x|-5$; c) $y=|-x^2+4x-5|$; d) $y=|-x^2+4|x|-5|$.

14.117. a) $y=\log_{1/2}x$; b) $y=\log_{1/2}(-x)$; c) $y=\log_{1/2}|x|$; d) $y=|\log_{1/2}x|$; e) $y=|\log_{1/2}|x||$.

14.118. a) $y=\sin x$; b) $y=2\sin x$; c) $y=\sin 2x$; d) $y=\sin\frac{x}{2}$.

14.119. a) $y=\cos x$; b) $y=\cos|x|$; c) $y=|\cos x|$; d) $y=|\cos|x||$.

14.120. $y=\frac{1+x}{x}$. **14.121.** $y=\frac{1}{x^2-9}$.

14.122. $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$. **14.123.** $y=2^{1/x}$.

14.124. $y=-\frac{1}{\cos x}$. **14.125.** $y=\log_2(\sin x\cos x)$.

14.126. $y=\log_2\sin x$. **14.127.** $y=|x+1|-x$.

14.128. $y=x|x|+1$. **14.129.** $y=x+\frac{|x|}{x}$.

14.130. $y=-2^{-|x|}$. **14.131.** $y=2^x\cdot 2^{|x|}$.

14.132. $y=\lg x+|\lg x|$. **14.133.** $y=\frac{|x-1|}{x-1}\cdot(x^2-4)$.

14.134. $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$.

14.135. Kaip, žinant $f(x)$ grafiką, nubraižyti $|f(x)|$ grafiką? Ar galima pagal $|f(x)|$ grafiką atkurti $f(x)$ grafiką?

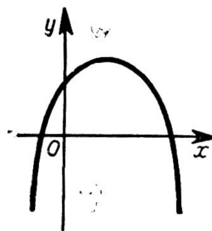
14.136. Išreikškite paprasčiausia formule funkciją f, kuri vienu metu yra lyginė, nelyginė, nedidėjanti, nemažėjanti ir periodinė.

14.137. Jeigu $\log_a\sin 40°+\log_a\operatorname{tg}40°+\log_a\cos^{-1}40°=b$, tai kam lygi suma $\log_a\sin 50°+\log_a\operatorname{tg}50°+\log_a\cos^{-1}50°$?

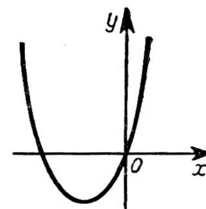
14.138. Nubraižykite funkcijos

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & \text{kai } x\neq 0,\\ 2, & \text{kai } x=0\end{cases}$$

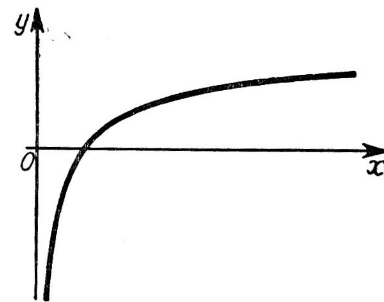
grafiką ir įrodykite, kad $x=0$ yra šios funkcijos minimumo taškas. Be to, remdamiesi šiuo pavyzdžiu, įrodykite, kad funkcijos mažėjimo intervalas nebūtinai yra į kairę, o didėjimo intervalas — į dešinę nuo minimumo taško; gali būti ir atvirkščiai.



14.3 pav.



14.4 pav.



14.5 pav.

14.139. 14.3 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas. Koks yra kiekvienas iš skaičių a, b ir c: teigiamas, neigiamas ar lygus nuliui?

14.140. 14.4 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas. Koks yra kiekvienas iš skaičių a, b ir c: teigiamas, neigiamas ar lygus nuliui?

14.141. Nubraižykite funkcijos $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ grafiką, kai $a>0$ ir $b^2-4ac=0$.

Raskite funkcijų apibrėžimo sritį (**14.142—14.147**):

14.142. $y=\frac{\lg x}{\arcsin(x-3)}$. **14.143.** $y=\frac{1}{1-\sqrt{x^2}}$.

14.144. $y=\sqrt{\lg\frac{1-2x}{x+3}}$.   **14.145.** $y=(\log_3 x-\log_2 x)^{-1/2}$.

14.146. $y=\sqrt{2^x-3^x}$.   **14.147.** $y=\log_3\log_{1/2} x$.

Raskite funkcijos reikšmių sritį (**14.148—14.150**):

14.148. $y=\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$.

14.149. $y=(\sin x+\cos x)^2$.

14.150. $y=5\sin x-12\cos x$.

Koordinačių plokštumoje xOy pavaizduokite nurodytas kintamųjų x ir y sąsajas (**14.151—14.159**):

14.151. $|x|+|y|=1$.   **14.152.** $|x|-|y|=1$.

14.153. $x+|x|=y+|y|$.   **14.154.** $|y|=\log_{0,5}|x|$.

14.155. $|y|=|\sin x|$.   **14.156.** $|y|=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

14.157. $3x-4y+12>0$ ir $x+y-2<0$.

14.158. $y+3\geqslant x^2+2x$ ir $x+y\leqslant 3$.

14.159. $\log_2(x+y-1)<0$.

14.160. 14.5 paveiksle pavaizduotas funkcijos $y=\log_a x$ grafikas (masteliai koordinačių ašyse vienodi). Remdamiesi juo, raskite skaičių a.

14.161. Raskite funkcijos $y=x^2-6x+11$ mažiausią reikšmę.

14.162. Raskite funkcijos $y=\frac{8}{x^2}+\frac{x^2}{2}$ mažiausią reikšmę.

14.163. Raskite funkcijos $y=1+2x-x^2$ didžiausią reikšmę.

14.164. Įrodykite, kad parabolė $y=x^2-x+5{,}35$ nekerta funkcijos $y=2\sin x+3$ grafiko.

14.165. Įrodykite, kad tiesės $x+y=2$ visų taškų koordinatės tenkina nelygybę $x^2+y^2\geqslant 2$, ir šį faktą paaiškinkite geometriškai.

Remdamiesi faktorialo apibrėžimu $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, suprastinkite trupmenas (**14.166—14.169**):

14.166. $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.   **14.167.** $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

14.168. $\dfrac{(n+2)n!}{(n+1)!}$.   **14.169.** $\dfrac{((n+2)!+n!)(n+1)}{(n+2)!(n^2+3n+3)}$.

14.170. Įrodykite, kad lygties $\sin(x+y)=0$ grafikas yra begalinė visuma vienodai nutolusių viena nuo kitos lygiagrečių tiesių.

14.171. Duota:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{kai } x \text{ — racionalusis skaičius;}\\ -1, & \text{kai } x \text{ — iracionalusis skaičius.}\end{cases}$$

Ar ši funkcija yra pastovioji, kai x — realusis skaičius? O jos kvadratas?

14.172. Su kuriomis α ir β reikšmėmis iš lygybės $\sin(\alpha+\beta)=3\sin(\alpha-\beta)$ išplaukia lygybė $\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta$?

14.173. Raskite z, kai $\operatorname{tg}\alpha=3^z$, $\operatorname{tg}\beta=3^{-z}$ ir $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$.

14.174. Nustatykite mažėja ar didėja duotoji seka: a) $x_n=3n^2-n$; b) $x_n=n^2-3n$; c) $x_n=7n-n^2$; d) $y_n=\lg\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

14.175. Raskite sveikąsias x reikšmes, su kuriomis nelygybė $\log_3(x+3)^2\leqslant 2$ yra teisinga.

14.176*. Įrodykite, kad pirmųjų n nelyginių skaičių kubų suma lygi $n^2(2n^2-1)$, kai n — bet kuris natūralusis skaičius.

14.177. Išnagrinėję atvejus $0<a<1$ ir $a>1$, išsiaiškinkite, ar egzistuoja skaičius $\sqrt{\log_a\operatorname{tg}40°\cdot\log_a\operatorname{tg}70°}$.

14.178. Jeigu aritmetinė kvadratinė šaknis iš dviejų natūraliųjų skaičių sandaugos yra racionalusis skaičius, tai ir kvadratinė šaknis iš jų dalmens — racionalusis skaičius. Įrodykite.

14.179. Atskirai neieškodami x ir y, apskaičiuokite sumą x^3y+xy^3, kai $x-y=4$ ir $xy=3$.

14.180. Duota: $\log_b a=m$ ir $\log_c b=n$. Kam lygus $\log_{bc} ab$?

14.181. Įrodykite, kad nelygybė $|\sin x+\sqrt{3}\cos x|\leqslant 2$ teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis.

14.182. Skaičių ašyje pažymėkite taškus, vaizduojančius skaičius $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

14.183. Kas daugiau: 123% skaičiaus 456 ar 456% skaičiaus 123? Kokią procentų savybę galima suformuluoti apibendrinant atsakymą į šį klausimą? Pagrįskite šią savybę.

14.184. Tam tikrų prekių kaina buvo sumažinta du kartus — iš pradžių 15%, po to dar 20%. Kiek iš viso procentų sumažinta kaina?

14.185. Dviejų skaičių dešimtainių logaritmų aritmetinis vidurkis lygus q. Kam lygus pačių skaičių kubų geometrinis vidurkis?

14.186. 0,01 tikslumu apskaičiuokite $2\sqrt{5{,}21}$.

14.187. Įrodykite, kad skaičius $\sqrt{12345{,}67}$ yra iracionalusis.

14.188. Panaikinkite iracionalumą trupmenos $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$ vardiklyje.

14.189. Kas daugiau: a) $0{,}8^{-1{,}3}$ ar $0{,}8^{-1{,}4}$; b) $\log_{1/3}0{,}5$ ar $\log_3 0{,}5$?

14.190*. Kiek skaitmenų turi skaičius 2^{100}?

14.191. Įrodykite, kad nelygybė $3^n \geqslant n+2$ yra teisinga, kai n — natūralusis skaičius.

14.192. Sandaugą $(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)$ išreikškite skaičiaus 2 laipsnių suma.

14.193. Pirmu čiaupu tolygiai tekantis vanduo pripildo baką per 3 h, o antru čiaupu — per 5 h. Per kiek laiko būtų pripildytas bakas, jeigu tuo pačiu metu atsuktume abu čiaupus?

14.194. Pirmu čiaupu tolygiai tekantis vanduo pripildo baką per 3 h, o antru čiaupu vanduo tolygiai išteka iš pilno bako per 5 h. Per kiek laiko prisipildys tuščias bakas, tuo pačiu metu atsukus abu čiaupus?

14.195. Ar egzistuoja tokia aritmetinė progresija, kurios bet kurio skaičiaus narių suma lygi: a) narių skaičiaus kvadratui; b) narių skaičiaus kubui?

14.196. $a^{128}-b^{128}$ padalykite iš sandaugos

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ldots(a^{64}+b^{64}).$$

14.197. Įrodykite, kad lygtis $x^8+p^2x^6+q^2x^4+r^2x^2=0$ neturi šaknų, nelygių nuliui.

14.198*. Išreikškite daugianarį x^4+4 dviejų antrojo laipsnio daugianarių sandauga.

14.199*. Raskite sandaugą xy, kai $x+y=a$ ir $x^4+y^4=b^4$.

14.200*. Išreikškite daugianarį x^8+y^8 dviejų ketvirtojo laipsnio daugianarių, kurių kintamieji x ir y, sandauga.

14.201*. Išskaidykite reiškinį a^4+4b^4 dauginamaisiais.

14.202. Raskite kvadratinės funkcijos $y=ax^2+bx+c$ koeficientus, žinodami, kad su $x=-0{,}75$ ji įgyja didžiausią reikšmę 3,25, o su $x=0$ — reikšmę 1.

14.203. Iš visų keturkampių, kurių žinomos įstrižainės m ir n, išrinkite tą, kurio plotas didžiausias.

14.204. Nubraižykite funkcijos

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+1, \text{ kai } x\leqslant 0, \\ \cos x, \text{ kai } 0<x<\pi, \\ x^2-3\pi x+2\pi^2, \text{ kai } x\geqslant \pi, \end{cases}$$

grafiką. Nurodykite funkcijos reikšmę trūkio taške.

14.205. Su kuriomis x reikšmėmis lygybė

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=\frac{1-x^8}{1-x}$$

yra teisinga?

14.206. Įrodykite, kad su visomis realiosiomis x reikšmėmis daugianaris $x^4-2x^3+2x^2-8x+16$ įgyja teigiamas reikšmes.

14.207. Įrodykite, kad nė vieno lyginio skaičiaus, kuris nėra 4 kartotinis, negalima išreikšti dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų skirtumu.

14.208. Išskaidykite reiškinį $x-3\sqrt{xy}+2y$ $(x>0,\ y>0)$ dauginamaisiais.

14.209. Raskite tokias λ reikšmes, su kuriomis trinario $(\lambda-1)x^2+(\lambda-3)x+(\lambda-2)$ abi šaknys yra teigiamos.

14.210. Koks — pirminis ar sudėtinis — yra skaičius $2^{2001}+1$?

14.211. Duota taisyklingoji nesuprastinama trupmena $\frac{p}{q}$. Įrodykite, kad iš lygybės $\frac{a}{q}+\frac{r}{q}=1$ išplaukia, jog $\frac{a}{q}$ — nesuprastinama trupmena.

14.212. Nesunku pastebėti, kad lygties

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$$

x laipsnis yra ne aukštesnis kaip antrasis. Tačiau ši lygtis turi daugiau negu dvi šaknis — galima patikrinti, kad skaičiai $x_1=a$, $x_2=b$ ir $x_3=c$ ją tenkina. Kaip tai paaiškinti?

14.213*. Jeigu algebrinė lygtis, kurios koeficientai — sveikieji skaičiai, turi sveikąją šaknį, tai lygties laisvasis narys dalijasi iš tos šaknies. Įrodykite.

14.214*. Kaip išspręsti lygtį

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0,$$

jeigu žinoma, kad jos kairėje pusėje esantį daugianarį galima išskaidyti antrojo laipsnio dauginamaisiais, kurių koeficientai — sveikieji skaičiai?

14.215. Rankraštyje buvo parašyta sandauga

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right).$$

Spaustuvės rinkėjas nesurinko abiejų trupmenų:

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Jis teigė, kad gautas reiškinys yra tapačiai lygus parašytam rankraštyje. Ar jis teisus?

14.216. Su kuriomis a reikšmėmis funkcijos $y=(a+5)x^2+x+$ $+a-3$ grafikas kerta abscisių ašį abipus ordinačių ašies?

14.217. Nurodykite funkcijos

$$y=\log_2(x^2-2x+3)$$

apibrėžimo sritį. Ar šios funkcijos grafikas turi simetrijos ašį? Jeigu taip, tai kokią?

14.218. Nurodykite funkcijos

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+25}}$$

apibrėžimo sritį. Įrodykite, kad šios funkcijos grafikas simetriškas tiesės $x=5$ atžvilgiu.

14.219. Įrodykite, kad funkcija $y=\frac{2x+3}{5x-2}$ sutampa su jai atvirkštine funkcija.

22. Užsak. Nr. 1941.

14.220. Nurodykite, kurios šių funkcijų yra lyginės, kurios — nelyginės ir kurios — nei lyginės, nei nelyginės:

a) $y=\sin^3 x+\operatorname{ctg}^5 x$; b) $y=\sin 2x+\cos 3x$;

c) $y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$; d) $y=\sin^4 x+x^2+1$;

e) $y=x|x|$; f) $y=\frac{3^x-1}{3^x+1}$; g) $y=\arcsin\frac{x}{2}$;

h) $y=\arccos 3x$; i) $y=5\operatorname{arctg} x$; k) $y=-\operatorname{arcctg} x$.

14.221. Raskite funkcijos $f(n)=\arcsin(\sin n)$ reikšmes, kai $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7.

14.222. Ar galima teigti, kad dviejų periodinių funkcijų suma yra periodinė funkcija?

14.223. Įrodykite, kad lyginio skaičiaus nelyginių funkcijų sandauga yra lyginė funkcija.

14.224*. Dydis y yra kintamojo x logaritmo pagrindu 2 sveikoji dalis („charakteristika"). Nubraižykite y priklausomybės nuo x grafiką, kai x kinta nuo 0,5 iki 8,0.

14.225*. Jeigu p ir q — pirminiai skaičiai, didesni už 3, tai p^2-q^2 dalijasi iš 24. Įrodykite.

14.226. Jeigu dviejų realiųjų skaičių kubai yra lygūs, tai lygūs ir patys skaičiai. Įrodykite.

14.227. Bet kuriuos tris racionaliuosius skaičius a, b ir c visada galima laikyti kurios nors aritmetinės progresijos nariais. Ar teisingas šis teiginys?

14.228. Duota $n<m$; čia n ir m — natūralieji skaičiai. Kaip skaičių tiesėje išdėstyti taškai, vaizduojantys skaičius 1, $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{n}$? Kuris iš dviejų paskutinių taškų yra arčiau taško, vaizduojančio skaičių 1?

14.229. Kodėl sveikųjų skaičių kvadratus dalijant iš 3 niekada negaunama liekana 2?

14.230. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n reiškinys $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ yra natūralusis skaičius.

14.231. Jeigu kiekvienas iš dviejų duotų skaičių lygus dviejų skaičių kvadratų sumai, tai ir duotų skaičių sandaugą galima išreikšti dviejų skaičių kvadratų suma. Įrodykite.

14.232. Jeigu n — pirminis skaičius, didesnis už 3, tai $\frac{n^2-1}{24}$ — sveikasis skaičius. Įrodykite.

14.233. Įrodykite, kad n^7-n dalijasi iš 42, jeigu n — bet kuris sveikasis skaičius.

14.234. Įrodykite, kad

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

14.235. Įrodykite, kad

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

14.236. Įrodykite, kad kiekvieną nelyginį skaičių galima išreikšti dviejų sveikųjų skaičių kvadratų skirtumu.

14.237*. Taikydami matematinės indukcijos metodą, įrodykite, kad teisinga nelygybė $(1+a)^n\geqslant 1+na$ (n — natūralusis skaičius, $n\geqslant 2$ ir $a>-1$).

14.238*. Įrodykite, kad $|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|$. Tuo remdamiesi, matematinės indukcijos metodu įrodykite nelygybę

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|;$$

čia α_1, α_2, ..., α_n — realieji skaičiai.

14.239. Kaip pritaikyti tapatybę $\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ įrodant kad nelygybė

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$$

yra teisinga?

14.240*. Įrodykite, kad su visais $n\in N$ teisinga nelygybė

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2.$$

14.241. Iš lygybių $x=10^{\cos t}$, $y=10^{\sin t}$ eliminuokite t.

14.242. Iš lygybių $u=10^{\cos^3\varphi}$, $v=10^{\sin^3\varphi}$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ eliminuokite φ.

14.243. Kam lygu $\alpha+\beta$, kai $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{tg}\beta$ yra lygties $6x^2-5x+1=0$ šaknys?

14.244. Skaičiai α ir β $\left(0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ tokie, kad $\operatorname{ctg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\beta$ reikšmės yra lygties $x^2+px+q=0$ šaknys (laikoma, kad abi šaknys teigiamos). Raskite $\alpha+\beta$.

14.245. Išveskite $\operatorname{tg} 3\alpha$ formulę.

14.246. Sakykime, $\sin 10°=a$. Raskite $\sin 20°$ dviem būdais: pagal dvigubojo kampo sinuso formulę ir pagal 30° ir 10° kampų skirtumo sinuso formulę. Kodėl gavote „skirtingus" atsakymus?

14.247. Remdamiesi formule, siejančia $\sin 3\alpha$ ir $\sin\alpha$, įrodykite, kad $0{,}1<\sin 10°<0{,}2$.

14.248. Įrodykite, kad suma $\sin^n x+\cos^n x$ tapačiai lygi 1 tada ir tik tada, kai $n=2$.

14.249. Funkcijos $y=\sin^k x+\cos^k x$ ($k=0$, 1, 2, 3) reikšmes atkarpoje $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ palyginkite su vienetu.

14.250. Įrodykite, kad $\sin 495°-\sin 795°+\sin 1095°=0$.

14.251. $\sin^2 6°$ išreikškite 12° kampo sinusu.

14.252. Ar gali kampo kosinusas būti lygus: a) $a+\frac{1}{a}$, kai $a \neq 0$; b) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5-\sqrt{3}}}$?

14.253. Ar gali kampo tangentas ir kotangentas būti lygūs atitinkamai skaičiams $2+\sqrt{3}$ ir $2-\sqrt{3}$?

14.254. Nustatykite šių funkcijų periodus:

a) $y=\cos x+\sin \frac{x}{3}$; b) $y=\sin x+\cos \frac{x}{3}+\sin \frac{x}{5}$.

14.255. Nustatykite funkcijos $y=15 \sin^2 12x+12 \sin^2 15x$ periodą.

14.256. Nubraižykite smailųjį kampą, kurio tangentas du kartus didesnis už sinusą.

14.257. Raskite $\sin \alpha$, kai $\operatorname{tg} \alpha=2$ ir $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

14.258. Įrodykite, kad $8 \cos 20° \cos 40° \cos 80°=1$.

14.259. Su kuriomis α ir β reikšmėmis teisinga lygybė $\sin \alpha+\sin \beta=\sin(\alpha+\beta)$?

14.260. Raskite funkcijos

$$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(2x+\frac{2\pi}{15}\right)$$

didžiausią reikšmę.

14.261. Kam lygi didžiausia funkcijos $y=\sin(\sin x)$ reikšmė?

14.262. Raskite mažiausią ir didžiausią funkcijos $y=3 \sin^2 x+2 \cos^2 x$ reikšmę.

14.263. Kas daugiau: tg 1 ar arctg 1?

14.264. Kam lygi trupmena $\frac{1-\sin \alpha}{\cos \alpha}$, kai $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}=m$?

14.265. Apskaičiuokite $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, kai $\sin \alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos \beta=-\frac{1}{2}$.

14.266. Nustatykite sandaugos $\sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5$ ženklą.

14.267. Kas mažiau: $\frac{\pi}{4}$ ar $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}+\operatorname{arctg} \frac{5}{8}$?

14.268. Kas mažiau: $\frac{\pi}{4}$ ar $\arcsin \frac{2}{3}+\arccos \frac{2}{3}$?

14.269. Raskite tokius skaičius m ir M, kad nelygybė $m \leqslant \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \leqslant M$ būtų teisinga su visomis α reikšmėmis ir kad M bei m skirtumas būtų mažiausias.

14.270. Įrodykite, kad $\sin \alpha$ ir $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ženklai sutampa, kai $\alpha \neq k\pi$ (k — sveikasis skaičius).

14.271. Raskite tokias a ir b reikšmes, su kuriomis funkcija $y=(a-b)\sin^2 x+\frac{a+b}{2}\cos^2 x$ tapačiai (su visomis x reikšmėmis) lygi 2.

14.272. Ar galima lygybė $\sin \alpha+\cos \alpha=\sqrt[3]{3}$?

14.273. Ženklą $\vee$ pakeiskite tokiu ženklu ($<$, $>$, $\leqslant$ arba $\geqslant$), kad būtų teisingos šios sąsajos: a) $\lg \sin \alpha \vee 0$; b) $\sin \alpha+\cos \alpha \vee 1{,}5$; c) $\sqrt[3]{\sin \alpha}+\sqrt[3]{\cos \alpha} \vee 1$; d) $\operatorname{tg} \alpha+\operatorname{ctg} \alpha \vee 1{,}9$ (α — smailusis kampas).

14.274. Jeigu trikampio elementus sieja priklausomybė $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$, tai jis yra lygiašonis. Įrodykite.

14.275. Jeigu dviejų trikampio kampų kosinusų santykis lygus tų pačių kampų sinusų santykiui, tai toks trikampis yra lygiašonis. Įrodykite.

14.276. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio, kurio kraštinės lygios a, b, c, o prieš jas esantys kampai atitinkamai lygūs A, B, C, elementai tenkina lygybę

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

14.277. Jeigu trikampio elementus sieja sąsaja $\frac{a-b}{a}=1-2\cos C$, tai trikampis yra lygiašonis. Įrodykite.

14.278. Sakykime, A, B, C — trikampio kampai, be to, C — bukasis kampas. Įrodykite, kad $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B<1$.

14.279. Trikampio visų kampų kotangentai sudauginti poporiui. Įrodykite, kad šių sandaugų suma lygi vienetui.

14.280. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio, kurio kraštinės a, b, c ir kampai A, B, C, plotą S galima apskaičiuoti pagal formulę $S=\frac{1}{2}(abc)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}$.

Nubraižykite šių funkcijų grafikus (**14.281—14.298**):

14.281. $y=|x-2|(x+2)$. **14.282.** $y=\frac{x-1}{|x-1|}(x^2-4)$.

14.283. $y=\sqrt{10^{\lg x^2}}$. **14.284.** $y=x^{\log_x x^2}$. **14.285.** $y=2^{\log_2 x}$.

14.286. $y=2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$. **14.287.** $y=|x|^{1/2}$.

14.288. $y=5^{\frac{1}{3}\log_5(x-1)}$. **14.289.** $y=\frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$.

14.290. a) $y=x^2-7x+6$; b) $y=|x|^2-7|x|+6$;
c) $y=|x^2-7x+6|$; d) $y=||x|^2-7|x|+6|$.

14.291. $y=\frac{x}{|x|}\sin 2x$. **14.292.** $y=\frac{2-x}{|x+1|}(x^2-x-2)$.

14.293. $y=\frac{x-1}{|x-3|}(x^2-9)$.

14.294. $y=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$.

14.295. $y=\log_2\frac{x^2-4}{x-2}$.

14.296. $y=0{,}5^{\frac{2x^2-6x}{x-3}}$.

14.297. $y=\log_3\frac{x^2-9}{|x|-3}$.

14.298. $y=\left|\log_2\frac{x-4}{x^2-16}\right|$.

14.299. Ar skiriasi vienas nuo kito funkcijų $y=\lg x^2$ ir $y=2\lg x$ grafikai?

14.300. Toje pačioje koordinačių sistemoje nubraižykite funkcijų $y=\lg x^2$ ir $y=\lg^2 x$ grafikus.

14.301*. Per stojamąjį egzaminą vienam abiturientui teko spręsti lygtį

$$\sin 2x+7\cos 2x+7=0.$$

Jis sprendė taip: $\sin 2x$ ir $\cos 2x$ išreiškė funkcija $\operatorname{tg} x$:

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{7(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x}+7=0;$$

iš čia apskaičiavo $\operatorname{tg} x=-7$ ir $x=\pi k-\operatorname{arctg} 7$. Ar gerai abiturientas sprendė?

14.302. Raskite $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)$, kai $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ir α nepriklauso pirmajam ketvirčiui.

14.303. Apskaičiuokite $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

14.304. Apskaičiuokite $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{1}{3}\right)$.

14.305. Įrodykite, kad dviejų triženklių skaičių, parašytų tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, skirtumas dalijasi iš 9.

14.306. Raskite sandaugą $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[512]{a}$.

14.307. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5,\\ y^{-1}+z^{-1}=3,\\ z^{-1}+x^{-1}=8\end{cases}$$

neturi realiųjų sprendinių.

14.308. Tarę, kad $a\neq 10^n$ (a ir n — sveikieji skaičiai), įrodykite, jog $\lg a$ yra iracionalusis skaičius.

14.309. Ar galima lygybė $x=\log_2 x$?

14.310. Išspręskite lygtį $\log_y x+\log_x y=2$.

14.311. Su kuriais pirmojo ketvirčio kampais nelygybė $\sin\alpha\geqslant\sin 2\alpha$ yra teisinga?

14.312. Įrodykite, kad dviejų nelyginių skaičių kvadratų suma negali būti sveikojo skaičiaus kvadratas.

14.313. Raskite x reikšmes, su kuriomis visos funkcijos $y=x^2+5x+6$ reikšmės priklauso intervalui $[6;\ 12]$.

14.314. Jeigu kvadratinė lygtis $x^2+px+q=0$, kurios koeficientai p ir q — sveikieji skaičiai, turi racionaliąsias šaknis, tai tos šaknys yra sveikieji skaičiai. Įrodykite.

14.315. Nespręsdami lygties $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=10$, įrodykite, kad ji neturi šaknų.

14.316. Nurodykite funkcijos $y=\log_5\sin x$ apibrėžimo ir reikšmių sritis.

14.317. Nurodykite funkcijos $y=\sqrt{\log_3\cos x}$ apibrėžimo sritį.

14.318. Su kuriomis x reikšmėmis lygybė

$$\lg\frac{x(x-4)}{1-x}=\lg x+\lg(x-4)-\lg(1-x)$$

yra teisinga?

14.319*. Su kuriomis x reikšmėmis funkcija $y=|x-1|+|x-3|$ įgyja mažiausią reikšmę? Raskite tą reikšmę.

14.320. Trupmena $\frac{a+b}{a-b}$ (a, b — sveikieji skaičiai, $b\neq 0$, $a\neq b$) yra suprastinama. Ar suprastinama trupmena $\frac{a}{b}$?

14.321. Ar lygtis $x^3+2x-3=0$ turi neigiamų šaknų?

14.322. Išskaidykite daugianarį a^4+2a^3+6a-9 dauginamaisiais.

14.323. Išspręskite lygtį $x^{1/\lg x}=10$.

14.324. Išspręskite lygtį $x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=1$.

14.325. Be lentelių apskaičiuokite $\lg\operatorname{tg}22^\circ+\lg\operatorname{tg}68^\circ$.

14.326. Įrodykite, kad trijų skaičiaus 3 laipsnių su natūraliaisiais vienas po kito einančiais rodikliais, kurių mažiausias yra ne mažesnis už skaičių 2, suma dalijasi be liekanos iš 117.

14.327. Išspręskite nelygybę $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$.

14.328. Apskaičiuokite $\log_{a_1a_2\ldots a_k}x$, kai $\log_{a_1}x=b_1$, $\log_{a_2}x=b_2$, ..., $\log_{a_k}x=b_k$; $x\neq 1$.

14.329*. Kiek yra sveikųjų skaičių, kurių dešimtainių logaritmų charakteristika lygi tam pačiam skaičiui: a) n ($n\in\mathbf{N}$); b) $-m$ ($m\in\mathbf{N}$)?

14.330. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}(x-a)(y-b)=c,\\ \frac{x-a}{y-b}=c.\end{cases}$$

14.331. Stačiojo trikampio statiniai lygūs $\log_4 9$ ir $\log_3 16$. Apskaičiuokite trikampio plotą.

14.332. Raskite didžiausią funkcijos $y=\frac{x^2}{x^4+25}$ reikšmę.

14.333. Raskite visas x reikšmes, su kuriomis egzistuoja suma $\log_{1/2} x + (\log_{1/2} x)^2 + \ldots + (\log_{1/2} x)^n + \ldots$.

14.334. Įrodykite, kad $x=1$ — vienintelė lygties $x^3+3x-4=0$ šaknis.

14.335. Koks yra skaičiaus $\log_{\pi/4} \operatorname{tg} 1$ ženklas?

14.336. Ar lygtis $\sin x = 2 \sin 47° \cos 44°$ turi sprendinį?

14.337. Išspręskite lygtį $\dfrac{4}{\sqrt[5]{(11x-1)^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}{4}$.

14.338. Įrodykite, kad tik vieno plokštumos taško koordinatės tenkina lygtį $x^2-4x+y-6\sqrt{y}+13=0$, ir raskite tą tašką.

14.339. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y+z=2, \\ -x+y+z=4. \end{cases}$$

14.340. Įrodykite, kad lygtis $x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=0$ turi tik vieną šaknį. Kokią?

14.341. Išskaidykite daugianarį $k^5+k^4-2k^3-2k^2+k+1$ daugianamaisiais.

14.342*. Išspręskite lygtį $\cos 2x = x^2+1$.

14.343. Raskite didžiausią funkcijos $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$ reikšmę.

14.344. Raskite didžiausią funkcijos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ reikšmę.

14.345*. Apskaičiuokite sumą

$$4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \ldots + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots .$$

14.346. Išspręskite lygtį $\cos(\pi x^2) = -\dfrac{1}{2}$.

14.347. Išspręskite lygtį $\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$.

14.348. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $1+\sin^2 ax = \cos x$ turi vienintelį sprendinį?

14.349. Geometrinės progresijos narių skaičius yra lyginis. Visų jos narių suma tris kartus didesnė už nelyginėse vietose esančių jos narių sumą. Raskite progresijos vardiklį.

14.350. Apskaičiuokite $1+2^x+2^{2x}+\ldots+2^{kx}+\ldots$, kai k — natūralusis skaičius, o $x<0$.

14.351. Nepertvarkydami lygties $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 17$, įrodykite, kad ji neturi šaknų.

14.352. Sakykime, A, B, C — trikampio kampai. Įrodykite, kad $\sin A \sin B - \cos C = \cos A \cos B$.

14.353. Ar lygtis $3 \sin 2x + \cos 2x = 4$ turi sprendinį?

14.354. Su kuriomis k reikšmėmis lygties $x^2-(2k+1)x+k^2=0$ šaknų santykis lygus $1:4$?

14.355. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $x^2-2x-\log_3 a^2=0$ turi šaknų?

14.356. Sudarykite bikvadratinę lygtį, kurios dvi šaknys yra skaičiai $\sqrt{3}-1$ ir $\sqrt{3}+1$.

14.357. Išspręskite lygtį $3^{2+\log_9 25} = 5 \cdot 9^{2/x}$.

14.358. Nurodykite mažiausią funkcijos

$$y = \log_2(x^2-4x+20)$$

reikšmę.

14.359. Ar kurio nors kampo sinusas gali būti lygus:

a) $\lg a + \dfrac{1}{\lg a}$ $(a>0,\ a \neq 1)$;

b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{-1}$; c) $\cos 40° + \cos 50°$?

14.360. Be lentelių raskite $c = \sqrt[15]{a^{-5}b^3}$, kai $\lg a = -0{,}6498$, o $\lg b = 13{,}9170$.

14.361. Išveskite $\sin 3\alpha$ formulę. Remdamiesi ja, apskaičiuokite $\sin 54°$, kai $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

14.362. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{3+\sqrt{x}}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{3-\sqrt{x}}{2}$, $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$. Remdamiesi šiomis sąlygomis, raskite x.

14.363. Išspręskite lygtį $x^2 \cdot 2^x + 8 = 2x^2 + 2^{x+2}$.

14.364. Su kuriomis m reikšmėmis teisinga lygybė $\cos\varphi = \dfrac{m^2-4m-4}{m^2+1}$, kai $0<\varphi<\dfrac{\pi}{3}$?

14.365. Su kuriomis a reikšmėmis galima lygybė $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2a^2+2a}{a^2-6a+9}$, kai $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$?

14.366. Įrodykite: jeigu $x = a \cos\alpha \sin\beta$, $y = a \sin\alpha \sin\beta$, $z = a \cos\beta$, tai $x^2+y^2+z^2=a^2$.

14.367. Raskite lygties $z^{\log_5 3z} = 25\sqrt[3]{z^4}$ šaknų sandaugą.

14.368. Su kuria a reikšme lygties $x^2+ax+a-2=0$ šaknų kvadratų suma yra mažiausia?

14.369. Parabolės ašis lygiagreti ordinačių ašiai, o parabolė eina per taškus $(-2;\ -3)$, $(-1;\ 2)$ ir $(1;\ 0)$. Sudarykite tos parabolės lygtį. Įrodykite, kad parabolė kerta abscisių ašį skirtingose ordinačių ašies pusėse.

14.370. Kuriuose taškuose funkcijos $y = \sqrt{-x+9} - \sqrt{-x+4}$ grafikas susikerta su tiese $y=1$?

14.371. Raskite sveikąsias x reikšmes, tenkinančias nelygybę $0{,}000729^3 < 0{,}3^{x^2-5x+4} < 11\dfrac{1}{9}$.

14.372. Raskite neneigiamus nelygybės

$$\sqrt[15]{32^{3x^2-8x}}<\left(\frac{2}{15}\right)^{\log_{7,5} 0,5}$$

sprendinius.

Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis teisingos šios lygybės **(14.373—14.376)**:

14.373. $|x^2-8x+12|=x^2-8x+12$.

14.374. $\left|\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}\right|=\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}$.

14.375. $\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right|=\frac{x^3}{1-x^2}$.

14.376. $|\lg^2(1-9x)+\lg(1-9x)-2|=2-\lg(1-9x)-\lg^2(1-9x)$.

14.377. Remdamiesi sąlyga

$$2^2\cdot 2^4\cdot 2^6\cdot\ldots\cdot 2^{2k}=0,25^{-28},$$

raskite natūraliąją k reikšmę.

14.378. Išspręskite lygtį $x^2+2x-3|x+1|+3=0$.

14.379. Išspręskite lygtį:
a) $|x+1|+|x-1|=2x^3$;
b) $|x^2-3|x|+1|=1$.

Išspręskite nelygybes **(14.380—14.383)**:

14.380. $|x+1|>2|x+2|$.

14.381. $\log_2(x+1)>\log_{x+1} 16$.

14.382. $\log_{0,5}(2^x-1)>x-1$.

14.383. $\log_{x-3}(x-1)<2$.

14.384. Išspręskite nelygybių sistemą $\frac{1}{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{|\sin x|}<1$.

14.385. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} 2^{\log_2 x}-3^{\log_3 y}=1, \\ 2x-3y=4 \end{cases}$$

neturi sprendinių.

14.386. Raskite sveikąsias x reikšmes, tenkinančias nelygybių sistemą.

$$\begin{cases} (\log_3 x)^{\log_9 x}\leqslant 1, \\ x>1. \end{cases}$$

14.387. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x-3|y|=1, \\ |x|+2y=4. \end{cases}$$

14.388. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ yra nelyginė.

14.389. Su kuriomis x reikšmėmis funkcija $y=\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{ctg}^2 x+1$ įgyja mažiausią reikšmę? Raskite tą reikšmę.

14.390. Kokia yra didžiausia funkcijos $y=\sin x+\cos x$ reikšmė? Su kuriomis x reikšmėmis funkcija įgyja šią reikšmę?

14.391. Įrodykite, kad funkcijos $y=\frac{\lg 5+\lg(x^2+1)}{\lg(x-2)}-2$ grafikas nė viename taške nekerta ašies Ox.

14.392. Raskite funkcijos $y=0,8|x|\cdot\frac{x^2+1}{x+1}$ grafiko tašką, kurio ordinatė dvigubai didesnė už jo abscisę (patį grafiką nebūtina braižyti).

14.393. Įrodykite, kad funkcijų $y=4^x-3\cdot 2^x$ ir $y=-(5\cdot 2^{-x}+1)$ grafikai neturi bendrų taškų.

14.394. Raskite parabolės $y=x^2+1$ ir kreivės $y=|3x^2-5|$ susikirtimo taškus.

14.395. Raskite kreivės $y=12x^2-5|x|-36$ ir parabolės $y=6x^2-5x-12$ susikirtimo taškus.

14.396. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $y=x+3+\sqrt{(x+1)(x+7)}$ grafikas yra žemiau abscisių ašies?

14.397. Nustatykite, su kuria k reikšme funkcijos $y=\lg kx-2\lg(x+1)$ grafikas ir abscisių ašis turi tik vieną bendrą tašką.

14.398. Nurodykite visus ašies Ox taškus, kuriuose funkcija $y=\sqrt{3\cdot 81^{1/x}-10\cdot 9^{1/x}+3}$ yra neapibrėžta.

14.399. Su kuriomis x reikšmėmis funkcijos $y=0,7^{\lg(x^2-8x+8)}$ grafikas yra ne žemiau negu tiesė $y=1$?

14.400. Raskite x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y=\log_{1/3}(x^2-8x)+2$ grafikas yra ne žemiau negu abscisių ašis.

14.401. Kuriuose taškuose funkcijos

$$y=\log_3(\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12})$$

grafikas kerta ašį Ox?

14.402. Raskite funkcijos $y=(3,6^{1+\log_{3,6}(10+x)})^{\log_6(5-x)}$ grafiko ir ordinačių ašies susikirtimo tašką.

14.403. Raskite funkcijų $y=\log_2(x+14)$ ir $y=6-\log_2(x+2)$ grafikų susikirtimo tašką.

14.404. Raskite funkcijos $y=\log_2\log_6(2^{\sqrt{x+1}}+4)$ grafiko taško, kurio ordinatė lygi vienetui, abscisę.

14.405. Raskite funkcijos $f(x)=x^{\lg x}-100000x^4$ grafiko ir abscisių ašies susikirtimo taškus.

14.406. Raskite sveikąsias x reikšmes, priklausančias funkcijos

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\lg(-3x^2+10x-3)}$$

apibrėžimo sričiai.

Raskite šių funkcijų apibrėžimo sritį (**14.407—14.410**):

14.407. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$.

14.408. $f(x)=\sqrt{\log_x 2-\log_2 x}$.

14.409. $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$.

14.410. $f(x)=\sqrt{1-\lg(x-1)}+\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}$.

15 SKYRIUS
MATEMATINĖS ANALIZĖS PRADMENYS

KAI KURIŲ FUNKCIJŲ IŠVESTINIŲ IR PIRMYKŠČIŲ FUNKCIJŲ LENTELĖ

(a, b — konstantos)

Pirmykštė funkcija $F(x)$	Funkcija $f(x)$	Išvestinė $f'(x)$
ax	a	0
$\frac{x^{p+1}}{p+1}$, $p\neq -1$	x^p, $p\in R$	px^{p-1}
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x	e^x
—	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
—	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
—	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
—	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{a}F(u)=\frac{1}{a}F(ax+b)$, $a\neq 0$	$f(u)=f(ax+b)$	$af'(u)=af'(ax+b)$

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

1⁰. Diferencijavimo taisyklės (u, v — funkcijos; c — konstanta):

$(cu)'=cu'$; (15.1) $\quad (u+v)'=u'+v'$; (15.2)

$(uv)'=u'v+uv'$; (15.3) $\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$; (15.4)

$(g(f(x)))'=g'(f(x))f'(x)$; čia $g(f(x))$ — sudėtinė funkcija. (15.5)

2⁰. Funkcijos $y=f(x)$ grafiko liestinės lygtis:

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$; (15.6)

čia $(x_0; y_0)$ — lietimosi taškas.

3⁰. Pirmykščių funkcijų radimo taisyklės:

a) jeigu F — funkcijos f pirmykštė, o G — funkcijos g pirmykštė, tai $F+G$ yra funkcijos $f+g$ pirmykštė;

b) jeigu F — funkcijos f pirmykštė, o k — konstanta, tai kF yra funkcijos kf pirmykštė;

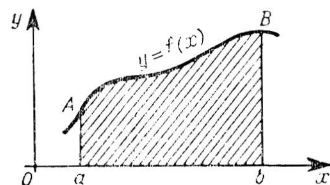
c) jeigu $F(x)$ — funkcijos $f(x)$ pirmykštė, o $k\neq 0$ ir b — konstantos, tai $\frac{1}{k}F(kx+b)$ yra funkcijos $f(kx+b)$ pirmykštė.

4°. Niutono ir Leibnico formulė:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \qquad (15.7)$$

5°. Kreivinės trapecijos $aABb$ (15.1 pav.), kurią riboja ašis Ox, tiesės $x=a$ ir $x=b$ ir neneigiamos funkcijos $y=f(x)$ grafikas atkarpoje $[a;\ b]$, plotas apskaičiuojamas pagal formulę

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (15.8)$$



15.1 pav.

1 pavyzdys. Raskite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4}$.

△ Funkcija $f(x)=\frac{x^3-8}{2x-4}$ taške $x=2$ yra neapibrėžta. Pagal (2.14) formulę skaitiklį išskaidę dauginamaisiais, šią funkciją išreiškime taip:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}.$$

Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srityje $x-2\neq 0$, todėl trupmeną galima suprastinti iš reiškinio $x-2$. Tada gausime

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{2}=f(2)=6. \ ▲$$

2 pavyzdys. Raskite $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$.

△ Funkcija $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$ taške $x=4$ neapibrėžta. Skaitiklį ir vardiklį padauginę iš $\sqrt{x^2-7}+3\neq 0$ ir pritaikę (2.8) formulę, pertvarkome trupmeną:

$$\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7-9}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3}=f(4)=\frac{4}{3}. \ ▲$$

3 pavyzdys. Sudarykite funkcijos $f(x)=\frac{x^2+4}{x-2}$ grafiko liestinės, einančios per jo ir ordinačių ašies susikirtimo tašką, lygtį.

△ Pagal (15.6) formulę liestinės lygtis užrašoma taip: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$; čia $(x_0;\ y_0)$ — lietimosi taškas. Grafiko ir ašies Oy susikirtimo taško abscisė x_0 lygi 0, o ordinatė $y_0=f(0)=-2$; vadinasi, $(0;\ -2)$ — lietimosi taškas. Remdamiesi (15.4) formule ir išvestinių lentele, gauname:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+4)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-4}{(x-2)^2};$$

iš čia $f'(0)=-1$. Taigi ieškomoji liestinės lygtis yra tokia: $y-(-2)=-1\times(x-0)$, arba $y=-x-2$. ▲

4 pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2}$ didėjimo ir mažėjimo intervalus bei ekstremumo taškus.

△ Funkcijos apibrėžimo sritis — visa skaičių ašis, išskyrus tašką $x=0$. Remdamiesi (15.4) formule ir išvestinių lentele, randame:

$$f'(x)=\frac{2(x-2)x^2-(x-2)^2 2x}{x^4}=\frac{4(x-2)}{x^3};$$

$f'(x)=0$ tik tada, kai $x=2$. Sudarome lentelę:

	$(-\infty;\ 0)$	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
$f'(x)$	+	−	0	+
$f(x)$	↗	↘		↗

Vadinasi, $x=2$ — minimumo taškas; funkcija didėja intervaluose $(-\infty;\ 0)$ ir $(2;\ \infty)$, mažėja intervale $(0;\ 2)$. ▲

5 pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ mažiausią ir didžiausią reikšmę atkarpoje $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

△ Pirmiausia randame $f(x)$ reikšmes šios atkarpos galuose: $f(0)=0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$, po to — šiai atkarpai priklausančius kritinius taškus. Turime $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x$; $f'(x)=0$, kai $\cos x+\cos 2x=0$; iš čia $2\cos\frac{3}{2}x\times\cos\frac{x}{2}=0$. Iš lygties $\cos\frac{3}{2}x=0$ randame $\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, t. y. $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi n$, o iš lygties $\cos\frac{x}{2}=0$ gauname $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, t. y. $x=\pi+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. Antrasis sprendinys yra pirmojo dalis; vadinasi, lygties sprendinio išraiška tokia: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Atkarpai $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ priklauso taškai $x_1=\frac{\pi}{3}$ ir $x_2=\pi$. Randame $f(x)$ reikšmes kritiniuose taškuose: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi)=0$. Palyginę skaičius $f(0)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f(\pi)$, darome išvadą, kad

$$\min_{\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=-2,\quad \max_{\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]} f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}. \ ▲$$

6 pavyzdys. Aritmetinės progresijos šeštasis narys lygus 3, o skirtumas didesnis už 0,5. Kokia turi būti šios progresijos skirtumo reikšmė, kad pirmojo, ketvirtojo ir penktojo progresijos narių sandauga būtų didžiausia?

△ Iš sąlygos žinome, kad $a_6=a_1+5d=3$; iš čia $a_1=3-5d$. Sandaugą $a_1a_4a_5$ pažymėkime raide y. Tada gausime $y=a_1(a_1+3d)(a_1+4d)=-10d^3+51d^2-72d+27$. Norėdami rasti d reikšmę, su kuria funkcija y įgyja didžiausią

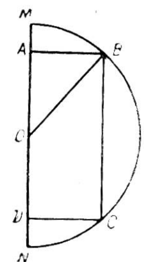
reikšmę, iš pradžių apskaičiuojame išvestinę: $y'=-30d^2+102d-72=-6(5d^2-17d+12)$. Po to, išsprendę lygtį $5d^2-17d+12=0$, randame jos šaknis $d_1=1$, $d_2=2{,}4$. Kadangi $d>0{,}5$ (žinome iš sąlygos), tai ištiriame funkciją y intervale $(0{,}5;\ \infty)$. Sudarome lentelę:

d	$(0{,}5;\ 1)$	1	$(1;\ 2{,}4)$	2,4	$(2{,}4;\ \infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	min	↗	max	↘

Intervale $(0{,}5;\ \infty)$ yra tik vienas funkcijos y maksimumo taškas, būtent $d=2{,}4$. Tai reiškia, kad ir intervale $(0{,}5;\ \infty)$ funkcija y įgyja didžiausią reikšmę, kai $d=2{,}4$. ▲

7 pavyzdys. Sferos plotas lygus 27π. Kokia yra į tą sferą įbrėžto didžiausio tūrio ritinio aukštinė?

△ Sakykime, ritinys gaunamas sukant stačiakampį $ABCD$ apie skersmenį MN (15.2 pav.). Tarę, kad $AD=x$, ritinio tūrį V išreikškime kaip x funkciją.



15.2 pav.

Turime $S_{\text{sferos}}=4\pi OB^2$, t. y. $4\pi OB^2=27\pi$; iš čia $OB^2=\frac{27}{4}$.

Iš $\triangle AOB$ gauname $AB^2=OB^2-OA^2$, t. y. $AB^2=\frac{27}{4}-\frac{x^2}{4}=\frac{27-x^2}{4}$. Pagal (11.17) formulę ritinio tūris

$$V(x)=\pi AB^2\cdot AD=\pi\cdot\frac{(27-x^2)}{4}x=\frac{\pi}{4}(27x-x^3).$$

Pagal uždavinio prasmę $0<x<2OB$, t. y. $0<x<3\sqrt{3}$.

Turime $V'(x)=\frac{\pi}{4}(27-3x^2)=\frac{3}{4}\pi(9-x^2)$; $V'(x)=0$, kai $9-x^2=0$. Iš čia randame $x=3$ (nes $x>0$). Kai $0<x<3$, tai $V'(x)>0$, o kai $3<x<3\sqrt{3}$, tai $V'(x)<0$. Vadinasi, $x=3$ — maksimumo taškas. Kadangi funkcija $V'(x)$ apibrėžta su visomis x reikšmėmis ir visoje skaičių tiesėje turi vieną kritinį tašką, tai su $x=3$ funkcija $V(x)$ įgyja didžiausią reikšmę. ▲

8 pavyzdys. Funkcijų $f(x)$ ir $F(x)$ grafikai susikerta ašies Oy taške. Raskite funkcijos $f(x)=2\sin 5x+\sqrt{x}+\frac{3}{5}$ pirmykštę $F(x)$.

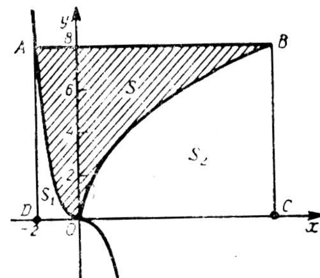
△ Kadangi funkcijos $\sin x$ viena iš pirmykščių yra $-\cos x$, tai pagal 3° punkto taisykles funkcijos $2\sin 5x$ pirmykštė lygi $-\frac{2}{5}\cos 5x$. Funkcijos $\sqrt{x}+\frac{3}{5}$ pirmykštė lygi $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x$. Tada funkcijos $f(x)$ pirmykštė yra funkcija $F(x)=-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x+C$ su bet kuria konstantos C reikšme. Reikia rasti tokią C reikšmę, su kuria funkcijų $F(x)$ ir $f(x)$ grafikai susikerta ašies Oy taške. Tai reiškia, kad su $x=0$ turi būti teisinga lygybė $F(0)=f(0)$. Bet $F(0)=-\frac{2}{5}+C$, o $f(0)=\frac{3}{5}$; vadinasi, $-\frac{2}{5}+C=\frac{3}{5}$; iš čia

$C=1$. Taigi ieškomoji pirmykštė funkcija yra $F(x)=-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\times\sqrt{x}+\frac{3}{5}x+1$. ▲

9 pavyzdys. Raskite plotą uždaros figūros, kurią riboja funkcijų $y=-x^3$, $y=\frac{8}{3}\sqrt{x}$ ir $y=8$ grafikai.

△ Nurodytų funkcijų grafikai pavaizduoti 15.3 paveiksle. Reikia rasti figūros OAB (paveiksle ji subrūkšniuota) plotą.

Ieškomas plotas lygus stačiakampio $ABCD$ ploto ir kreivinių trikampių OAD ir OBC plotų S_1 ir S_2 skirtumui. Raskime taškų A ir B koordinates. Išsprendę lygčių sistemas $\begin{cases} y=-x^3,\\ y=8\end{cases}$ ir $\begin{cases} y=\frac{8}{3}\sqrt{x},\\ y=8,\end{cases}$ gauname $A(-2;\ 8)$ ir $B(9;\ 8)$. Toliau: $C(9;\ 0)$, $D(-2;\ 0)$, $CD=11$, $BC=8$; iš čia $S_{ABCD}=11\cdot 8=88$. Kreivinių trikampių OAD ir OBC plotą randame integruodami pagal (15.8) formulę:



15.3 pav.

$$S_1=\int_{-2}^{0}(-x^3)\,dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}=4,\quad S_2=\frac{8}{3}\int_{0}^{9}\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_{0}^{9}=48.$$

Taigi $S=S_{ABCD}-S_1-S_2=88-4-48=36$ (kv. vnt.). ▲

Apskaičiuokite (**15.001—15.010**):

15.001. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$.

15.002. $\lim\limits_{x\to0,5}\frac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$.

15.003. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

15.004. $\lim\limits_{x\to2/5}\frac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

15.005. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$.

15.006. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2+2x^3}$.

15.007. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$.

15.008. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$.

15.009. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$.

15.010. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

Apskaičiuokite ribas ir įrodykite arba paneikite pateiktus teiginius (**15.011—15.018**):

15.011. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{3x-9}=5+\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-16}{8-x^3}$.

23. Užsak. Nr. 1941.

15.012. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1} > \lim\limits_{x\to -0{,}5} \frac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}$.

15.013. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} < \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}$.

15.014. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} < \cos\frac{\pi}{10}$.

15.015. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+5x-6} > \lim\limits_{x\to 5} \frac{5-x}{\sqrt{5}+\sqrt{x}}$.

15.016. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2-4}{x^2-1} \cdot \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-1}-2} < 0$.

15.017. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$.

15.018. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x(x^2-4)} - \lim\limits_{x\to 2} \frac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4} = 1$.

Raskite šių funkcijų išvestines (**15.019—15.033**):

15.019. $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x^3\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}$.

15.020. a) $y=(x^4-x^2+1)^3$; b) $y=\frac{x^3-3x^2+1}{x-1}$.

15.021. a) $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; b) $y=\lg\frac{10-x}{x+2}$.

15.022. a) $y=\sqrt[3]{4x^3-7x^2+1}$; b) $y=(\sin^2 x+1)e^x$.

15.023. a) $y=\sqrt[3]{x^2-1}\,(x^4-1)$; b) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$.

15.024. a) $y=e^{x^3-5x^2}$; b) $y=\sqrt[3]{x(1-x)^2}$.

15.025. a) $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$; b) $y=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x$.

15.026. a) $y=x^2\cos\frac{1}{x}$; b) $y=x+\sin x\cos x$.

15.027. a) $y=\cos^2 3x$; b) $y=\sin^2\frac{x}{2}$.

15.028. a) $y=\operatorname{tg}\sin x$; b) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

15.029. $y=\frac{2}{3}\left(x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right)-x$.

15.030. a) $y=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$; b) $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}$.

15.031. a) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; b) $y=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$.

15.032. a) $y=(x^3+1)\cos 2x$; b) $y=\sin 2x\operatorname{tg} x$.

15.033. a) $y=x\sqrt[3]{3x^2+1}$; b) $y=\sin\frac{\pi}{10}-\ln\frac{3}{x}$.

15.034. Išspręskite lygtį $f'(x)-\frac{2}{x}\cdot f(x)=0$, kai $f(x)=x^3\ln x$.

15.035. Išspręskite nelygybę $f'(x)<g'(x)$, kai $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $g(x)=5x+\frac{1}{x}$.

15.036. Išspręskite nelygybę $f'(x)+\varphi'(x)\leqslant 0$, kai $f(x)=2x^3+12x^2$, $\varphi(x)=9x^2+72x$.

15.037. Išspręskite lygtį $1+5f(x)+6f'(x)=0$, kai $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Apskaičiuokite šių funkcijų išvestinių reikšmes su nurodytomis nepriklausomo kintamojo reikšmėmis (**15.038—15.059**):

15.038. $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\frac{2x}{x+1}$; $f'(1)=?$

15.039. $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$; $f'(2)=?$

15.040. $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x}$; $f'(3)=?$

15.041. $f(x)=x-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$; $f'(-1)=?$

15.042. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{x+1}$; $f'(1)=?$

15.043. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$; $f'(0)=?$

15.044. $f(x)=\sin 4x\cos 4x$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=?$

15.045. $f(x)=\sin^2 x^2$; $f'(0)=?$

15.046. $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.047. $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$; $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=?$

15.048. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $f'(2)=?$

15.049. $f(x)=5(x+1)^2\sqrt[5]{x-1}$; $f'(2)=?$

15.050. $f(x)=\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}$; $f'(1)=?$

15.051. $f(x)=\frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{tg}\,2x$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.052. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$; $f'(0)=?$

15.053. $f(x)=\frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$; $f'(0)=?$

15.054. $f(x)=\sin^3\frac{x}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.055. $f(x)=2^{\,x-2x^2-1}$; $f'(0)=?$

15.056. $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$; $f'(0)=?$

15.057. $f(x)=(x^2-x)\cos^2 x$; $f'(0)=?$

15.058. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$; $f'(\pi)=?$

15.059. $f(x)=\frac{x-2}{\sin^2 x}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.060. Raskite funkcijos $f(x)$ antrąją išvestinę ir apskaičiuokite jos reikšmę su nurodyta x reikšme:

a) $f(x)=x^2\ln x+\cos 2x$; $f''(1)=?$ $f''(\pi)=?$

b) $f(x)=\sin\frac{x}{3}+x\ln x^2$; $f''(3)=f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

15.061. Išsiaiškinkite, koks yra funkcijos $y=\sqrt{4x+9}(x^2-16)$ išvestinės ženklas taške $x=0$.

15.062. Duota funkcija $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$. Kaip kinta jos išvestinė, kai kintamasis x didėja nuo $\frac{1}{16}$ iki 81?

15.063. Sudarykite funkcijos $y=x(\ln x-1)$ grafiko liestinės taške $x_0=e$ lygtį.

15.064. Raskite funkcijos $y=x^4-6x^2+1$ išvestinės didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale $[-1;\ 3]$.

15.065. Duota funkcija $f(x)=2\cos^2(4x-1)$. Raskite $f'(x)$ reikšmių sritį.

15.066. Sudarykite funkcijos $y=\mathrm{tg}\,3x$ grafiko liestinės taške $x_0=\frac{\pi}{3}$ lygtį.

15.067. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\frac{x+3}{x-5}$ mažėja visuose apibrėžimo srities intervaluose.

15.068. Kaip kinta funkcijos $f(x)=x\ln x-x$ išvestinė, kai kintamasis x didėja nuo 1 iki 9?

15.069. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt{4+3x-x^2}$ ir jos išvestinės apibrėžimo sritis.

15.070. Duota: $f(x)=0{,}5\sqrt{x^3+1}$ ir $g(x)=xe^{-x}$. Įrodykite, kad $f'(2)$ yra lygties $g'(x)=0$ šaknis.

15.071. Funkcija išreikšta formule $f(x)=e^{ax^2+bx+1}$. Raskite konstantų a ir b reikšmes, kai $f(1)=f(0)=f'(0)$.

15.072. Kuriuo kampu į ašį Ox pasvirusi funkcijos $g(x)=x^2\ln x$ grafiko liestinė taške $x_0=1$?

15.073. Funkcija išreikšta formule $f(x)=5\sin x+3\cos x$. Išspręskite lygtį $f'(0)=f'(x)$.

15.074. Funkcija išreikšta formule $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)$. Išspręskite lygtį $f'(x)=2f(x)$.

15.075*. Ar galima panariui diferencijuoti nelygybę?

15.076. Parašykite funkcijos $f(x)=|x|$ pirmykštę funkciją.

15.077. Raskite harmoninio svyravimo diferencialinę lygtį, kai: a) $y=-4\sin(2x+3)$; b) $y=3{,}8\cos(0{,}6x-10)$.

15.078. Raskite šių diferencialinių lygčių sprendinius, nelygius nuliui: a) $y'=-36y$; b) $y''=-36y$.

15.079. Atskirai nubraižykite funkcijų $f(x)=x$, $\varphi(x)=|x|$ ir $g(x)=x|x|$ grafikus taško $x=0$ aplinkoje. Nors $f(x)$ yra diferencijuojama, o $\varphi(x)$ — ne, kai $x=0$, tačiau jų sandauga $g(x)=x|x|$ turi išvestinę taške $x=0$. Pagrįskite šiuos teiginius ir raskite $g'(0)$.

15.080. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=x+\sin x$ nemažėja kiekviename ašies Ox taške.

15.081*. Įrodykite, kad su visomis konstantų p ir q $(p\neq q)$ reikšmėmis formule

$$f(x)=\begin{cases} p\cos x+q\sin x, & \text{kai } x\geqslant 0,\\ px+q+1, & \text{kai } x<0,\end{cases}$$

išreikšta funkcija yra nediferencijuojama taške $x=0$.

15.082. Taškas juda tiesiai pagal dėsnį $s(t)=\sqrt[3]{t^2}$. Įrodykite, kad jo pagreitis atvirkščiai proporcingas nueito kelio kvadratui.

15.083. Duota funkcija $f(x)=0{,}5(x^2-\cos x)$. Pritaikę tolydumo savybę, nustatykite, ar lygtys $f(x)=7{,}8$ ir $f'(x)=7{,}8$ turi nors po vieną šaknį intervale $[2\pi;\ 3\pi]$.

15.084. Raskite visas konstantos a reikšmes, su kuriomis formule $y=e^{ax^3+3x^2+x}$ išreikštos funkcijos išvestinė įgyja tik teigiamas reikšmes visoje šios funkcijos apibrėžimo srityje.

15.085*. Apskaičiuokite sumą $x+x^2+\ldots+x^n$, po to sumą $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

15.086. Parašykite funkcijos $y=\frac{x^3+1}{3}$ grafiko liestinės taške, kuriame grafikas kerta abscisių ašį, lygtį.

15.087. Raskite tuos funkcijos $y=x(x-4)^3$ grafiko taškus, per kuriuos nubrėžtos grafiko liestinės yra lygiagrečios abscisių ašiai.

15.088. Įrodykite, kad funkcijos $y=\frac{x-4}{x-2}$ grafiko liestinės, nubrėžtos per taškus, kuriuose jis kerta koordinačių ašis, yra lygiagrečios.

15.089. Kuriuo kampu sinusoidė $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ kerta abscisių ašį koordinačių pradžioje?

15.090. Įrodykite, kad funkcijos $y=x^3+x^2+x+1$ grafikas neturi taškų, per kuriuos nubrėžtos jo liestinės būtų lygiagrečios abscisių ašiai.

15.091. Per kuriuos taškus nubrėžtos kreivės $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-x+1$ liestinės yra lygiagrečios tiesei $y=2x-1$?

15.092. Per kuriuos taškus nubrėžta funkcijos $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x-4$ grafiko liestinės su ašimi Ox sudaro 45° kampą?

15.093. Kuriuo kampu į ašį Ox pasvirusi kreivės $y=2x^3-x$ liestinė, nubrėžta per kreivės ir ašies Oy susikirtimo tašką?

15.094. Kuriuo kampu į ašį Ox pasvirusi kreivės $y=x^3-x^2-7x+6$ liestinė, nubrėžta per tašką $M_0(2;\ -4)$?

15.095. Tiesė $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}$ yra kreivės $y=0{,}5x^4-x$ liestinė. Raskite lietimosi taško koordinates.

15.096. Parašykite funkcijos $y=x^2e^{-x}$ grafiko liestinės taške $x=1$ lygtį.

15.097. Parašykite kreivių $y=2x^2-5$ ir $y=x^2-3x+5$ liestinių, einančių per tų kreivių susikirtimo taškus, lygtis.

15.098. Raskite kampą, kurį su ordinačių ašimi sudaro kreivės $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$ liestinė, nubrėžta per tašką $x=1$.

15.099*. Parašykite kreivės $y=x^2-4x+3$ liestinių, einančių per tašką $M(2;\ -5)$, lygtis. Nubraižykite brėžinį.

15.100. Parašykite funkcijos $y=\ln(2e-x)$ grafiko liestinės taške $x=e$ lygtį.

15.101. Parašykite funkcijos $f(x)=2-4x-3x^2$ grafiko liestinės taške $x=-2$ lygtį.

15.102. Kuriuose taškuose funkcijos $y=2x^3-2x^2+x-1$ grafiko liestinės krypties koeficientas lygus 3?

15.103. Kuriuose taškuose funkcijos $y=\frac{x+2}{x-2}$ grafiko liestinė su ašimi Ox sudaro 135° kampą?

15.104. Duota funkcija $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$. Reikia: a) sudaryti šios funkcijos grafiko liestinės taške $x=\frac{\pi}{6}$ lygtį (galutines skaitines reikšmes suapvalinkite iki šimtųjų); b) nustatyti, kuriuose intervalo $0\leqslant x\leqslant\pi$ taškuose šios funkcijos grafiko liestinė su ašimi Ox sudaro 60° kampą.

15.105. Duota funkcija $f(x)=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$. Raskite: a) kampą, kurį ašis Ox sudaro su duotos funkcijos grafiko liestine taške $x=\frac{\pi}{3}$; b) minimumo taškus intervale $[0;\ \pi]$.

15.106*. Per funkcijų $y=\frac{6}{\sqrt{x}}$ ir $y=12x^{-1/2}-2x^{1/2}$ grafikų susikirtimo tašką nubrėžta kiekvieno grafiko liestinė. Raskite skirtumą kampų, kuriuos sudaro šios liestinės su teigiama ašies Ox kryptimi.

15.107. Per tašką $M(1;\ 8)$ nubrėžta kreivės $y=\sqrt{(5-x^{2/3})^3}$ liestinė. Raskite jos atkarpos tarp koordinačių ašių ilgį.

15.108. Koordinatinių kampų pusiaukampinės ir kreivės $y=\sqrt{x^2-5}$ liestinė, nubrėžta per tašką $M(3;\ 2)$, sudaro trikampį. Apskaičiuokite jo plotą.

15.109*. Nubrėžtos dvi hiperbolės $y=\frac{4}{x}$ liestinės: viena eina per tašką $M(2;\ 2)$, o kita yra lygiagreti tiesei $y=-4x$. Raskite kiekvienos šių liestinių ir koordinačių ašių sudarytų trikampių plotus.

15.110*. Kreivės $y=x^2$ bet kurios liestinės atkarpa tarp lietimosi taško ir ašies Ox suprojektuota į ašį Ox. Įrodykite, kad ta projekcija dvigubai didesnė už kreivės $y=x^4$ liestinės, einančios per tašką, kurio abscisė ta pati, atitinkamos atkarpos projekciją.

15.111*. Per pasirinktą kreivės $y=\sqrt{2x-x^2}$ tašką nubrėžta liestinė. Įrodykite, kad liestinės atkarpos nuo lietimosi taško iki jos susikirtimo su ašimi Oy ilgis lygus susikirtimo taško ordinatei.

15.112—15.115 uždaviniuose pateiktas judėjimo tiese dėsnis $s(t)$; s ir t išreiškiami atitinkamai metrais ir sekundėmis.

15.112. $s(t)=\frac{4t+3}{t+4}$. Raskite greitį laiko momentu $t=9$.

15.113. $s(t)=2t^3-3t+4$. Raskite greitį ir pagreitį laiko momentu $t=2$.

15.114. $s(t)=0{,}5t^4-5t^3+12t^2-1$. Kuriais laiko momentais kūno pagreitis lygus nuliui?

15.115. $s(t)=8-2t+24t^2-0{,}3t^5$. Kuriuo laiko momentu kūnas įgyja didžiausią greitį? Raskite tą greitį.

15.116. Dviejų materialiųjų taškų judėjimas išilgai vienos tiesės nusakomas lygtimis $s_1=4t^2+2$, $s_2=3t^2+4t-1$ (s_1, s_2 išreikšti

metrais, t — sekundėmis). Raskite taškų greičius tais laiko momentais, kai kūnai nueina vienodą kelią.

15.117. Dviejų materialiųjų taškų tiesiaeigis judėjimas nusakomas lygtimis $s_1=2t^3-5t^2-3t$, $s_2=2t^3-3t^2-11t+7$ (s_1, s_2 išreikšti metrais, t — sekundėmis). Raskite taškų pagreičius tuo laiko momentu, kai jų greičiai yra lygūs.

15.118. Du taškai juda ašimi Ox. Pirmo taško koordinatė x_1 apibrėžta formule $x_1=3t^2-5$, antro taško koordinatė x_2 — formule $x_2=3t^2-t+1$ (x_1, x_2 išreikšti metrais, t — sekundėmis). Raskite taškų greičius tuo laiko momentu, kai taškų koordinatės yra lygios.

15.119. Vertikaliai aukštyn mestas kūnas juda pagal dėsnį $h(t)=4+8t-5t^2$ (h išreikštas metrais, t — sekundėmis). Raskite kūno greitį tuo momentu, kai jis paliečia žemę (pagreitis g laikomas lygiu 10 m/s^2).

15.120. m_0 masės taškas juda tiesiai pagal dėsnį $s(t)=\frac{2}{2t-1}$. Įrodykite, kad kūną veikianti jėga proporcinga nueito kelio kubui.

15.121. m_0 masės kūnas juda tiesiai pagal dėsnį $s(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$ (α, β, γ — konstantos). Įrodykite, kad kūną veikia pastovi jėga.

15.122. Rutulio spindulys r tolygiai didėja 2 cm/s greičiu. Kokiu greičiu didėja rutulio paviršius ir tūris? Raskite šiuos greičius tuo laiko momentu, kai r lygus 10 cm (kai $t=0$, tai dydis $r=0$).

15.123. Per laiko tarpą t ratas pasisuka kampu $\alpha=3t^2-12t+36$ (α išreikštas radianais, t — sekundėmis). Raskite kampinį greitį ω laiko momentu $t=4$ ir nustatykite, kuriuo laiko momentu ratas sustos.

15.124. 25 cm ilgio plono nevienalyčio strypo įvairių dalių masę (gramais) nusako dėsnis $g(l)=4l^2-2l+5$; čia l — centimetrais išreikštas atstumas nuo strypo pradžios iki bet kurio jo taško. Raskite strypo tankį taške, nutolusiame 4 cm nuo strypo pradžios ir vidutinį strypo tankį.

15.125. Funkcija išreikšta formule $f(x)=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$. Įrodykite, kad ši funkcija didėja kiekviename taške, priklausančiame jos apibrėžimo sričiai.

15.126. Funkcija išreikšta formule $y=\sqrt{ax^3-6x^2+3x}$. Raskite visas konstantos a reikšmes, su kuriomis nurodytoji funkcija yra apibrėžta ir didėja, kai $x>0$.

Raskite funkcijų ekstremumo taškus **(15.127—15.130)**:

15.127. $y=\frac{x}{\ln x}$. 15.128. $y=\frac{\ln x+2}{x}$.

15.129. $y=x^2e^{-x}$. **15.130.** $y=x^3e^{-x}$.

15.131. Raskite funkcijos $y=x^2-\ln(1+2x)$ ekstremumą.

15.132. Raskite funkcijos $y=e^{-x}-e^{-2x}$ ekstremumo taškus ir kampą tarp ašies Ox bei šios funkcijos grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką $x=0$.

15.133. Raskite funkcijos $y=e^{-x}\sin x$ ekstremumo taškus ir kampą tarp ašies Ox bei šios funkcijos grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką $x=0$.

15.134. Raskite funkcijos $y=x-\ln(1+x)$ ekstremumo taškus ir šios funkcijos grafiko tašką, per kurį nubrėžta liestinė yra lygiagreti tiesei, einančiai per taškus $A(2;\ 3)$ ir $B(-1;\ 4)$.

15.135. Raskite funkcijos $y=x^3+\frac{3}{x}$ ekstremumus ir sudarykite jos grafiko liestinės taške $x=-2$ lygtį.

15.136. Duota funkcija $y=-4x^4-5x^2+9$. Raskite jos ekstremumus ir taškų, kuriuose jos grafikas kerta funkcijos $y=-9x^2+9$ grafiką, ordinates.

15.137. Įrodykite, kad funkcija $y=x^3+4x$ didėja visoje skaičių ašyje.

15.138. Su kuria p reikšme funkcija $f(x)=\cos x-px+q$ mažėja visoje skaičių ašyje?

15.139. Įrodykite, kad funkcija $y=2x+\sin x$ didėja visoje skaičių ašyje.

15.140. Įrodykite, kad funkcija $y=x+\frac{1}{1+x^2}$ didėja visoje skaičių ašyje.

Raskite funkcijų didėjimo ir mažėjimo intervalus **(15.141—15.145)**:

15.141. $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

15.142. $y=\frac{1}{x^2+x+1}$.

15.143. $f(x)=-x(x-3)^2$.

15.144. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}$.

15.145. $f(x)=(2^x-1)(2^x-4)^2$.

Raskite mažiausią ir didžiausią funkcijų reikšmę nurodytuose intervaluose **(15.146—15.164)**:

15.146. $y=x^3-3x^2+3x+2$; $[-2;\ 2]$.

15.147. $f(x)=3x^4+4x^3+1$; $[-2;\ 1]$.

15.148. $y=x^5-x^3+x+2$; $[-1;\ 1]$.

15.149. $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; $[-5;\ -1]$.

15.150. $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$; $[1;\ 6]$.

15.151*. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$; $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

15.152. $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}\sin x$; $[0;\ \pi]$.

15.153. $y(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$; a) $[-3;3]$; b) $[2\sqrt{5};\ 8]$.

15.154. $f(x)=x+\cos^2 x$; $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

15.155. $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x$; $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

15.156. $f(x)=0{,}5\cos 2x+\sin x$; $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

15.157. $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$; $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

15.158. $f(x)=\cos^2 x+\sin x$; a) $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; b) $\left[\frac{\pi}{3};\ \pi\right]$.

15.159*. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}$; a) $\left[\frac{3}{4};\ 2\right]$; b) $\left[\frac{3}{2};\ 3\right]$.

15.160. $f(x)=x+\frac{8}{x^4}$; a) $[-2;\ -1]$; b) $[1;\ 3]$.

15.161. $f(x)=(5-x)2^{-x}$; a) $[-1;\ 0]$; b) $[5;\ 6]$.

15.162. $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}$; a) $[-8;\ 1]$; b) $[-1;\ 1]$.

15.163. $y=3\sqrt[3]{(x-1)^2}+x$; a) $[-7;\ 0]$; b) $[1;\ 2]$.

15.164. $f(x)=2x^2-\ln x$; $[1;\ e]$.

15.165. Raskite didžiausią funkcijos $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x}$ reikšmę intervale $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

15.166. Raskite funkcijos $f(x)=x+\frac{1}{x}$ didėjimo ir mažėjimo intervalus ir nustatykite, katrame taške — $x_1=\log_5 4$ ar $x_2=\log_5 3$ — funkcija įgyja didesnę reikšmę.

15.167. Raskite funkcijos $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$ didėjimo ir mažėjimo intervalus ir nustatykite, katrame taške — $x_1=e^{-1}$ ar $x_2=e^{-2}$ — funkcijos reikšmė yra didesnė.

15.168. Raskite mažiausią funkcijos
$$f(x)=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$$
reikšmę intervale $(0;\ \pi)$.

15.169. Raskite mažiausią funkcijos
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$$
reikšmę intervale $[0;\ 1]$; n — natūralusis skaičius.

15.170*. Raskite funkcijos $y=\frac{x}{\ln x}$ didėjimo intervalą, po to nustatykite, kas daugiau: e^{π} ar π^{e}.

Raskite funkcijų ekstremumus ir didėjimo bei mažėjimo intervalus (**15.171—15.175**):

15.171. $y=e^{-x}-e^{-2x}$. 15.172. $y=x^2e^{-x}$.

15.173. $y=e^{-x}\sin x$, kai $0<x<\pi$.

15.174. $y=x+\ln(1-2x)$. 15.175. $y=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$.

15.176. Raskite skaičiaus 18 du dėmenis, kurių kvadratų suma yra mažiausia.

15.177. Raskite skaičiaus 180 tokius tris teigiamus dėmenis: dviejų iš jų santykis lygus 1 : 2, o trijų dėmenų sandauga yra didžiausia.

15.178. Raskite skaičių, kuris būtų kiek įmanoma didesnis už jo kvadratą.

15.179. 294 m² ploto stačiakampį žemės sklypą reikia aptverti ir po to perskirti tvora į dvi lygias dalis. Kokie turi būti sklypo matmenys, kad visos tvoros ilgis būtų mažiausias?

15.180. Stačiakampio skardos lakšto matmenys lygūs 5 dm ir 8 dm. Keturiuose jo kampuose išpjovus vienodus kvadratus ir užlenkus kraštus stačiuoju kampu, padaryta atvira dėžutė. Kokia gali būti didžiausia dėžutės talpa?

15.181. Į statųjį trikampį, kurio įžambinė 24 cm, o kampas 60°, įbrėžtas stačiakampis. Jo pagrindas yra trikampio įžambinėje. Kokio ilgio turi būti stačiakampio kraštinės, kad jo plotas būtų didžiausias?

15.182. Dvi lygiagretainio kraštinės yra duoto trikampio kraštinėse, o viena viršūnė priklauso trečiai kraštinei. Kada lygiagretainio plotas yra didžiausias?

15.183. Iš lygiašonių trikampių, kurių šoninė kraštinė a, išrinkite didžiausio ploto trikampį.

15.184. Trapecijos šoninės kraštinės ir trumpesnysis pagrindas yra vienodo ilgio — 50 cm. Kokio ilgio turi būti ilgesnysis jos pagrindas, kad trapecijos plotas būtų didžiausias?

15.185. Į statųjį trikampį, kurio kraštinės 18 cm, 24 cm ir 30 cm, įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis. Stačiakampio ir trikampio statusis kampas yra bendras. Raskite stačiakampio kraštinių ilgį.

15.186. Į stačiąją trapeciją, kurios pagrindų ilgis 24 cm ir 8 cm, aukštinės — 12 cm, įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis (dvi jo viršūnės yra trapecijos šoninėse kraštinėse, o kitos dvi — ilgesniajame pagrinde). Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgį.

15.187. Iš miestelio v km/h greičiu išėjo pasivaikščioti poilsiautojas. Kai jis nutolo nuo miestelio 6 km, paskui jį iš to paties miestelio išvažiavo dviratininkas, kurio greitis 9 km/h didesnis už poilsiautojo greitį. Kai dviratininkas pavijo poilsiautoją, abu pasuko atgal ir grįžo į miestelį kartu 4 km/h greičiu. Kokia turi būti v reikšmė, kad poilsiautojas užtruktų kelyje mažiausiai laiko?

15.188. Į lygiašonį trikampį, kurio kraštinių ilgis 15 cm, 15 cm ir 18 cm, įbrėžtas didžiausio ploto lygiagretainis; kampas prie pagrindo yra bendras. Raskite lygiagretainio kraštinių ilgį.

15.189. Į skritulį įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis. Jo perimetras lygus 56 cm. Raskite skritulio skersmenį.

15.190. Lygiašonės trapecijos šoninė briauna lygi trumpesniajam pagrindui. Koks turi būti kampas prie ilgesniojo pagrindo, kad trapecijos plotas būtų didžiausias?

15.191. Trapecijos $ABCD$ kampo A didumas lygus α. Šoninė kraštinė AB dvigubai ilgesnė už trumpesnįjį pagrindą BC. Su kuria reikšme kampo BAC didumas bus didžiausias? Kam lygi ši didžiausia reikšmė?

15.192. Lygiašonių trikampių pusiaukraštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę, yra tam tikro pastovaus ilgio. Raskite trikampio, kurio plotas didžiausias, kampo prie viršūnės kosinusą.

15.193. Lygiašonio trikampio kampo prie pagrindo didumas lygus α. Kokia turi būti α reikšmė, kad įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių santykis būtų didžiausias? Kam lygi didžiausia šio santykio reikšmė?

15.194. Koks turi būti atviro ritinio formos bako pagrindo spindulys ir aukštinė, kad V tūrio bakui pagaminti būtų sunaudota mažiausiai lakštinio metalo?

15.195. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės sienos plotas yra pastovus, o pati siena pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Kokia turi būti α reikšmė, kad piramidės tūris būtų didžiausias?

15.196. Į taisyklingąją keturkampę piramidę, kurios pagrindo briauna a ir aukštinė H, įbrėžta taisyklingoji keturkampė prizmė. Jos apatinis pagrindas priklauso piramidės pagrindui, o viršutinio pagrindo viršūnės — šoninėms briaunoms. Raskite didžiausio šoninio paviršiaus prizmės pagrindo briaunos ilgį ir aukštinės ilgį.

15.197. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna yra tam tikro pastovaus ilgio ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Su kuria α reikšme piramidės tūris yra didžiausias?

15.198. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninės sienos plotas yra pastovus, o pati siena su pagrindo plokštuma sudaro

kampą α. Su kuria α reikšme atstumas nuo piramidės pagrindo centro iki jos šoninės sienos yra didžiausias?

15.199. Į tam tikro pastovaus tūrio kūgį įbrėžta piramidė; jos pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio kampo prie viršūnės didumas lygus α. Su kuria α reikšme piramidės tūris yra didžiausias?

15.200. Kūgio sudaromoji yra pastovaus ilgio ir su kūgio aukštine sudaro kampą α. Į kūgį įbrėžta taisyklingoji šešiakampė prizmė, kurios briaunos yra vienodo ilgio (prizmės pagrindas — kūgio pagrindo plokštumoje). Su kuria α reikšme prizmės šoninis paviršius yra didžiausias?

15.201. Kintamasis y atvirkščiai proporcingas kintamajam x. Raskite atvirkščiojo proporcingumo koeficientą ir užpildykite lentelę:

x		0,1	9,6
y	30		3,05

Raskite nurodyto atvirkščiojo proporcingumo grafiko tašką, kuris yra arčiausiai koordinačių pradžios $O(0;\ 0)$.

15.202. Elektrinio elemento galia apibrėžiama formule $P=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$; čia E — pastovi elemento elektrovaros jėga, r — pastovi vidinė varža, R — išorinė varža. Kokia turi būti išorinė varža R, kad galia P būtų didžiausia?

Raskite šių funkcijų didėjimo ir mažėjimo intervalus, ekstremumo taškus ir nubraižykite funkcijų grafikų eskizus **(15.203—15.212)**:

15.203. $y=2x^3+3x^2-1$.

15.204. $y=0{,}5x^4-4x^2$.

15.205. $y=x^4-10x^2+9$.

15.206. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+3$.

15.207. $y=x^3-3x^2+2$.

15.208. $y=2x^3-15x^2+36x$.

15.209. $y=8+2x^2-x^4$.

15.210. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2-\frac{9}{4}$.

15.211. $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$.

15.212. $y=\frac{2}{1+x^2}$.

Raskite šių funkcijų didėjimo ir mažėjimo intervalus bei ekstremumo taškus **(15.213—15.230)**:

15.213. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

15.214. $y=\frac{-5}{(x-2)^2+1}$.

15.215. $y=x^2+\frac{1}{x}$.

15.216. $y=x+\frac{4}{x^2}$.

15.217. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

15.218. $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$.

15.219. $y=\frac{x^2-4x}{x^2-4x+8}$.

15.220. $y=\frac{1}{x^2+8x}$.

15.221. $y=\frac{x+2}{x^2-9}$.

15.222. $y=\frac{4}{x^2-2x+2}$.

15.223. $y=\frac{1-x}{(x-2)^3}$.

15.224. $y=\frac{3x}{x^2+4x+4}$.

15.225. $y=\frac{x^2+2x}{x-1}$.

15.226. $y=\frac{x-1}{x^2-2x+2}$.

15.227. $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$.

15.228. $y=\frac{x^2}{x^3-1}$.

15.229. $y=\frac{(x-3)^2}{x^2}$.

15.230. $y=\frac{1}{(x-1)(x-4)}$.

15.231*. Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad su $x>0$ yra teisinga nelygybė

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},\ n\in N.$$

15.232. Raskite funkciją $F(x)$, kurios grafikas eina per nurodytąjį tašką $M_0(x;\ y)$, kai:

a) $F'(x)=4x^2+9x^{-2}$; $M_0(3;\ -2)$;

b) $F'(x)=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{1}{3}$; $M_0(2;\ 1)$.

Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę $F(x)$, kurios grafikas eina per tašką $M_0(x_0;\ y_0)$ (**15.233—15.236**):

15.233. $f(x)=x^4$; $M_0(-1;\ 2)$.

15.234. $f(x)=\sin 2x$; $M_0(0;\ 1)$.

15.235. $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$; $M_0\left(\frac{\pi}{12};\ -1\right)$.

15.236. $f(x)=x^{-4}$; $M_0(2;\ -3)$.

15.237. Raskite funkciją $F(x)$, kai $F'(x)=4x^3-3x^2$ ir $F(1)=3$.

15.238. Raskite funkcijos $f(x)=\cos 4x$ pirmykštę $F(x)$, kai $F\left(\frac{\pi}{24}\right)=-1$.

15.239. Raskite funkciją $S(x)$, kai $S'(x)=\frac{2}{\sqrt{5-x}}$ ir $S(1)=1$.

Apskaičiuokite integralus (**15.240—15.265**):

15.240. $\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$.

15.241. $\int_{-\pi}^{\pi/2}\sin^2 2x\,dx$.

15.242. $\int_8^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

15.243. $\int_0^{\pi/4}(\sin 2t-\cos 2t)^2dt$.

15.244. $\int_0^{3\pi/2}\frac{dx}{\cos^2\frac{2x}{9}}$.

15.245. $\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)dx$.

15.246. $\int_{-\pi}^{2\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx$.

15.247. $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx$.

15.248. $\int_0^{2\pi/3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx$.

15.249. $\int_0^{2}(1+3x)^4dx$.

15.250. $\int_9^{-54}\sqrt[3]{2-\frac{t}{9}}\,dt$.

15.251. $\int_0^{7/3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$.

15.252. $\int_0^{0,5}\sqrt{1-x}\,dx$.

15.253. $\int_1^{e}\frac{dx}{0,5x}$.

15.254. $\int_1^{0,5}\left(4x-\frac{1}{2x}\right)dx$.

15.255. $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x}}$.

15.256. $\int_{\pi/6}^{\pi/4}(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)^{-1}\,dx$.

15.257. $\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx$.

15.258. $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$.

15.259. $\int_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{9+16x}}$.

15.260. $\int_0^{1}\frac{xdx}{(x+1)^3}$.

15.261. $\int_{-1}^{15}\frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$.

15.262. $\int_0^{\pi}\sin 2x\cos 3x\,dx$.

15.263. $\int_0^{\pi/2}\sin 4x\sin 5x\,dx$.

15.264. $\int_0^{\pi/2}\cos 3x\cos 2x\,dx$.

15.265. $\int_{-2}^{2}(10^{x/4}-\sin\pi x)\,dx$.

Apskaičiuokite šių kreivių ribojamų figūrų plotus (**15.266—15.273**):

15.266. $y=x^3$, $y=1$ ir $x=2$.

15.267. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$ ir $x=\frac{\pi}{4}$.

15.268. $y=\sqrt{x}$, $y=2$ ir $x=9$.

15.269. $y=x^3$ ir $y=\sqrt{x}$.

15.270. $y=2x-x^2$ ir $y=\frac{3}{4}$.

15.271. $y=x^4$ ir $y=x$.

15.272. $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=0{,}5$ ir $x=2{,}5$.

15.273. $y=\frac{5}{x}$ ir $y=6-x$.

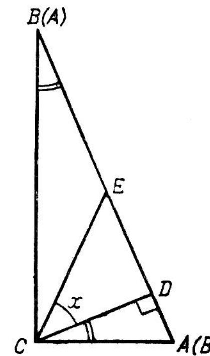
15.274. Kam lygus kelias, kurį tolygiai judantis taškas nueina per laiko tarpą nuo $t_1=1$ iki $t_2=4$; taško greitis $v(t)=2t^2+3t$ (t išreikštas sekundėmis, v — metrais sekundei)? Koks šio taško pagreitis laiko momentu $t=2$?

15.275. Kūnas juda tiesiai $v(t)=\sqrt[3]{1+t}$ greičiu (t išreikštas sekundėmis, v — metrais sekundei). Apskaičiuokite, kokį kelią kūnas nueina per pirmąsias 7 s. Koks kūno pagreitis laiko momentu $t=7$?

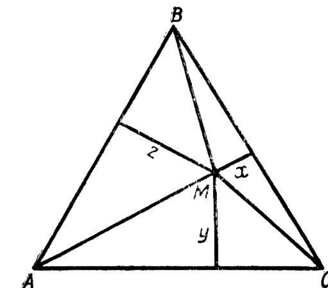
16 SKYRIUS
PAPILDOMI GEOMETRIJOS UŽDAVINIAI

1 pavyzdys. Įrodykite, kad kampo tarp stačiojo trikampio pusiaukraštinės ir aukštinės, nubrėžtų į įžambinę, didumas lygus smailiųjų trikampio kampų didumų skirtumo moduliui (16.1 pav.).

$\triangle$ Sakykime, $\angle C=\frac{\pi}{2}$, CD — aukštinė, CE — pusiaukraštinė. Reikia įrodyti, kad $\angle DCE=|\angle B-\angle A|$. Tarkime, kad $\angle DCE=\angle x$; tada $\angle DCA=\angle B$ $\left(\text{nes abu kampai papildo kampą } A \text{ iki } \frac{\pi}{2}\right)$. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę, yra perpus trumpesnė už įžambinę; vadinasi, $\triangle ACE$ — lygiašonis ir $\angle ECA=\angle x+\angle B=\angle A$; iš čia $\angle x=\angle A-\angle B$. Jeigu raides A ir B sukeistume vietomis (žr. 16.1 pav.), tai gautume $\angle x=\angle B-\angle A$. Abu rezultatus galima sujungti į vieną: $\angle x=|\angle B-\angle A|$. ▲



16.1 pav.



16.2 pav.

2 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinės lygios a, b ir c, o aukštinės h_a, h_b ir h_c. Įrodykime, kad kiekvienas trikampio taškas M tenkina lygybę $\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1$; čia x, y ir z — atitinkami atstumai nuo taško M iki kraštinių BC, AC ir AB (16.2 pav.). Suformuluokite lygiakraščio trikampio panašią savybę.

$\triangle$ Tašką M sujungę su viršūnėmis A, B ir C, gauname trikampius BMC, AMC ir AMB, kurių aukštinės lygios atitinkamai x, y ir z. Sakykime, S — trikampio ABC plotas; tada $S=\frac{1}{2}(ax+by+cz)$. Antra vertus, $S=\frac{1}{2}ah_a$, $S=\frac{1}{2}bh_b$, $S=\frac{1}{2}ch_c$. Sulyginę šias lygybes, gauname:

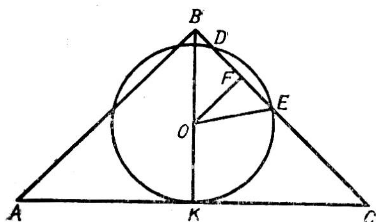
$$\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1.$$

Lygiakraščio trikampio $h_a=h_b=h_c=h$, todėl $x+y+z=h$, t. y. atstumų nuo lygiakraščio trikampio bet kurio taško iki jo kraštinių suma yra pastovi ir lygi trikampio aukštinei.

24. Užsak. Nr. 1941.

3 pavyzdys. Lygiašonio stačiojo trikampio įžambinės ilgis lygus 40. Apskritimas, kurio spindulys lygus 9, liečia įžambinę jos vidurio taške. Apskaičiuokite, kokio ilgio statinio atkarpą iškerta šis apskritimas iš vieno iš statinių.

△ Pirmiausia išsiaiškinkime, ar uždavinys turi sprendinį su nurodytomis įžambinės ilgio ir apskritimo spindulio reikšmėmis. Iš brėžinio (16.3 pav.) matome, kad apskritimas, kurio centras O yra trikampio ABC aukštinėje BK, kerta statinį BC dviejuose taškuose D ir E tada ir tik tada, kai apskritimo spindulys OK yra ne didesnis kaip pusė aukštinės BK, bet didesnis už įbrėžto į trikampį apskritimo spindulį. Pirmoji sąsaja akivaizdi ($9<10$), o antrąją nesunku patikrinti. Įbrėžtinio apskritimo spindulį r



16.3 pav.

rasime pagal formulę $r=\frac{S}{p}$. Taigi $r=$

$$=\frac{20\sqrt{2}\cdot 20\sqrt{2}}{2\cdot\frac{40+40\sqrt{2}}{2}}=\frac{20}{\sqrt{2}+1}=20\sqrt{2}-20.$$

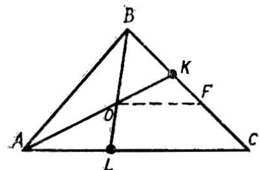
Įrodysime, kad $9>20\sqrt{2}-20$, t. y. kad $29>20\sqrt{2}$. Abi nelygybės puses pakėlę kvadratu, gausime teisingą nelygybę $841>800$; vadinasi, teisinga ir pradinė nelygybė.

Norėdami rasti atkarpos DE ilgį, nubrėžiame $OF\perp DE$ ir nurodyto apskritimo spindulį OE. Nuosekliai apskaičiuojame atkarpų BO, OF, FE ir DE ilgį:

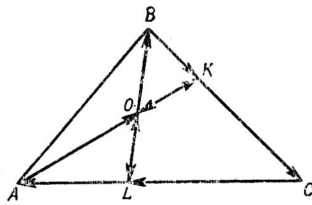
$$BO=BK-OK=11,\ OF=BO\cdot\sin 45^\circ=\frac{11\sqrt{2}}{2},\quad FE=\sqrt{OE^2-OF^2}=$$

$$=\sqrt{81-\frac{121}{2}}=\sqrt{\frac{41}{2}},\quad DE=2FE=\sqrt{82}.\ ▲$$

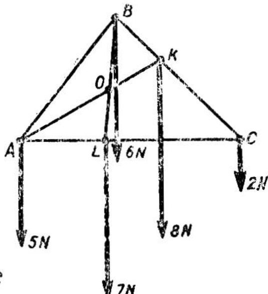
4 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinės BC taškas K dalija ją santykiu $1:3$ skaičiuojant nuo viršūnės B, o taškas L dalija kraštinę AC santykiu $2:5$ skaičiuojant nuo viršūnės A. Kokiu santykiu tiesių AK ir BL susikirtimo taškas O dalija atkarpas AK ir BL skaičiuojant nuo atitinkamų viršūnių?



16.4 pav.



16.5 pav.



16.6 pav.

△ I būdas. Sakykime, $BK=x$, $AL=2y$ (16.4 pav.); tada pagal sąlygą $KC=3x$, $LC=5y$. Tarkime, kad $KF=m$, $OF=n$. Iš panašiųjų trikampių KOF ir AKC gauname $\frac{n}{m}=\frac{7y}{3x}$; iš čia

$$\frac{n}{y}=\frac{7m}{3x}. \qquad (*)$$

Trikampiai BOF ir BLC panašūs, todėl $\frac{n}{5y}=\frac{x+m}{4x}$; iš čia

$$\frac{n}{y}=\frac{5(x+m)}{4x}. \qquad (**)$$

Sulyginę proporcijų (*) ir (**) dešiniąsias puses ir suprastinę, gauname $28m=15(x+m)$; iš čia $m=\frac{15x}{13}$. Vadinasi, $BF=BK+KF=\frac{28x}{13}$ ir $CF=BC-$ $-BF=4x-\frac{28x}{13}=\frac{24x}{13}$. Pagal Talio teoremą

$$\frac{BO}{OL}=\frac{BF}{FC}=\frac{\frac{28x}{13}}{\frac{24x}{13}}=\frac{7}{6},\quad \frac{AO}{OK}=\frac{\frac{24x}{13}}{\frac{15x}{13}}=\frac{8}{5}.$$

II būdas. Pažymėkime: $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$, $\overline{AO}=\bar{x}$, $\overline{LO}=\bar{y}$ (16.5 pav.). Tada vektorius $\overline{OK}$ ir $\overline{OB}$, kolinearius vektoriams $\overline{AO}$ ir $\overline{LO}$, galėsime užrašyti taip: $\overline{OK}=\alpha\overline{AO}$ ir $\overline{OB}=\beta\overline{LO}$; skaičius α ir β reikia rasti.

Išnagrinėkime tris uždarus kontūrus: $OBKO$ (I); $OLAO$ (II); $OKCLO$ (III). Iš (I) gauname: $\overline{OB}+\overline{BK}+\overline{KO}=\bar{0}$, t. y. $\beta\bar{y}+\frac{1}{4}\bar{a}-\alpha\bar{x}=\bar{0}$; iš (II): $\overline{OL}+\overline{LA}+$ $+\overline{AO}=\bar{0}$, t. y. $-\bar{y}+\frac{2}{7}\bar{b}+\bar{x}=\bar{0}$; iš (III): $\overline{OK}+\overline{KC}+\overline{CL}+\overline{LO}=\bar{0}$, t. y. $\alpha\bar{x}+$ $+\frac{3}{4}\bar{a}+\frac{5}{7}\bar{b}+\bar{y}=\bar{0}$. Galiausiai gauname lygčių sistemą

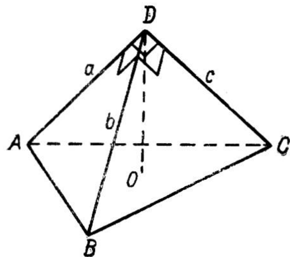
$$\begin{cases} -\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}+\frac{1}{4}\bar{a}=\bar{0}, \\ \bar{x}-\bar{y}+\frac{2}{7}\bar{b}=\bar{0}, \\ \alpha\bar{x}+\bar{y}+\frac{3}{4}\bar{a}+\frac{5}{7}\bar{b}=\bar{0}. \end{cases}$$

Remdamiesi pirma ir antra lygtimi, vektorius $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ išreikškime vektoriais $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ ir gautas reikšmes įrašykime į trečią lygtį. Pertvarkę ją, gausime:

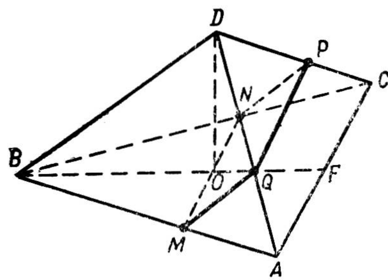
$$\left(4\alpha-\frac{5}{2}\right)\bar{x}+\left(\frac{7}{2}-3\beta\right)\bar{y}=\bar{0}.$$

Kadangi vektoriai $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ yra nekolinearūs, tai ši lygybė teisinga tik tada, kai $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ koeficientai lygūs nuliui: $4\alpha-\frac{5}{2}=0$, $\frac{7}{2}-3\beta=0$. Iš čia $\alpha=$ $=\frac{5}{8}$, $\beta=\frac{7}{6}$, t. y. $\overline{OK}=\frac{5}{8}\overline{AO}$, $\overline{OB}=\frac{7}{6}\overline{LO}$. Taigi $AO:OK=8:5$, $BO:OL=7:6$.

III būdas. Sakykime, trikampio ABC kraštinės yra nesvarūs strypai, o trikampio viršūnes veikia lygiagrečios jėgos (16.6 pav.). Tarkime, kad viršūnę C veikia 2 N jėga; tada pagal pusiausvyros sąlygą (jėgos momentai taško K atžvilgiu turi būti lygūs) tašką B turi veikti 6 N jėga, o tašką K pagal lygiagrečių jėgų sudėties taisyklę — 8 N jėga. Panašiai prieiname išvadą, kad tašką A turi veikti 5 N jėga, o tašką L — 7 N jėga. Pagaliau pagal pusiausvyros taško O atžvilgiu sąlygą gauname $AO:OK=8:5$ ir $BO:OL=7:6$. ▲



16.7 pav.



16.8 pav.

5 pavyzdys. Trikampės piramidės šoninės briaunos poromis statmenos. Jų ilgis a, b ir c. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

△ Piramidės pagrindu laikysime statųjį trikampį ADB (16.7 pav.), o viršūne — tašką C. Kadangi $CD \perp AD$ ir $CD \perp BD$, tai pagal tiesės ir plokštumos statmenumo teoremą $CD \perp$pl. ADB; vadinasi, briauna CD — piramidės aukštinė. Pagal (11.11) formulę randame piramidės tūrį:

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{abc}{2}=\frac{abc}{6}.\ ▲$$

6 pavyzdys. Piramidės $ABCD$ pagrindas — smailusis lygiašonis trikampis ABC, kurio $AB=BC=a$, ir $AC=b$ (16.8 pav.). Kiekviena šoninė briauna lygi c. Per apibrėžto apie pagrindą apskritimo centrą išvesta plokštuma, lygiagreti tiesėms DB ir AC. Raskite pjūvio plotą.

△ Trikampis ABC — smailusis, todėl apie jį apibrėžto apskritimo centras O yra trikampio viduje ir nurodytoji plokštuma kerta visas piramidės sienas. Kadangi piramidės visos šoninės briaunos lygios, tai viršūnės D projekcija yra taškas O (žr. 11 skyrių) ir DB projekcija pagrindo plokštumoje lygi atkarpai BO, kuri statmena piramidės pagrindo kraštinei AC. Pagal trijų statmenų teoremą $BD \perp AC$.

Norėdami išvesti nurodytą plokštumą, per tašką O nubrėžiame tiesę $MN \parallel AC$ (plokštumoje ABC), o per tašką N — tiesę $NP \parallel DB$ (plokštumoje BDC).

Plokštuma MNP lygiagreti tiesėms AC ir BD (pagal tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymį) ir kerta šoninę sieną ADC tiese PQ, lygiagrečia briaunai AC, o šoninę sieną ABD — tiese MQ, lygiagrečia briaunai BD. Pjūvis $MNPQ$ — stačiakampis, nes anksčiau įrodėme, jog $BD \perp AC$, o MN ir NP lygiagrečios atitinkamai briaunoms AC ir BD.

Raskime stačiakampio $MNPQ$ kraštinių ilgį. BO — apibrėžtinio apskritimo spindulys, o BF — trikampio ABC aukštinė. Sakykime, $BO=R$ ir $BF=h$. Kadangi trikampiai MNB ir ABC panašūs, tai $\frac{R}{h}=\frac{MN}{b}=\frac{BN}{a}$; iš čia $MN=$ $=\frac{bR}{h}$ ir $BN=\frac{aR}{h}$. Toliau, $CN=BC-BN=\frac{a(h-R)}{h}$. Trikampiai CNP ir CBD taip pat panašūs, todėl $\frac{PN}{BD}=\frac{CN}{BC}$, arba $\frac{PN}{c}=\frac{h-R}{h}$; iš čia $PN=\frac{c(h-R)}{h}$. Vadinasi, pjūvio plotas:

$$S_{MNPQ}=MN\cdot PN=\frac{bcR(h-R)}{h^2}, \qquad (*)$$

Dar reikia h ir R išreikšti žinomais dydžiais. Iš trikampio BFC randame $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$. Lygiašonio trikampio R, h ir a priklausomybė

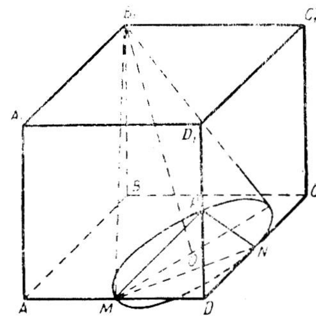
išreiškiama formule $R=\frac{a^2}{2h}$ (žr. 12 skyriaus 3⁰ punktą). Šias reikšmes įrašę į (*) lygybę ir suprastinę, gauname:

$$S_{MNPQ}=\frac{2a^2bc(2a^2-b^2)}{(4a^2-b^2)^2}.$$

Įrodysime, kad gauta ploto formulė turi prasmę, t. y. kad $2a^2-b^2>0$. Čia ir vėl svarbu, kad lygiašonis trikampis ABC — smailusis. Iš to išplaukia, jog kampas A prie pagrindo didesnis negu 45°. Todėl $\cos A<\cos 45°$, t. y. $\frac{\frac{b}{2}}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$; iš čia $b<a\sqrt{2}$, $b^2<2a^2$ ir $2a^2-b^2>0$. ▲

7 pavyzdys. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio briaunos ilgis a. Raskite tūrį kūgio, kurio viršūnė sutampa su viršūne B_1, o pagrindo apskritimas eina per kubo trijų briaunų, išeinančių iš viršūnės D, vidurio taškus.

△ Sakykime, taškai M, N ir P (16.9 pav.) — atitinkamai briaunų AD, CD ir DD_1 vidurio taškai, t. y. $MD=ND=PD=\frac{a}{2}$. Iš lygiašonių stačiųjų trikampių DPN, DPM ir DMN lygybės išplaukia, kad $MN=MP=NP=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Statieji trikampiai B_1MA, B_1NC ir B_1PD_1 (jų vienas statinis yra atitinkamos kubo sienos įstrižainė, o kitas — pusė kubo briaunos) irgi lygūs. Todėl $B_1M=$ $=B_1N=B_1P=\sqrt{B_1D_1^2+D_1P^2}=\sqrt{2a^2+\frac{a^2}{4}}=$ $=\frac{3}{2}a$. Vadinasi, taškai M, N ir P yra vienodai nutolę ir nuo taško D, ir nuo taško B_1. Todėl tiesė B_1D statmena trikampio MNP plokštumai ir kerta tą plokštumą taške O — apie trikampį MNP apibrėžto apskritimo centre. Taigi ON — kūgio pagrindo spindulys, B_1O — kūgio aukštinė.



16.9 pav.

Į R spindulio apskritimą įbrėžto taisyklingojo trikampio kraštinė a_3 išreiškiama formule $a_3=R\sqrt{3}$, todėl $R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}$. Vadinasi, $ON=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Po to iš trikampio B_1NO randame $B_1O=\sqrt{B_1N^2-ON^2}=\sqrt{\frac{9}{4}a^2-\frac{a^2}{6}}=$ $=\frac{5a}{2\sqrt{3}}$. Galiausiai gauname:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{6}\cdot\frac{5a}{2\sqrt{3}}=\frac{5\pi a^3\sqrt{3}}{108}.\ ▲$$

16.001. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas. Jis liečia vieną iš statinių ir dalija jį į m ir n $(m<n)$ ilgio atkarpas. Raskite to trikampio įžambinę.

16.002. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio pusiaukraštinių kvadratų suma sudaro 75% jo kraštinių kvadratų sumos.

16.003. Stačiojo trikampio įžambinė c, o vienas iš smailiųjų kampų α. Raskite trikampio stačiojo kampo pusiaukampinę.

16.004. Įrodykite, kad pusskritulio, kurio skersmuo — stačiojo trikampio įžambinė, plotas lygus pusskritulių, kurių skersmenys yra jo statiniai, plotų sumai.

16.005. Iš kurių lygių taisyklingųjų bendravardžių daugiakampių lentelių galima sudėti parketą?

16.006. Stačiojo trikampio bukojo priekampio tangentas lygus k. Raskite trikampio smailiojo kampo, negretutinio duotajam priekampiui, tangentą.

16.007. Kiek įstrižainių turi iškilasis aštuoniakampis?

16.008. Į R spindulio apskritimą įbrėžtas taisyklingasis n-kampis, kurio plotas $3R^2$. Raskite n.

16.009. Pusiaukraštinės dalija trikampį į šešias dalis, neturinčias bendrų vidinių taškų. Palyginkite tų dalių plotus.

16.010. Raskite į R spindulio apskritimą įbrėžto taisyklingojo dvylikakampio plotą.

16.011. Įrodykite, kad tiesė, einanti per smailiojo trikampio dviejų aukštinių pagrindus, nukerta nuo jo panašų trikampį.

16.012. Tam tikro trikampio pusiaukraštinė sutampa su jo pusiaukampine. Įrodykite, kad trikampis yra lygiašonis.

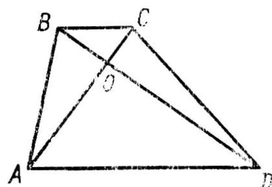
16.013. Duota atkarpa AB ir tiesė, nestatmena atkarpai ir kertanti ją taške, kuris nėra tos atkarpos vidurio taškas. Mokinys pažymėjo tašką B_1, simetrišką taškui B duotos tiesės atžvilgiu, ir pastebėjo, kad nesunku nubraižyti trikampį ABC, kurio kampo ACB pusiaukampinė yra duotoje tiesėje. Kaip tai galima padaryti?

16.014. Kurio iškilojo daugiakampio įstrižainių skaičius lygus kraštinių skaičiui?

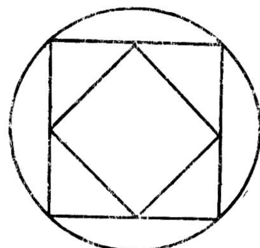
16.015. Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinės ilgis mažesnis už kraštinių, tarp kurių yra ta pusiaukraštinė, ilgių sumos pusę.

16.016. Taškų poros A ir A_1, B ir B_1 yra simetriškos vienos tiesės atžvilgiu. Įrodykite, kad šie keturi taškai priklauso vienam apskritimui arba vienai tiesei.

16.017. Jeigu vieno trikampio dvi kraštinės ir pusiaukraštinė lygios atitinkamai kito trikampio dviem kraštinėms ir pusiaukraštinei, tai tokie trikampiai yra lygūs. Įrodykite (išnagrinėkite du atvejus).



16.10 pav.



16.11 pav.

16.018. Įrodykite, kad bet kurios trapecijos $ABCD$ (16.10 pav.) trikampiai AOB ir COD yra lygiapločiai.

16.019. Į spindulio $R=1$ cm apskritimą įbrėžtas kvadratas, o į jį — antras kvadratas, kurio viršūnės dalija pirmo kvadrato kraštines pusiau (16.11 pav.). Neapskaičiuodami pirmo kvadrato kraštinės ilgio, įrodykite, kad antro kvadrato plotas lygus 1 cm^2.

16.020. Įrodykite, kad stačiojo trikampio stačiojo kampo pusiaukampinė dalija pusiau kampą tarp pusiaukraštinės ir aukštinės, nubrėžtų į įžambinę.

16.021. Įrodykite, kad trikampio aukštinių ilgių suma mažesnė už jo perimetrą.

16.022. Iš kurių plokštumos taškų duotoji atkarpa matoma duotuoju kampu?

16.023. Trys trikampio vidurinės linijos dalija trikampį į keturias dalis, kurių vienos plotas S. Kam lygus trikampio plotas?

16.024. Trikampio plotas lygus 1, o kraštinių ilgiai a, b ir c, be to, $a \geqslant b \geqslant c$. Įrodykite, kad $b \geqslant \sqrt{2}$.

16.025. Kiekvieno iš dviejų lygių R spindulio skritulių apskritimas eina per kito centrą. Raskite šių skritulių bendros dalies plotą.

16.026. Lygiašoniai trikampiai turi bendrą pagrindą. Kokią figūrą sudaro visų tokių trikampių viršūnių aibė?

16.027. Iš taško A nubrėžti du spinduliai kerta duotąjį apskritimą: vienas — taškuose B ir C, kitas — taškuose D ir E. Yra žinoma, kad $AB=7$, $BC=7$, $AD=10$. Raskite DE.

16.028. Nelygiagrečiosios trapecijos kraštinės pratęstos tiek, kad susikirstų. Įrodykite, kad tiesė, einanti per gautąjį tašką ir įstrižainių susikirtimo tašką, dalija kiekvieną iš lygiagrečiųjų trapecijos kraštinių į dvi lygias dalis.

16.029. Stačiojo trikampio statinių ilgių suma lygi s. Raskite jo įžambinės ilgio c galimų reikšmių ribas.

16.030. Įrodykite, kad iš trijų stačiojo trikampio pusiaukraštinių trumpiausia yra ta, kuri nubrėžta į įžambinę.

16.031. Per įvairiakraščio trikampio trumpiausios kraštinės tašką nubrėžkite tiesę, nukertančią nuo šio trikampio panašų į duotąjį trikampį. Įrodykite, kad yra keturios tokios tiesės.

16.032. Kiek daugiausia smailiųjų kampų gali turėti bet kuris iškilasis daugiakampis?

16.033. Trikampių kraštinė yra bendra, o kampai prieš ją — lygūs. Kokią figūrą sudaro tokių trikampių ortocentrų (aukštinių susikirtimo taškų) aibė?

16.034. Į 90° skritulio išpjovą, kurios spindulys R, įbrėžtas kvadratas. Dvi jo viršūnės priklauso kraštiniams spinduliams, dvi — išpjovos lankui. Raskite kvadrato kraštinę.

16.035. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio taško taisyklingojo daugiakampio viduje iki tiesių, kuriose yra jo kraštinės, suma lygi daugiakampio apotemos ir jo kraštinių skaičiaus sandaugai.

16.036*. Iškilojo keturkampio kiekviena kraštinė mažesnė už a. Įrodykite, kad to keturkampio plotas mažesnis už a^2.

16.037. 4 m spindulio apskritimo styga matoma iš jo mažesniojo lanko kiekvieno taško 135° kampu. Raskite stygos ilgį.

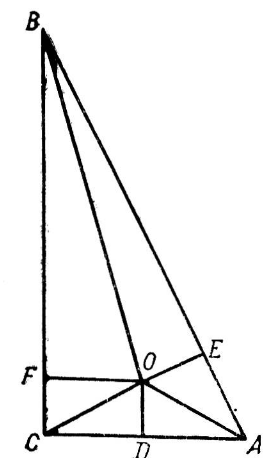
16.038. Apskritimo, kurio spindulys a, styga matoma iš jo didesniojo lanko kiekvieno taško 30° kampu. Apskaičiuokite tos stygos ilgį.

16.039. Duotas trikampis ABC. Pagrindą BC laikydami kraštine, nubraižykite trikampį, kurio plotas būtų toks pat, kaip duotojo, o kampas prie viršūnės B lygus duotojo trikampio kampo B pusei.

16.040. Bukųjų trikampių kraštinių ilgis išreikštas sveikaisiais skaičiais, sudarančiais aritmetinę progresiją, kurios skirtumas 3 cm. Raskite kiekvieno šių trikampių trumpiausios kraštinės ilgį.

16.041. Sakykime, n — iškilojo daugiakampio kraštinių skaičius, o d — jo įstrižainių skaičius. Nurodykite visas n reikšmes, su kuriomis $n>d$.

16.042. Suformuluokite teisingą teiginį, kuriam atvirkštinis teiginys taip pat būtų teisingas. Suformuluokite teisingą teiginį, kuriam atvirkštinis teiginys būtų klaidingas.



16.12 pav.

16.043. Sakykime, BO — stačiojo trikampio ABC kampo B pusiaukampinė, D — statinio AC vidurio taškas, $DO\perp AC$, $OE\perp AB$, $OF\perp BC$, AB — įžambinė (16.12 pav.). Nesunku įrodyti, kad $\triangle BOE=\triangle BOF$; iš čia $BE=BF$. (*) Kadangi $OA=OC$, tai $\triangle OEA=\triangle OCF$; iš čia $AE=FC$. (**) Sudėję (*) ir (**) lygybes, gauname $AB=BC$, t. y. įžambinės ilgis lygus statinio ilgiui. Pateiktame įrodyme raskite klaidą.

16.044. Trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus 24 cm, atstumas tarp įstrižainių vidurio taškų 4 cm. Raskite trumpesnįjį trapecijos pagrindą.

16.045. Lygiagretainio smailiojo kampo pusiaukampinė dalija jo įstrižainę į 3,2 cm ir 8,8 cm ilgio atkarpas. Lygiagretainio perimetras lygus 30 cm. Raskite lygiagretainio kraštines.

16.046. Trapecijos lygiagrečių kraštinių ilgis 25 cm ir 4 cm, o nelygiagrečių — 20 cm ir 13 cm. Apskaičiuokite trapecijos aukštinę.

16.047. Trikampio kampo pusiaukampinė dalija priešingą kraštinę į 8 cm ir 10 cm ilgio atkarpas. Įbrėžtinio apskritimo centras dalija šią pusiaukampinę santykiu 3 : 2 skaičiuojant nuo kampo viršūnės. Raskite kiekvienos trikampio kraštinės ilgį.

16.048. Į keturkampį, kurio trys iš eilės einančios kraštinės lygios 2 cm, 3 cm ir 4 cm, įbrėžtas 1,2 cm spindulio apskritimas. Apskaičiuokite keturkampio plotą.

16.049. Trikampio dvi kraštinės ir kampo tarp jų pusiaukampinė lygios atitinkamai 60 cm, 40 cm ir 24 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

16.050. Lygiašonio trikampio kampo prie pagrindo pusiaukampinė dalija šoninę kraštinę į 4 cm ir 1 cm ilgio atkarpas skaičiuojant nuo viršūnės. Raskite pusiaukampinės ilgį.

16.051. Lygiašonio trikampio kampo prie pagrindo pusiaukampinė dalija priešingą kraštinę taip, kad atkarpa, esanti prie trikampio viršūnės, lygi jo pagrindui. Įrodykite, kad pusiaukampinė taip pat lygi trikampio pagrindui.

16.052. Iš tos pačios trikampio viršūnės išeinanti kraštinė, pusiaukampinė ir aukštinė lygi atitinkamai 5 cm, 5 cm ir $2\sqrt{6}$ cm. Raskite kitas dvi trikampio kraštines.

16.053. Stačiojo trikampio įžambinė lygi c. Koks gali būti didžiausias tokio trikampio plotas?

16.054. Žinomas trijų trikampio kraštinių ilgis: a) 2, 2 ir 3; b) 6, 8 ir 10; c) 3, 1 ir 4; d) 3, 5 ir 7. Nustatykite trikampio (jeigu toks trikampis egzistuoja) rūšį.

16.055. Per dviejų apskritimų lietimosi tašką nubrėžtos dvi tiesės, kurios kerta abu apskritimus. Tiesių ir apskritimų susikirtimo taškai sujungti stygomis. Įrodykite, kad tos stygos yra lygiagrečios.

16.056. Iš taisyklingojo penkiakampio tos pačios viršūnės išeinančios dvi įstrižainės dalija penkiakampį į tris trikampius. Raskite šių įstrižainių ribojamo trikampio ploto ir kitų dviejų trikampių plotų sumos santykį.

16.057. Lygiagretainio vienos kraštinės taškas sujungtas su priešingos kraštinės galais. Nubrėžtos tiesės nupjauna trikampius, kurių plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite lygiagretainio plotą.

16.058. Kampų, esančių prie trapecijos vienos iš lygiagrečiųjų kraštinių, pusiaukampinės susikerta stačiuoju kampu. Įrodykite, kad jų susikirtimo taškas yra trapecijos vidurinėje linijoje.

16.059. Remdamiesi skaičiaus π apibrėžimu, įrodykite, kad $3<\pi<4$.

16.060. Apie skritulį apibrėžtos lygiašonės trapecijos perimetras lygus p. Apskaičiuokite trapecijos vidurinės linijos ilgį.

16.061. Įrodykite, kad keturkampio, kurio kraštinės nelygiagrečios, įstrižainių vidurio taškai ir dviejų priešingų kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

16.062. Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 lygios. Įrodykite, kad trikampis yra lygiašonis: $CA=CB$.

16.063. Trikampio kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją. Į pagal dydį vidurinę kraštinę nubrėžta aukštinė lygi h. Raskite į tą trikampį įbrėžto skritulio spindulį.

16.064. Skritulio centras yra taškas O, spindulys lygus 6 cm, o jo styga $AB=3$ cm. Raskite į išpjovą AOB įbrėžto skritulio spindulį.

16.065. Trikampio kraštinių ilgių santykis lygus $2:3:4$. Nubrėžta mažiausio kampo pusiaukampinė. Kokiu santykiu (skaičiuojant nuo viršūnės) ją dalija įbrėžto į tą trikampį apskritimo centras?

16.066. Atkarpoje AB laisvai pasirinktas taškas M. AM ir MB laikant kraštinėmis, vienoje AB pusėje nubraižyti kvadratai. Apie juos apibrėžti apskritimai, kurie susikerta taške C. Įrodykite, kad spindulys MC yra kampo ACB pusiaukampinė.

16.067. Apie apskritimą, kurio centras O, apibrėžtas keturkampis $ABCD$. Raskite kampų AOB ir COD sumą.

16.068*. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio paporiui sudaugintų kraštinių ilgių sumos ir jo trijų aukštinių ilgių sumos santykis lygus apibrėžtinio apskritimo skersmeniui.

16.069. Įrodykite, kad stačiojo trikampio pusiaukraštinių ilgių kvadratų suma sudaro 150% jo įžambinės ilgio kvadrato.

16.070. Taškai M ir N — kvadrato $ABCD$ kraštinių DC ir BC vidurio taškai. Raskite $\angle MAN$.

16.071. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ $AB \| DC$, $AB=3DC$, $\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$. Įrodykite, kad tos trapecijos įstrižainės viena kitai statmenos.

16.072. Taškai A ir B yra skirtingose tiesės MN pusėse. Raskite tiesės MN tašką C, su kuriuo $\angle ACN=\angle BCN$.

16.073. Trikampio kampų santykis yra $2:3:7$. Trumpiausia jo kraštinė lygi a. Raskite apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.

16.074. Lygiašonio trikampio pusiaukraštinės, nubrėžtos į šonines kraštines, viena kitai statmenos. Raskite jo kampą prie viršūnės.

16.075. Viena penkiakampio kraštinė yra 30 cm ilgio. Kitų kraštinių ilgiai išreikšti sveikaisiais skaičiais, sudarančiais aritmetinę progresiją, kurios skirtumas 2 cm. Be to, trumpiausia kraštinė yra ne ilgesnė kaip 7 cm. Raskite visų penkiakampių, kurie tenkina šią sąlygą, kraštinių ilgius.

16.076. Smailiojo trikampio kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas 5 cm. Raskite didžiausią skaičių, kuriam būdinga tokia savybė: nurodyto tipo bet kurio trikampio ilgiausios kraštinės ilgis yra didesnis už šį skaičių.

16.077. Apie trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų centrai simetriški trikampio vienos kraštinės atžvilgiu. Raskite trikampio kampus.

16.078. Trikampio kraštinė AB matoma iš viršūnės C kampu α. Kokiu kampu ji matoma iš apibrėžto apie trikampį apskritimo centro? Išnagrinėkite tris atvejus, kai C — smailiojo, stačiojo arba bukojo kampo viršūnė.

16.079. Du apskritimai turi tik vieną bendrą tašką. Per jį nubrėžta kirstinė. Įrodykite, kad liestinės, einančios per tos kirstinės ir kiekvieno iš apskritimų susikirtimo taškus, yra lygiagrečios.

16.080. Jeigu trikampio kraštinių ilgiai sudaro geometrinę progresiją, tai ir jo aukštinių ilgiai sudaro geometrinę progresiją. Įrodykite.

16.081. Stačiojo trikampio statinių ilgių suma lygi 8 cm. Ar įžambinės ilgis gali būti lygus 5 cm?

16.082. Įrodykite, kad trikampio ABC kampas C yra statusis tada ir tik tada, kai to trikampio kraštinių ilgius sieja lygybė $AB^2=AC^2+BC^2$ (teorema atvirkštinė Pitagoro teoremai).

16.083. Piramidę kerta plokštuma, lygiagreti pagrindui. Nubraižykite grafiką funkcijos, kuri išreiškia pjūvio ploto priklausomybę nuo atstumo tarp piramidės viršūnės ir kertamosios plokštumos.

16.084. Piramidės visų šoninių sienų aukštinės yra lygios. Kuriuo kampu jos pasvirusios į pagrindo plokštumą, jeigu piramidės visas paviršius 1,5 karto didesnis už jos šoninį paviršių?

16.085. Duotas taisyklingasis tetraedras $SABC$. Kuriuo kampu briauna AB matoma iš briaunos SC vidurio taško?

16.086. Į kubą įdėta keturkampė piramidė taip, kad jos pagrindas sutampa su viena kubo siena, o viršūnė — su priešingos sienos vienos briaunos vidurio tašku. Kuriais kampais piramidės šoninės sienos pasvirusios į jos pagrindo plokštumą?

16.087. Trikampės piramidės visos briaunos (tarp jų ir pagrindo kraštinės) yra lygios. Raskite įbrėžto į piramidę rutulio spindulio ir piramidės aukštinės santykį.

16.088. Kūgio ašinis pjūvis — taisyklingasis trikampis. Į kūgį įbrėžtas rutulys, po to — antras rutulys, kuris liečia pirmąjį ir kūgio šoninį paviršių, ir t. t. (n-tasis rutulys liečia $(n-1)$-ąjį rutulį ir kūgio šoninį paviršių). Raskite rutulių tūrių sumos ribos, kai $n\to\infty$, ir kūgio tūrio santykį.

16.089. AB ir CD — nupjautinio kūgio apatinio pagrindo vienas kitam statmeni skersmenys; EF — viršutinio pagrindo skersmuo, lygiagretus tiesei CD. Kūgio sudaromoji lygi pagrindų skersmenų geometriniam vidurkiui ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α $\left(\alpha>\frac{\pi}{3}\right)$. Raskite smailiojo kampo tarp tiesių AE ir BF kosinusą.

16.090. Dvisienis kampas tarp taisyklingosios keturkampės piramidės dviejų gretimų šoninių sienų lygus α, o piramidės aukštinė H. Raskite apibrėžtinio rutulio spindulį.

16.091. Kampas tarp nupjautinio kūgio sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus α. Kūgio viduje yra du rutuliai, liečiantys vienas kitą ir kūgio šoninį paviršių, be to, pirmasis liečia kūgio apatinį pagrindą, o antrasis — viršutinį. Atstumas tarp rutulių centrų lygus l. Raskite kūgio pagrindų spindulius.

16.092. Per taisyklingojo tetraedro $SABC$ briauną AC išvesta plokštuma, kuri kerta briauną SB taške K. Įrodykite, kad viršūnės B projekcija pjūvio plokštumoje priklauso pjūvio aukštinei, nubrėžtai į kraštinę AC. Kada ta projekcija sutampa su tašku K?

16.093. Raskite kampą tarp gretimų kubo sienų prasilenkiančių įstrižainių.

16.094. Kokią figūrą sudaro aibė visų taškų, nutolusių nuo duotosios plokštumos atstumu a, o nuo fiksuoto tos plokštumos taško — atstumu b $(a<b)$?

16.095. Kokią sąlygą turi tenkinti keturkampis, kad jis būtų pagrindas piramidės, kurios visos šoninės sienos vienodai pasvirusios į jį?

16.096. Trisienio kampo kiekvienas iš plokščiųjų kampų turi sveikąjį skaičių laipsnių, be to, šie trys skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas 50°. Raskite mažiausią sveikąjį skaičių laipsnių, kuriuos gali turėti tokio trisienio kampo plokščiasis kampas.

16.097. Kūgio viso paviršiaus ir įbrėžto į jį rutulio paviršiaus santykis lygus k. Raskite kampą tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios bei leistinąsias k reikšmes.

16.098. Apibrėžto apie rutulį nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus ir jo pagrindų plotų sumos santykis lygus k. Raskite kampą tarp sudaromosios ir pagrindo plokštumos bei leistinąsias k reikšmes.

16.099. Raskite rutulio ir įbrėžto į jį kubo tūrių santykį.

16.100. Prizmė turi 60 briaunų. Kiek jos šoninių sienų?

16.101. Jeigu gretasienio visos įstrižainės vienodo ilgio, tai toks gretasienis yra stačiakampis. Įrodykite.

16.102. Trikampių viena kraštinė yra bendra, o prieš ją esantys kampai — lygūs. Kokią figūrą sudaro visų tokių trikampių pusiaukampinių susikirtimo taškų aibė?

16.103. Trys poromis nelygiagrečios tiesės yra vienoje plokštumoje. Jeigu pasviroji su jomis sudaro lygius kampus, tai ji yra statmena tai plokštumai. Įrodykite.

16.104. Duotos dvi prasilenkiančios tiesės. Ar galima nubrėžti dvi susikertančias tieses, kurių kiekviena kirstų abi prasilenkiančias tieses?

16.105. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio statiniai 9 cm ir 8 cm. Piramidė įbrėžta į kūgį, kurio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

16.106. Apie taisyklingąją piramidę, kurios aukštinė 27 cm, apibrėžta sfera. Jos spindulys lygus 18 cm. Raskite piramidės šoninės briaunos posvyrio į pagrindo plokštumą kampą.

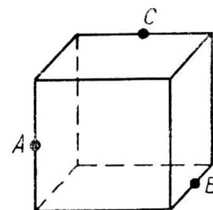
16.107. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briauna a. Raskite atstumą nuo tiesės, einančios per briauną AA_1, iki tiesės, einančios per įstrižainę B_1D.

16.108. Ar yra erdvėje taškas, vienodai nutolęs nuo visų lygiagretainio viršūnių? Nuo visų tiesių, kurios eina per jo kraštines? Kokia savybe turi pasižymėti lygiagretainis, kad taškas, vienodai nutolęs nuo jo viršūnių, būtų vienodai nutolęs ir nuo tiesių, kuriose yra jo kraštinės?

16.109. Kokia savybe turi pasižymėti trapecija, kad erdvėje egzistuotų taškas, vienodai nutolęs nuo jos viršūnių? Jeigu duotajai trapecijai būdinga tokia savybė, tai kokią figūrą sudaro visų tokių taškų aibė?

16.110. Nubraižykite kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, einantį per briaunų AD, A_1B_1 ir CC_1 vidurio taškus.

16.111. Kubą kerta plokštuma, einanti per taškus A, B ir C (16.13 pav.). Nubraižykite pjūvį.



16.13 pav.

16.112. Per trikampės piramidės pagrindo vidurinę liniją ir piramidės viršūnę išvesta plokštuma. Kam lygus gautų piramidžių tūrių santykis?

16.113. Per taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ (S — jos viršūnė) briaunos SB vidurio tašką ir tiesę MDN, esančią pagrindo $ABCD$ plokštumoje bei lygiagrečią jo įstrižainei AC, nubraižykite pjūvį.

16.114. Per piramidės aukštinės vidurio tašką išvesta plokštuma, lygiagreti pagrindo plokštumai. Kam lygus gautų briaunainių tūrių santykis?

16.115. Taisyklingojo tetraedro briauna lygi $\sqrt{2}$ cm. Apskaičiuokite atstumą tarp dviejų šio tetraedro briaunų.

16.116. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė — skritulio išpjova, kurios spindulys lygus 1, o centrinis kampas yra statusis. Raskite kūgio viso paviršiaus plotą.

16.117. Kubo briauna lygi 1. Kiek jo viršutinio pagrindo centras yra toliau nuo apatinio pagrindo viršūnės negu nuo jo kraštinės?

16.118. Pasvirojo gretasienio viena šoninė briauna su esančiomis prie jos apatinio pagrindo kraštinėmis sudaro lygius smailiuosius kampus. Kas yra tiesės, kuri eina per šią briauną, projekcija apatinio pagrindo plokštumoje? Kada ši projekcija ir pagrindo įstrižainė yra vienoje tiesėje?

16.119. Per bet kokio gretasienio apatinio pagrindo įstrižainę ir jos nekertančios šoninės briaunos vidurio tašką išvesta plokštuma. Kam lygus gautų gretasienio dalių tūrių santykis?

16.120. Piramidės pagrindas — trikampis, kurio kraštinių ilgis 30 cm, 40 cm ir 50 cm. Pagrindo didesnio smailiojo kampo viršūnė yra 72 cm ilgio šoninėje briaunoje, kuri statmena pagrindo plokštumai. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

16.121. Trikampės piramidės šoninės briaunos poromis statmenos, o šoninių sienų plotai lygūs S_1, S_2, S_3. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

16.122. Jeigu piramidės šoninės briaunos lygios, o pagrindas yra statusis trikampis, tai viena iš piramidės šoninių sienų statmena pagrindo plokštumai. Įrodykite.

16.123. Jeigu piramidės šoninės briaunos yra lygios, tai apie ją galima apibrėžti sferą, jos spindulys lygus briaunos ilgio kvadratui, padalytam iš piramidės aukštinės dvigubo ilgio. Įrodykite.

16.124. Ar apie kiekvieną piramidę galima apibrėžti sferą? Jeigu galima, tai kur yra tos sferos centras?

16.125*. Jeigu apie piramidės pagrindą galima apibrėžti apskritimą, tai visos plokštumos, statmenos piramidės šoninėms briaunoms ir dalijančios jas pusiau, susikerta viename taške. Įrodykite.

16.126. Kubą $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) kerta plokštuma, einanti per viršūnes A, C ir briaunos DD_1 vidurio tašką E. Įrodykite, kad piramidės $ACDE$ tūris lygus $\frac{1}{2}$ kubo tūrio.

16.127. Trikampės piramidės prasilenkiančios briaunos poromis lygios. Įrodykite, kad piramidės visas paviršius lygus vienos jos sienos keturgubam plotui.

16.128. Du kūgiai turi bendrą viršūnę, o jų aukštinės susikerta. Įrodykite, kad kūgių pagrindų plokštumų susikirtimo tiesė yra statmena plokštumai, kurioje yra kūgių aukštinės.

16.129. Įrodykite, kad nupjautinio kūgio ašinio pjūvio įstrižainės projekcija pagrinde lygi kūgio pagrindų apskritimų spindulių sumai.

16.130. Pusritinio pagrindą sudarančio pusskritulio spindulys lygus 1. Per pusskritulio skersmenį 45° kampu į pusskritulio plokštumą išvesta plokštuma. Įrodykite, kad nubrėžtos plokštumos ir pusritinio paviršiaus susikirtimo linija pusritinio išklotinėje sudaro sinusoidės lanką.

17 SKYRIUS
KOORDINAČIŲ IR VEKTORIŲ TAIKYMAS SPRENDŽIANT UŽDAVINIUS

SVARBIAUSIOS FORMULĖS

Stačiakampė Dekarto koordinačių sistema plokštumoje

1⁰. Atstumas tarp taškų $A_1(x_1;\ y_1)$ ir $A_2(x_2;\ y_2)$ apskaičiuojamas pagal formulę

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (17.1)$$

Remiantis ta pačia formule, išreiškiamas atkarpos A_1A_2 ilgis, arba vektoriaus $\overline{A_1A_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ modulis.

2⁰. Atkarpos, kurios galai $A_1(x_1;\ y_1)$ ir $A_2(x_2;\ y_2)$, vidurio taško $(x;\ y)$ koordinatės randamos pagal formules

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (17.2)$$

3⁰. Tiesės, kurios žinomas krypties koeficientas k ir pradinė ordinatė q, lygtis:

$$y=kx+q. \qquad (17.3)$$

Krypties koeficientas k lygus kampo, kurį sudaro tiesė su teigiama ašies Ox kryptimi, tangento reikšmei, o pradinė ordinatė q — tiesės ir ašies Oy susikirtimo taško ordinatės reikšmei.

4⁰. Tiesės bendroji lygtis:

$$ax+by+c=0. \qquad (17.4)$$

5⁰. Tiesių, lygiagrečių atitinkamai ašims Oy ir Ox, lygtys:

$$x=a; \ (17.5) \qquad y=b. \ (17.6)$$

6⁰. Tiesių $y_1=kx_1+q_1$ ir $y_2=kx_2+q_2$ lygiagretumo ir statmenumo sąlygos atitinkamai yra:

$$k_1=k_2; \ (17.7) \qquad k_1k_2=-1. \ (17.8)$$

7⁰. Apskritimų, kurių spindulys R, o centras yra atitinkamai taškai $O(0;\ 0)$ ir $C(x_0;\ y_0)$, lygtys:

$$x^2+y^2=R^2; \ (17.9) \qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \ (17.10)$$

8⁰. Parabolės, kurios viršūnė yra taškas $x_0=-\frac{b}{2a}$, lygtis:

$$y=ax^2+bx+c. \qquad (17.11)$$

Stačiakampė Dekarto koordinačių sistema erdvėje

1⁰. Atstumas tarp taškų $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ apskaičiuojamas pagal formulę

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (17.12)$$

Ta pačia formule išreiškiamas atkarpos A_1A_2 ilgis, arba vektoriaus $\overline{A_1A_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ modulis.

2⁰. Atkarpos, kurios galai $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ir $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, vidurio taško $(x;\ y;\ z)$ koordinatės randamos pagal formules

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (17.13)$$

3°. Vektoriaus $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, kurį apibrėžia koordinatės, modulis apskaičiuojamas pagal formulę

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (17.14)$$

4°. Sudedant vektorius, jų atitinkamos koordinatės sudedamos, o dauginant vektorių iš skaičiaus, jo koordinatės dauginamos iš to skaičiaus. Taigi taikomos tokios formulės:

$$(a_1;\ a_2;\ a_3)+(b_1;\ b_2;\ b_3)=(a_1+b_2;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3), \qquad (17.15)$$

$$\lambda(a_1;\ a_2;\ a_3)=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3). \qquad (17.16)$$

5°. Vienetinis vektorius $\bar{a}_0$, vienakryptis su vektoriumi $\bar{a}$, randamas pagal formulę

$$\bar{a}_0=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}. \qquad (17.17)$$

6°. Vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ skaliarine sandauga $\bar{a}\bar{b}$ vadinamas skaičius

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi; \qquad (17.18)$$

čia φ — kampas tarp vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$.

7°. Vektorių $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ir $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ skaliarinė sandauga išreiškiama formule

$$\bar{a}\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad (17.19)$$

Atskiru atveju: $\bar{a}^2=\bar{a}\bar{a}=|\bar{a}|^2$; iš čia $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}$.

8°. Kampo tarp vektorių $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ir $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ kosinusas apskaičiuojamas pagal formulę

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (17.20)$$

9°. Būtina ir pakankama vektorių $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ir $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ statmenumo sąlyga yra tokia:

$$\bar{a}\bar{b}=0,\ \text{arba}\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \qquad (17.21)$$

10°. Vektoriui $\bar{n}(a;\ b;\ c)$ statmenos plokštumos bendroji lygtis:

$$ax+by+cz+d=0. \qquad (17.22)$$

11°. Plokštumos, statmenos vektoriui $\bar{n}(a;\ b;\ c)$ ir einančios per tašką $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, lygtis:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \qquad (17.23)$$

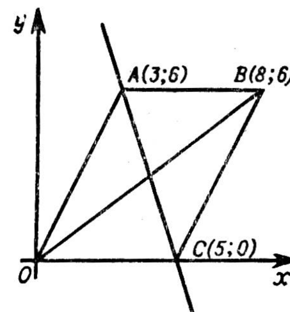
12°. Sferos, kurios centras $O(0;\ 0;\ 0)$, lygtis:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (17.24)$$

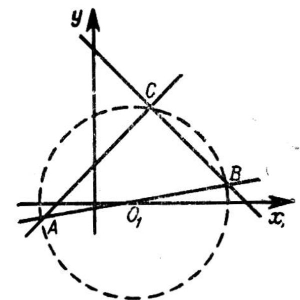
1 pavyzdys. Duotos lygiagretainio $OABC$ viršūnės $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 6)$ ir $B(8;\ 6)$. Raskite įstrižainių OB ir AC ilgių santykį, taip pat parašykite lygiagretainio kraštinių ir įstrižainės AC lygtis.

△ Kadangi viršūnių A ir B ordinatės lygios, $AB \parallel Ox$ (17.1 pav.). Iš trijų atkarpų OA, AB ir OB lygiagretainio kraštinės gali būti tik OA ir AB, nes pagal sąlygą OB — įstrižainė; todėl $BC \parallel OA$ ir $C(5;\ 0)$. Pagal (17.1) formulę randame $OB=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}$, $AC=\sqrt{(5-3)^2+(0-6)^2}=\sqrt{40}$; vadinasi, $OB : AC=\sqrt{100} : \sqrt{40}=\sqrt{2{,}5}$ — ieškomas įstrižainių santykis.

Pagal (17.3) formulę kraštinės OA lygtis bus tokia: $y=kx+q$; čia $k=6:3=2$ ir $q=0$; vadinasi, $y=2x$. Pritaikę (17.6) formulę, užrašome kraštinės AB lygtį: $y=6$. Kadangi $BC \parallel OA$, tai pagal (17.7) formulę tiesės BC krypties koeficientas $k=2$, o atitinkamą q reikšmę randame iš lygties $y=2x+q$,



17.1 pav.



17.2 pav.

vietoj x ir y įrašę į ją taško $C(5;\ 0)$ koordinates; tada $0=10+q$, t. y. $q=-10$; vadinasi, BC lygtis tokia: $y=2x-10$. Pagaliau OC lygtis yra $y=0$.

Užrašydami įstrižainės AC lygtį, remiamės tuo, kad taškai $A(3;\ 6)$ ir $C(5;\ 0)$ priklauso tiesei AC, vadinasi, jų koordinatės tenkina ieškomą lygtį. Į lygtį $y=kx+q$ įrašę šias koordinates, gauname: $6=3k+q$; $0=5k+q$; iš čia $k=-3$, $q=15$. Vadinasi, $y=-3x+15$ yra įstrižainės AC lygtis. ▲

2 pavyzdys. Apie tiesių $y=0{,}2x-0{,}4$, $y=x+2$, $y=8-x$ ribojamą trikampį apibrėžtas apskritimas. Užrašykite jo lygtį.

△ Tiesių $y=x+2$ ir $y=8-x$ krypties koeficientai lygūs atitinkamai $k_1=1$ ir $k_2=-1$. Kadangi $k_1k_2=-1$, tai tenkinama tiesių statmenumo sąlyga (17.8); vadinasi, $\triangle ABC$ — statusis (17.2 pav.), o apskritimo centras yra jo įžambinės AB vidurio taškas. Raskime tiesės $y=0{,}2x-0{,}4$ ir tiesių $y=x+2$ bei $y=8-x$ susikirtimo taškus; išsprendę lygčių sistemas

$$\begin{cases} y=0{,}2x-0{,}4, \\ y=x+2 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} y=0{,}2x-0{,}4, \\ y=8-x, \end{cases}$$

gauname taškus $A(-3;\ -1)$ ir $B(7;\ 1)$, kurie yra įžambinės galai. Pritaikę (17.2) formules, randame apskritimo centro koordinates: $O_1(2;\ 0)$. Pagal (17.1) formulę apskritimo spindulys $R=O_1A=\sqrt{(-3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{26}$. Pagaliau, remdamiesi (17.10) formule, parašome ieškomą apskritimo lygtį $(x-2)^2+y^2=26$. ▲

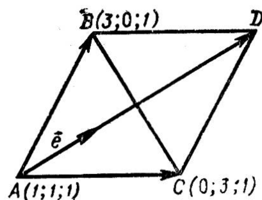
3 pavyzdys. Trikampio ABC viršūnės yra taškai $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 3;\ 1)$. Raskite vienetinį vektorių, kuris būtų kolinearus vektoriui, nukreiptam išilgai trikampio kampo BAC pusiaukampinės.

△ Raskime vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{AC}$ koordinates bei modulius: $\overline{AB}(2;\ -1;\ 0)$, $\overline{AC}(-1;\ 2;\ 0)$, $|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{5}$, $|\overline{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$.

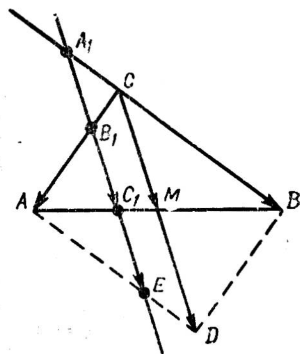
Kadangi $|\overline{AB}|=|\overline{AC}|$, tai $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$ yra rombo $ABCD$ įstrižainė (17.3 pav.), kartu ir kampo BAC pusiaukampinė, be to, $\overline{AD}(1;\ 1;\ 0)$ ir $|\overline{AD}|=\sqrt{2}$. Sakykime, $\bar{e}$ — vienetinis vektorius, kurio kryptis sutampa su vektoriaus $\overline{AD}$ kryptimi, t. y. $\bar{e}=\frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$. Remdamiesi (17.17) formule, galiausiai gauname: $\bar{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$. ▲

4 pavyzdys. Tiesė, lygiagreti trikampio ABC pusiaukraštinei CM, kerta tieses BC, CA ir AB atitinkamai taškuose A_1, B_1 ir C_1. Įrodykite, kad $\overline{A_1C_1}+\overline{B_1C_1}=\overline{CA}+\overline{CB}$.

25. Užsak. Nr. 1941.



17.3 pav.



17.4 pav.

△ Sakykime, $A_1E \| CM$ (17.4 pav.). Nubrėžiame $\overline{CD}=2\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{CB}$. Akivaizdu, kad A_1CDE yra lygiagretainis; vadinasi, $|\overline{A_1E}|=|\overline{CD}|$, be to, $\overline{A_1E}=\overline{A_1C}+\overline{C_1E}$.

Kadangi AM — trikampio ACD pusiaukraštinė ir $B_1E \| CD$, tai AC_1 — trikampio AB_1E pusiaukraštinė, o $|\overline{B_1C_1}|=|\overline{C_1E}|$. Taigi $\overline{CA}+\overline{CB}=\overline{CD}=\overline{A_1E}=\overline{A_1C_1}+\overline{C_1E}=\overline{A_1C_1}+\overline{B_1C_1}$. ▲

5 pavyzdys. Duoti du nenuliniai vektoriai $\bar{a}$ ir $\bar{b}$; be to, $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$. Įrodykite, kad $\bar{a}\perp\bar{b}$.

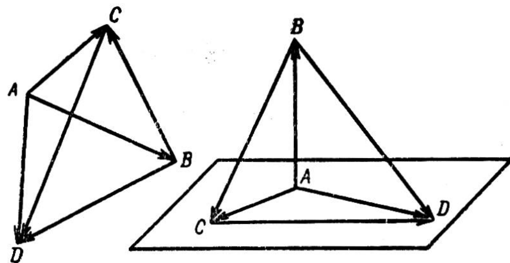
△ I būdas. Jeigu, vektorius $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ laikydami kraštinėmis, nubraižysime lygiagretainį, tai vektoriai $\bar{a}+\bar{b}$ ir $\bar{a}-\bar{b}$ sutaps su jo įstrižainėmis, kurių ilgis $|\bar{a}+\bar{b}|$ ir $|\bar{a}-\bar{b}|$. Kadangi pagal sąlygą įstrižainės yra vienodo ilgio, tai gautas lygiagretainis yra stačiakampis; iš čia $\bar{a}\perp\bar{b}$.

II būdas. Sakykime, $\bar{x}=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{y}=\bar{a}-\bar{b}$; tada $\bar{x}^2=(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$, $\bar{y}^2=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$. Vektoriaus kvadratas lygus jo modulio kvadratui, vadinasi,

$$\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}+\bar{b}|^2 \text{ ir } \bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}-\bar{b}|^2.$$

Pagal sąlygą šių sąsajų dešiniosios pusės yra lygios, taigi $\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$; iš čia $\bar{a}\bar{b}=0$; pagal (17.21) formulę tai reiškia, kad $\bar{a}\perp\bar{b}$. ▲

6 pavyzdys. Duotos dvi atkarpos AB ir CD. Įrodykite: jeigu $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$, tai $AB\perp CD$. Ar teisingas atvirkštinis teiginys?



17.5 pav.

△ Išnagrinėkime vektorius $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ ir $\overline{BC}$. Priklausomai nuo jų tarpusavio padėties gali susidaryti plokščioji arba erdvinė figūra (17.5 pav.). Atsižvelgę į tai, kad $\overline{AB}^2=|\overline{AB}|^2=AB^2$, duotąją lygybę pertvarkome taip:

$$\overline{BD}^2-\overline{BC}^2=\overline{AD}^2-\overline{AC}^2; \quad \underbrace{(\overline{BD}-\overline{BC})}_{\overline{CD}}(\overline{BD}+\overline{BC})=\underbrace{(\overline{AD}-\overline{AC})}_{\overline{CD}}(\overline{AD}+\overline{AC});$$

$$\overline{CD}\cdot(\underbrace{\overline{BD}-\overline{AD}}_{-\overline{AB}}+\underbrace{\overline{BC}-\overline{AC}}_{-\overline{AB}})=0; \quad -2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0; \quad \overline{AB}\cdot\overline{CD}=0.$$

Vadinasi, $\overline{AB}\perp\overline{CD}$.

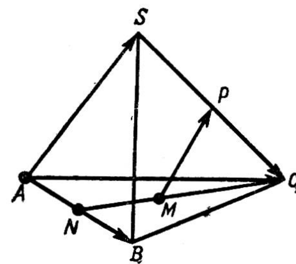
Pertvarkydami „iš kito galo“ ($\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, arba $-2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, arba $\overline{CD}(\overline{BD}+\overline{DA}+\overline{BC}+\overline{CA})=0$ ir t. t.), įsitikiname, jog teisingas ir atvirkštinis teiginys. ▲

7 pavyzdys. Piramidės $SABC$ visos sienos — taisyklingieji trikampiai; taškas M — trikampio ABC centras, o taškas P dalija briauną SC pusiau (17.6 pav.). Vektorių $\overline{MP}$ išreikškite vektoriais $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ir $\overline{AS}$.

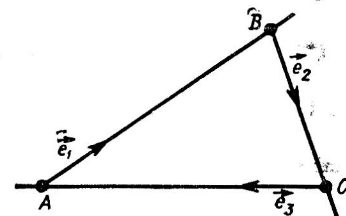
△ $\overline{MP}=\overline{MC}-\overline{PC}$; čia $\overline{PC}=\frac{1}{2}\overline{SC}=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AS})$; vadinasi, $\overline{MP}=MC-\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AS})$. Randame $\overline{MC}$. Lygiakraščio trikampio ABC $MC=\frac{2}{3}CN$; čia CN — trikampio aukštinė. Todėl $\overline{MC}=\frac{2}{3}\overline{NC}$. Bet $\overline{NC}=\overline{AC}-\overline{AN}=\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{AB}$; vadinasi, $\overline{MC}=\frac{2}{3}\left(\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{AB}\right)=\frac{2}{3}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}$.

Galiausiai gauname:

$$\overline{MP}=\frac{2}{3}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AS}=\frac{1}{6}\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AS}. \ ▲$$



17.6 pav.



17.7 pav.

8 pavyzdys. Įrodykite, kad bet kurio trikampio ABC kampai tenkina nelygybę $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$.

△ Trikampio kraštinėse nubrėžkime vienetinius vektorius $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ (17.7 pav.). Šių vektorių suma yra tam tikras vektorius $\bar{d}$, t. y. $\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3=\bar{d}$. Abi lygybės puses pakelkime kvadratu:

$$\bar{e}_1^2+\bar{e}_2^2+\bar{e}_3^2+2\bar{e}_1\bar{e}_2+2\bar{e}_1\bar{e}_3+2\bar{e}_2\bar{e}_3=\bar{d}^2,$$

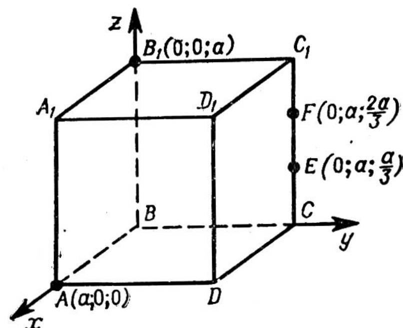
arba

$$1+1+1+2\cos(\pi-B)+2\cos(\pi-C)+2\cos(\pi-A)=|\bar{d}|^2.$$

Kadangi $|\bar{d}|^2\geqslant0$, tai $3-2\cos B-2\cos C-2\cos A\geqslant0$; iš čia $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$. ▲

9 pavyzdys. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos ilgis a. Per taškus A, B, E ir F nubrėžta sfera; čia E ir F — briaunos CC_1 taškai, be to, $CE=EF=FC_1$. Apskaičiuokite sferos spindulį.

△ Pasirinkime koordinačių sistemą (17.8 pav.), kurios pradžia yra taškas $B(0;\ 0;\ 0)$. Šioje sistemoje taškų A, B_1, E ir F koordinatės tokios: $A(a;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;\ 0;\ a)$, $E\left(0;\ a;\ \frac{a}{3}\right)$ $F\left(0;\ a;\ \frac{2a}{3}\right)$. Sakykime, $O(x;\ y;\ z)$ — ieškomos sferos centras. Tada $OA^2=OB^2=OE^2=OF^2=R^2$; čia R — sferos spindulys. Pritaikę (17.12) formulę, išreiškiančią atstumą tarp dviejų taškų, gauname lygčių sistemą:



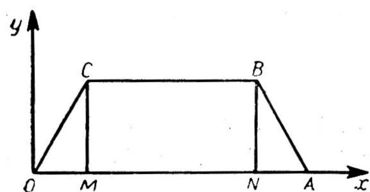
17.8 pav.

$$\begin{cases} (x-a)^2+y^2+z^2=R^2, & (*) \\ x^2+y^2+(z-a)^2=R^2, & (**) \\ x^2+(y-a)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2=R^2, & (***) \\ x^2+(y-a)^2+\left(z-\frac{2a}{3}\right)^2=R^2. & (****) \end{cases}$$

Iš (***) lygties atėmę (****) lygtį, gauname $\left(z-\frac{a}{3}\right)^2-\left(z-\frac{2a}{3}\right)^2=$ $=0$; iš čia $2z-a=0$, t. y. $z=\frac{a}{2}$. Šią z reikšmę įrašome į (*) ir (**) lygtis ir iš (*) lygties atimame (**) lygtį; tada gauname $x=\frac{a}{2}$. Iš (**) lygties atėmę (***) lygtį, randame $y=\frac{7a}{18}$. x, y ir z reikšmes įrašę į (**) lygtį, galiausiai gauname $R=\frac{a\sqrt{211}}{18}$. ▲

17.001. Duotas apskritimas $x^2+y^2=4$. Tiesė l yra lygiagreti abscisių ašiai ir kerta apskritimą taškuose M ir N; be to, $MN=1$. Parašykite tiesės l lygtį.

17.002. Taškai $A(2;\ 1)$, $B(3;\ -1)$, $C(-4;\ 0)$ yra lygiašonės trapecijos $ABCD$ viršūnės. Raskite taško D koordinates, kai $\overline{AB}=k\overline{CD}$.



17.9 pav.

17.003. Duotos trikampio viršūnės: $A(-2;\ -3)$, $B(-1;\ 2)$, $C(4;\ 1)$. Įrodykite, kad $\triangle ABC$ — lygiašonis, ir parašykite tiesės, kurioje yra iš viršūnės A nubrėžta aukštinė, lygtį.

17.004. Stačiakampėje koordinačių sistemoje pavaizduota lygiašonė trapecija, kurios pagrindai lygūs 6 ir 10, o kampas prie pagrindo $\varphi=60°$ (17.9 pav.). Parašykite trapecijos kraštinių lygtis.

17.005. Apskritimas eina per taškus $A(2;\ 0)$, $B(5;\ 0)$ ir liečia ašį Oy. Parašykite apskritimo lygtį.

17.006. Tiesė eina per tašką $(2;\ 3)$ ir sudaro su ašimi Ox 120° kampą. Užrašykite tos tiesės lygtį. Raskite šitos tiesės ir koordinačių ašių sudaryto trikampio plotą.

17.007. Į apskritimą $x^2+y^2=R^2$ įbrėžtas kvadratas $ABCD$. Viršūnės A koordinatės yra $(5;\ -12)$. Raskite R ir viršūnių B, C ir D koordinates.

17.008. Duotas apskritimas $x^2+y^2=9$. Kitas apskritimas eina per koordinačių pradžią ir tašką $A(1;\ 0)$ bei liečia duotąjį apskritimą. Parašykite to apskritimo lygtį.

17.009. Parašykite lygtį apskritimo, einančio per tašką $A(2;\ 1)$ ir liečiančio koordinačių ašis.

17.010. Raskite tiesės $5x-2y+9=0$ tašką A, vienodai nutolusį nuo taškų $B(-2;\ -3)$ ir $C(4;\ 1)$, ir apskaičiuokite trikampio ABC plotą.

17.011. Rombo įstrižainės yra 15 cm ir 8 cm ilgio. Pirma įstrižainė laikoma ašimi Ox, antra — ašimi Oy. Parašykite rombo kraštinių lygtis ir apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių pradžios iki rombo kraštinės.

17.012. Į trikampį, kurio kraštinės yra tiesės $x=0$, $y=0$ ir $3x+4y-12=0$, įbrėžtas apskritimas. Parašykite jo lygtį.

17.013. Sakykime, A — tiesių $2x+5y-8=0$ ir $x-3y+4=0$ susikirtimo taškas; O — koordinačių pradžia. Raskite atstumą OA ir parašykite tiesės OA lygtį.

17.014. Raskite kvadrato $ABCD$ viršūnių C ir D koordinates, kai $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 0)$.

17.015. Posūkis apie koordinačių pradžią perveda tašką $A(6;\ 8)$ į tašką $A_1(8;\ 6)$. Raskite posūkio kampo kosinusą.

17.016. Apskaičiuokite lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD ilgį, kai $A(1;\ -3;\ 0)$, $B(-2;\ 4;\ 1)$, $C(-3;\ 1;\ 1)$.

17.017. Duotos dvi lygiakraščio trikampio viršūnės: $A(-2;\ 2)$, $B(-2;\ -4)$. Apskaičiuokite trečios trikampio viršūnės koordinates ir jo plotą.

17.018. Tiesei $x+y-5=0$ susikirtus su apskritimu $(x+1)^2+$ $+(y+2)^2=40$, gauta styga. Apskaičiuokite jos ilgį.

17.019. Trikampio kraštinių vidurio taškų koordinatės $M_1(-1;\ 2)$, $M_2(2;\ -3)$, $M_3(-3;\ -1)$. Raskite to trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško koordinates.

17.020. Dviejų trikampio viršūnių koordinatės yra $A(2;\ -1)$, $B(-3;\ 5)$, o to trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško koordinatės $M(1;\ 1)$. Raskite viršūnės C koordinates.

17.021. Keturkampio viršūnių koordinatės: $A(2;\ -2)$, $B(-3;\ 1)$, $C(7;\ 7)$, $D(7;\ 1)$. Įrodykite, kad $ABCD$ — trapecija, ir apskaičiuokite jos vidurinės linijos ilgį.

17.022. Sudarykite apskritimo $x^2+y^2=9$ liestinių, nubrėžtų iš taško $M(5;\ 0)$, lygtis.

17.023. Apie trikampį, kurį sudaro tiesė $3x-y+6=0$ ir koordinačių ašys, apibrėžtas apskritimas. Parašykite jo lygtį.

17.024. Sfera eina per tašką $A(1;\ -1;\ 4)$ ir liečia koordinačių plokštumas. Parašykite sferos lygtį.

17.025. Įsitikinkite, kad egzistuoja tik vienas taškas $(x;\ y;\ z)$, kurio atstumų iki dviejų duotųjų taškų $A(2;\ 3;\ -1)$ ir $B(1;\ -1;\ 3)$ kvadratų suma yra pastovi ir lygi 16,5. Raskite to taško koordinates.

17.026. Duoti taškai $A(1;\ 1)$, $B(6;\ 6)$, $C(5;\ 4)$, $D(2;\ 1)$. Įrodykite, kad $ABCD$ — trapecija, ir raskite kampą α tarp jos įstrižainių.

17.027. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 0)$, $C(1;\ 5)$, yra bukasis, ir raskite bukojo kampo kosinusą.

17.028. Su kuriomis α ir β reikšmėmis vektorius $\vec{a}(3;\ -1;\ \alpha)$ statmenas vektoriui $\vec{b}(2;\ \beta;\ 1)$, kai $|\vec{b}|=3$?

17.029. Duoti trys vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$. Įrodykite, kad vektorius $(\vec{b}\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$ statmenas vektoriui $\vec{c}$.

17.030. Įrodykite, kad visų gretasienio briaunų ilgių kvadratų suma lygi visų jo įstrižainių ilgių kvadratų sumai.

17.031. Duoti taškai $A_1(0;\ 1;\ 2)$, $A_2(1;\ 2;\ 4)$, $B_1(-1;\ -1;\ 3)$, $B_2(1;\ 0;\ 0)$; M_1 ir M_2 — atkarpų A_1B_1 ir A_2B_2 vidurio taškai. Raskite vektorių $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir jo modulį.

17.032. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės $A(6;\ -4;\ 2)$, $B(3;\ 2;\ 3)$, $C(3;\ -5;\ -1)$, yra statusis.

17.033. Sakykime, O — trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas ir $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Vektorius $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BC}$ išreikškite $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

17.034. Su kuriomis x reikšmėmis vektoriai $(x^3-1)\vec{a}$ ir $2x\vec{a}$ yra vienakrypčiai, kai $\vec{a}\neq\vec{0}$?

17.035. Su kuriomis m reikšmėmis vektoriai $(m^2-m-2)\vec{b}$ ir $m^3\vec{b}$ yra priešpriešiai, kai $\vec{b}\neq\vec{0}$?

17.036. Su kuriomis x reikšmėmis vektoriai $(5x-x^2)\vec{a}$ ir $\vec{a}$ yra vienakrypčiai ir $|(x-5)\vec{a}|\leqslant|3\vec{a}|$?

17.037. Su kuriomis y reikšmėmis vektoriai $(3y^2-11y+6)\vec{p}$ ir $(y^2+1)\vec{p}$ yra priešpriešiai, kai $\vec{p}\neq\vec{0}$?

17.038. Su kuriomis x ir y reikšmėmis vektoriai $(x;\ -2;\ 5)$ ir $(1;\ y;\ -4)$ yra kolinearūs?

17.039. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga nelygybė $|(x-2)\vec{a}|>3|\vec{a}|$, kai $\vec{a}\neq\vec{0}$?

17.040. Sakykime, K ir M — lygiagretainio $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidurio taškai ir $\overrightarrow{AK}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{b}$. Vektorius $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{AD}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

17.041. $ABCD$ — lygiagretainis; $M\in BC$ ir $BM:MC=1:2$; $N\in DC$, $DN:NC=1:2$; $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$. Vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{BD}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$.

17.042. Tetraedro $ABCD$ sienos ADB pusiaukraštinę DD_1 taškas M dalija santykiu $DM:MD_1=3:7$. Vektorių $\overrightarrow{CM}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{CD}$.

17.043. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ kiekvienos briaunos ilgis lygus a; $M\in SC$ ir $SM:MC=2:1$. Raskite kampą tarp vektorių $\overrightarrow{DC}$ ir $\overrightarrow{AM}$.

17.044. Duota: kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (pagrindo $ABCD$ viršūnės išsidėsčiusios pagal laikrodžio rodyklę); K — briaunos AA_1 vidurio taškas; H — briaunos AD vidurio taškas; M — sienos CC_1D_1D centras. Įrodykite, kad tiesė KM statmena tiesei B_1H.

17.045. Įrodykite, kad kiekvieno trikampio ABC kampai tenkina nelygybę $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant-\frac{3}{2}$.

17.046. Duota: stačioji trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$; $\overrightarrow{BB_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ir $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$; O — trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Vektorių $\overrightarrow{A_1O}$ išreikškite vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$.

17.047. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briauna $AA_1=10$, $AD=6$, $AB=8$. Raskite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{DB_1}$ ir $\overrightarrow{AD_1}$ kosinusą.

17.048. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briauna lygi 1. Raskite kampą tarp vektorių $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{DC}$, kai $M\in AA_1$ ir $AM:MA_1=1:2$; $N\in CC_1$ ir $CN:NC_1=2:1$.

17.049. Lygiašonio trikampio šoninių kraštinių pusiaukraštinės susikerta 60° kampu. Raskite trikampio kampą prie viršūnės.

17.050. Trikampio ABC duota: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, $\angle BAC=60°$. Vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ išreikškite vienetinį vektorių, nukreiptą išilgai trikampio aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės A.

17.051. Duoti vektoriai $\vec{a}(2;\ -3;\ 5)$, $\vec{b}(-1;\ 1;\ -3)$ ir $\vec{c}(3;\ 7;\ 1)$. Raskite vektoriaus $\vec{p}(x;\ y;\ z)$ koordinates, kai $\vec{p}\vec{a}=12$, $\vec{p}\vec{b}=-6$ ir $\vec{p}\perp\vec{c}$.

17.052. Vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ yra vienoje plokštumoje ir poromis vienas su kitu sudaro $\frac{2\pi}{3}$ kampus. Vektorių $\vec{a}$ išreikškite vektoriais $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, kai $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=1$.

17.053. Duotos keturkampio viršūnių koordinatės: $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(-1;\ 3;\ 1)$, $C(-1;\ 7;\ 3)$, $D(-1;\ 6;\ 5)$. Įrodykite, kad $ABCD$ — stačiakampis.

17.054. Trikampio ABC duota: $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{j}$; čia $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ — vienetiniai vienas kitam statmeni vektoriai. Įrodykite, kad trikampis ABC yra statusis, ir apskaičiuokite jo plotą.

17.055. Nubrėžti apskritimo spinduliai OA, OB, OC. Raskite kampo AOB didumą, kai $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$.

17.056. Vektoriai $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ir $\overline{OC}$ yra trikampės piramidės briaunos; $|\overline{OA}|=5$, $|\overline{OB}|=2$, $|\overline{OC}|=6$, $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=8$. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

17.057. Duotas statusis trikampis ABC; $\angle C=90°$, D — iš stačiojo kampo viršūnės nubrėžtos aukštinės pagrindas. Vektorių $\overline{CD}$ išreikškite vektoriais $\overline{CA}$ ir $\overline{CB}$.

17.058. Trikampio ABC kraštinės susijusios taip: $a^2+b^2=5c^2$. Įrodykite, kad dvi trikampio pusiaukraštinės yra statmenos. Ar teisingas atvirkštinis teiginys?

17.059. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite kampo tarp vektorių $\overline{DA_1}$ ir $\overline{DM}$ kosinusą; čia M — briaunos CC_1 vidurio taškas.

17.060. Piramidės viršūnių koordinatės tokios: $S(0;\ 0;\ 2)$, $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 1;\ 0)$. Raskite ašyje Oz esančio taško M ir plokštumos SBC taško N koordinates, kai $\overline{MN}\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ 0\right)$.

17.061. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 6, o kampo BAD didumas lygus $\frac{\pi}{3}$. Kraštinėje BC pažymėtas taškas E; $EC=2$. Raskite atstumą nuo E iki rombo simetrijos centro.

17.062. Vienetiniai vektoriai $\overline{m}$, $\overline{n}$ ir $\overline{p}$ yra tokie: $\overline{m}\perp\overline{n}$, $\overline{n}\perp\overline{p}$ ir kampas tarp $\overline{m}$ bei $\overline{n}$ lygus 60°. Apskaičiuokite vektorių $\overline{a}=3\overline{m}-2\overline{n}+\overline{p}$ ir $\overline{b}=-2\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}$ skaliarinę sandaugą.

17.063. Trikampio ABC taškas N yra kraštinėje AB ir $AN=3NB$; pusiaukraštinė AM susikerta su CN taške O; $AM=CN=7$ cm ir $\angle NOM=60°$. Raskite AB.

17.064. Raskite kampą tarp nenulinių vektorių $\overline{a}$ ir $\overline{b}$, kai $(\overline{a}-\overline{b})^2+(2\overline{a}-\overline{b})^2=56$, $|\overline{a}|=2$ ir $|\overline{b}|=3$.

17.065. Raskite kampo tarp lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių kosinusą, kai $\overline{AB}=\overline{a}-\overline{b}+3\overline{c}$, $\overline{AD}=4\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$; čia $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — vienetiniai poromis statmeni vektoriai.

17.066. Taškas K — lygiagretainio $ABCD$ kraštinės BC vidurio taškas, o taškas M — kraštinės CD vidurio taškas; $AK=6$ cm, $AM=3$ cm ir $\angle KAM=60°$. Raskite AD.

17.067. Duotas vektorius $\overline{a}(1;\ -2;\ 5)$. Vektorius $\overline{b}$ yra plokštumoje xOy ir statmenas vektoriui $\overline{a}$, be to, $|\overline{b}|=2\sqrt{5}$. Raskite vektoriaus $\overline{b}$ koordinates.

17.068. Sakykime, $\overline{i}$, $\overline{j}$ ir $\overline{k}$ — vienetiniai vektoriai, nukreipti išilgai koordinačių ašių, ir $\overline{a}=6\overline{i}-2\overline{j}-3\overline{k}$. Raskite kampų, kuriuos sudaro vektorius $\overline{a}$ su vektoriais $\overline{i}$, $\overline{j}$ ir $\overline{k}$, kosinusus.

17.069. Vektorius $\overline{OA}$ su ašimis Ox, Oy ir Oz sudaro kampus, lygius atitinkamai $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{4}$; taškas $B(-2;\ -2;\ -2\sqrt{2})$. Raskite kampą tarp vektorių $\overline{OA}$ ir $\overline{OB}$.

17.070. Raskite trikampio ABC pusiaukraštinės AM ilgį, kai $AB=10$ cm, $AC=6$ cm ir $\angle BAC=60°$.

17.071. Duotas taisyklingasis penkiakampis $A_1A_2A_3A_4A_5$. Vektorių $\overline{A_1A_3}$ išreikškite vektoriais $\overline{A_1A_2}$ ir $\overline{A_1A_5}$.

17.072. Duoti du vektoriai: $\overline{a}(x;\ 1;\ -1)$ ir $\overline{b}(1;\ 0;\ 1)$. Su kuria x reikšme teisinga lygybė $(\overline{a}+3\overline{b})^2=(\overline{a}-2\overline{b})^2$?

17.073. Iš taško M nubrėžtos dvi apskritimo, kurio centras O, liestinės; A ir B — lietimosi taškai. Vektorių $\overline{MO}$ išreikškite vektoriais $\overline{MA}$ ir $\overline{MB}$, kai $\angle AMB=\alpha$.

17.074. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje AB pažymėtas taškas K; $AK:KB=7$. Kraštinė AB tris kartus ilgesnė už kraštinę BC. $\overline{DK}$ išreikškite vektoriais $\overline{AB}$ ir $\overline{AD}$ ir raskite santykį $|\overline{DK}|:|\overline{AB}|$, kai $\angle BAD=60°$.

17.075. Lygiašonio stačiojo trikampio ABC ($\angle C=90°$) kraštinėse BC, CA ir AB atitinkamai pažymėti taškai A_1, B_1, C_1. Įrodykite, kad atkarpos CC_1 ir A_1B_1 yra statmenos ir lygios, jeigu taškai A_1, B_1, C_1 dalija trikampio kraštines vienodais santykiais.

17.076. Trikampio ABC kraštinė $AB=BC$; D — kraštinės AC vidurio taškas; DK statmena kraštinei BC; taškas M — atkarpos DK vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesės AK ir BM statmenos.

17.077. Sakykime, $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — vienetiniai vektoriai, nukreipti išilgai koordinačių ašių, ir $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}+3\alpha\overline{k}$, $\overline{b}=\alpha^2\overline{i}+4\overline{j}-3\overline{k}$. Su kuriomis α reikšmėmis vektoriai $\overline{a}$ ir $\overline{b}$ yra statmeni?

17.078. Trikampio viršūnės $A(-1;\ 1)$, $B(-5;\ 4)$ ir $C(7;\ 2)$. Apskaičiuokite skaliarinę sandaugą $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ ir trikampio plotą.

17.079. Tetraedro $SABC$ sienų SAB ir SAC pusiaukraštinės susikerta atitinkamai taškuose M ir N. Įrodykite, kad $\overline{MN}\parallel\overline{BC}$, ir raskite santykį $|\overline{MN}|:|\overline{BC}|$.

17.080. Duoti vektoriai $\overline{a}(6;\ -8;\ 5\sqrt{2})$ ir $\overline{b}(2;\ -4;\ \sqrt{2})$. Raskite kampą, kurį vektorius $\overline{a}-\overline{b}$ sudaro su ašimi Oz.

17.081. Duoti trys nenuliniai vektoriai $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, kurių kiekvieni du yra nekolinearūs. Raskite jų sumą, kai $(\overline{a}+\overline{b})\parallel\overline{c}$ ir $(\overline{b}+\overline{c})\parallel\overline{a}$.

17.082. Jeigu trisienio kampo dviejų plokščiųjų kampų pusiaukampinės viena kitai statmenos, tai trečio plokščiojo kampo pusiaukampinė statmena kiekvienai jų. Įrodykite.

17.083. Trikampio viršūnės $M(1;\ 1;\ 4)$, $N(1;\ 4;\ 4)$ ir $K(3;\ 3;\ 2)$. Įrodykite, kad $\overline{ON}\perp\overline{MK}$; čia O — kraštinės MK vidurio taškas. Nustatykite trikampio rūšį.

17.084. Įrodykite, kad bet kurie keturi taškai A, B, C, D tenkina lygybę $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$.

17.085. Raskite vektoriaus $\overline{a}(7;\ -4)$ projekcijos lygiagrečioje vektoriui $\overline{b}(-8;\ 6)$ ašyje modulį.

17.086. Raskite kampą tarp lygiašonio stačiojo trikampio pusiaukraštinių, esantį prieš įžambinę.

17.087. Duotas lygiagretainis $ABCD$; $\overline{AD}\|\overline{BC}$; K — kraštinės BC vidurio taškas; P — kraštinės DC vidurio taškas. Vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ sumą išreikškite vektoriais $\overline{AK}=\overline{a}$ ir $\overline{AP}=\overline{b}$.

17.088. Jeigu tetraedro priešingų briaunų kvadratų sumos yra lygios, tai tos briaunos poromis statmenos. Įrodykite.

17.089. Taškai M ir N — rombo $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidurio taškai. Raskite $\angle MAN$, kai $\angle BAD=60°$.

17.090. Duotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AB=a$, $DC=b$, $DD_1=c$. Raskite smailųjį kampą tarp tiesių BD_1 ir A_1D.

17.091. Trikampio viršūnės $A(-2;\ 1;\ -3)$, $B(4;\ -7;\ -5)$ ir $C(1;\ 2;\ -1)$. Raskite kampą tarp kraštinės CA ir pusiaukraštinės, nubrėžtos iš viršūnės C.

17.092. Vienetiniai vektoriai $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ ir $\overline{e}_3$ tenkina sąlygą $\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3=\overline{0}$. Raskite $\overline{e}_1\overline{e}_2+\overline{e}_2\overline{e}_3+\overline{e}_3\overline{e}_1$.

17.093. Duota neplokščioji uždara laužtė $ABCD$. Jeigu $\angle ABC=\angle DAB=90°$ ir $DA=CB$, tai $\angle ADC=\angle BCD$. Įrodykite.

17.094. Duotas tetraedras $ABCD$ ir taškas M jo sienoje ABC. Įrodykite, kad skaidinys $\overline{DM}=\alpha\overline{DA}+\beta\overline{DB}+\gamma\overline{DC}$ tenkina lygybę $\alpha+\beta+\gamma=1$.

17.095. Yra žinomi tetraedro $ABCD$ briaunų ilgiai. Raskite kampo tarp priešingų briaunų AB ir CD kosinusą.

17.096. Raskite vienetinį vektorių, statmeną vektoriams $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$ ir $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$.

17.097. Apskaičiuokite santykius, į kuriuos trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas P dalija kiekvieną pusiaukampinę, kai $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$.

17.098. Trikampio ABC kraštinė $AB=4$ cm, $AC=8$ cm. $\angle BAC=60°$. Raskite vektoriaus $\overline{AN}$ ilgį; čia $N\in BC$ ir $BN:NC=3:1$.

17.099. Tetraedro $OABC$ trisienio kampo plokštieji kampai prie viršūnės O yra statūs. Taškas H — statmens, nubrėžto iš viršūnės O į sienos ABC plokštumą, pagrindas. Vektorių $\overline{OH}$ išreikškite vektoriais $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ir $\overline{OC}$, kai $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$.

17.100. Trikampio ABC pusiaukraštinė yra BD; $\angle DBC=90°$; $BC=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Raskite $\angle ABD$.

17.101. Vektoriai $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ir $\overline{OC}$ yra trikampės piramidės briaunos. Jos tūris lygus $\sqrt{15}$. Raskite vektoriaus $\overline{OC}$ ilgį, kai $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=1$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=0$, $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=2$.

17.102. Vektoriai $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ir $\overline{OC}$ yra trikampės piramidės briaunos. Jos tūris lygus $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Raskite $\overline{OA}\cdot\overline{OC}$, kai $|\overline{OB}|=2$, $|\overline{OA}|=1$, $|\overline{OC}|=3$, $\overline{OB}\cdot\overline{OA}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=0$.

17.103. Vektoriai $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ir $\overline{OC}$ yra trikampės piramidės briaunos. Raskite piramidės tūrį, kai $|\overline{OA}|=|\overline{OB}|=|\overline{OC}|=5$, $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$, $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=20$.

17.104. Plokštumoje pažymėti taškai $A(-6;\ -1)$, $B(-4;\ -4)$, $C(-1;\ -6)$, $D(-3;\ -3)$. Įrodykite, kad $ABCD$ — rombas, ir apskaičiuokite jo plotą.

17.105. Duotas trikampis ABC; $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=8$; $|\overline{AB}|=10$; $|\overline{BC}|=6$. Raskite iš viršūnės B nuleistos aukštinės ilgį. Koks — smailusis ar bukasis — yra kampas ABC?

17.106. Duoti vektoriai $\overline{a}(2;\ -1;\ 3)$, $\overline{b}(1;\ -3;\ 2)$, $\overline{c}(3;\ 2;\ -4)$. Raskite vektorių $\overline{x}$, kai $\overline{x}\overline{a}=-5$; $\overline{x}\overline{b}=-11$, $\overline{x}\overline{c}=20$.

17.107. Duoti vektoriai $\overline{a}=(3;\ 2;\ 2)$ ir $\overline{b}=(18;\ -22;\ -5)$. Raskite vektorių $\overline{x}$, statmeną vektoriams $\overline{a}$ ir $\overline{b}$, sudarantį su ašimi Oy bukąjį kampą, ir kurio modulis lygus 14.

17.108. Duoti du vektoriai $\overline{OA}(-1;\ 2)$ ir $\overline{OB}(-4;\ -2)$; čia O — koordinačių pradžia. Raskite atkarpos AB ilgį, trikampio OAB plotą ir pusiaukraštinės OM ilgį.

17.109. Raskite vektorių $\overline{b}$, kolinearų vektoriui $\overline{a}=(2\sqrt{2};\ -1;\ 4)$, kai $|\overline{b}|=10$.

17.110. Jeigu tetraedro $ABCD$ priešingos briaunos poromis statmenos, tai $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$. Įrodykite.

17.111. Lygiašonio trikampio ABC pusiaukraštinės yra AK ir BL, trikampio plotas lygus S, o $\angle A=120°$. Raskite vektorių AK ir BL skaliarinę sandaugą.

17.112. Tetraedro viršūnės $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 5)$, $C(4;\ 0;\ 3)$, $D(0;\ 0;\ 0)$. Sienų ADB ir BDC pusiaukraštinės susikerta atitinkamai taškuose M_1 ir M_2. Raskite santykį $AC:M_1M_2$.

17.113. Duotas taisyklingasis penkiakampis $ABCDE$. Vektorius $\overline{AB}$ ir $\overline{AE}$ išreikškite vektoriais $\overline{AC}$ ir $\overline{AD}$.

17.114. Į kubą įbrėžta sfera. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio sferos taško iki kubo viršūnių kvadratų suma yra pastovi. Apskaičiuokite tą sumą.

17.115. Į kvadratą įbrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad apskritimo bet kurio taško atstumų iki kvadrato viršūnių kvadratų suma yra pastovi. Apskaičiuokite tą sumą.

17.116. Apie kvadratą apibrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad apskritimo bet kurio taško atstumų iki kvadrato viršūnių kvadratų suma yra pastovi. Raskite tą sumą.

17.117. Duotas stačiakampis $ABCD$. Įrodykite, kad bet kurio erdvės taško atstumų iki viršūnių A ir C kvadratų suma lygi jo atstumų iki viršūnių B ir D kvadratų sumai.

17.118. Įrodykite, kad bet kurio erdvės taško atstumų iki stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnių A, B_1, C ir D_1 kvadratų suma lygi jo atstumų iki viršūnių A_1, B, C_1 ir D kvadratų sumai.

17.119. Trikampio ABC kampas prie viršūnės A lygus 60°, $\overline{AB}(4;\ 2;\ 4)$, $AC=1$. Raskite kampo tarp pusiaukraštinės AA_1 ir kraštinės AB kosinusą.

17.120. Raskite trikampio ABC pusiaukampinės AM ilgį, kai $AB=c$, $AC=b$ ir $\angle A=\alpha$.

17.121. M ir N — atkarpų AB ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad $MN\leqslant\frac{1}{2}(AC+BD)$, $MN\leqslant\frac{1}{2}(BC+DA)$.

17.122. Trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas M. Įrodykite, kad $OM<\frac{1}{3}(OA+OB+OC)$; čia O — bet kuris erdvės taškas.

17.123. Duotas trikampis ABC. Tiesė l kerta tieses BC, CA, AB taškuose A_1, B_1, C_1. Įrodykite, kad vektoriai $\overline{AB}+\overline{A_1B_1}$, $\overline{BC}+\overline{B_1C_1}$, $\overline{CA}+\overline{C_1A_1}$ kolinearūs.

17.124. Į apskritimą įbrėžtas trikampis ABC. Tiesė, kurioje yra trikampio pusiaukraštinė CC_1, kerta apskritimą ir taške D. Įrodykite, kad $CA^2+CB^2=2CC_1\cdot CD$.

17.125. Nubrėžtos lygiašonio trikampio ABC, kurio plotas S, aukštinės AM ir BN. Raskite skaliarinę sandaugą $\overline{AM}\cdot\overline{BN}$, kai taškai M ir N yra trikampio šoninėse kraštinėse, o jo pagrindo ilgis lygus c.

17.126. Sakykime, vektoriaus $\overline{a}$ koordinatės lygios $\frac{2m}{1+m^2}$ ir $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, o vektoriaus $\overline{b}$ koordinatės lygios $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ ir $\frac{2k}{1+k^2}$. Įrodykite, kad abu vektoriai yra vienetiniai: $|\overline{a}|=|\overline{b}|=1$. Remdamiesi skaliarinės sandaugos savybe $|\overline{a}\cdot\overline{b}|\leqslant|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, įrodykite nelygybę $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{(m+k)(1-mk)}{(1+m^2)(1+k^2)}\leqslant\frac{1}{2}$.

17.127. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai: $AC=3$ cm, $BC=4$ cm. Taškas M dalija įžambinę santykiu $AM:MB=3:4$. Į kokias dalis vektorius $\overline{CM}$ dalija kampą C?

17.128. Trikampio ABC stačiojo kampo viršūnė C. Įžambinę laikant kraštine, trikampio išorėje nubraižytas kvadratas. Jo centras — taškas M. Įrodykite, kad spindulys CM yra kampo C pusiaukampinė.

17.129. Duotas penkiakampis $ABCDE$; M, N, P ir Q — jo kraštinių AB, BC, CD ir DE vidurio taškai. Įrodykite: jeigu U ir V — MP ir NQ vidurio taškai, tai vektorius $\overline{UV}$ kolinearus vektoriui $\overline{AE}$. Raskite santykį $AE:UV$.

17.130. Į apskritimą, kurio centras O, įbrėžtas keturkampis $ABCD$. Jo įstrižainės, susikertančios taške P, yra viena kitai statmenos. Įrodykite, kad kraštinių AB ir CD vidurio taškai, centras O ir taškas P yra lygiagretainio viršūnės.

SAVIKONTROLĖS UŽDUOČIŲ VARIANTAI

Skaičiuoti reikia nesinaudojant techninėmis priemonėmis: skaičiuotuvu, logaritmine liniuote, lentelėmis ir kt.

I variantas

1. Lygties $x^2+bx-12=0$ viena šaknis lygi 3. Raskite koeficiento b reikšmę.

2. Supaprastinkite reiškinį $(2x^{1/2}-y^{-1/4})(2x^{1/2}+y^{-1/4})$ ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai $x=1{,}2$ ir $y=4$.

3. Apskaičiuokite lygties $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$ šaknų sumą.

4. Išspręskite lygtį $\sqrt{2{,}1x+1}=x-1$.

5. Raskite sumą sveikųjų x reikšmių, tenkinančių nelygybę $x^2-3x<4$.

6. Taikydami tapačiųjų pertvarkymų formules, apskaičiuokite $\cos 50°\times\cos 40°-2\sin 50°\sin 20°\cos 20°$.

7. Raskite lygties $2\cos^2 x-3\sin x=0$ šaknį, priklausančią intervalui $(0°; 90°)$. Atsakymą išreikškite laipsniais.

8. Lygiašonės trapecijos plotas 180 cm². Vidurinės linijos ilgis 45 cm; šoninės kraštinės ilgis 5 cm. Raskite trapecijos trumpesniojo pagrindo ilgį.

9. Kūgio aukštinė lygi 3; kampas tarp aukštinės ir sudaromosios lygus 45°. Į šį kūgį įbrėžtas kitas kūgis, kurio viršūnė sutampa su pirmojo pagrindo centru, o kūgio atitinkamos sudaromosios yra statmenos. Apskaičiuokite įbrėžtinio kūgio tūrį (laikykite, kad $\pi=3{,}14$, ir atsakymą suapvalinkite iki šimtųjų).

10. Apskaičiuokite $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, kai $f(x)=0{,}5\sin x\,\mathrm{tg}\,2x+2{,}5\cos x$.

II variantas

1. Apskaičiuokite $\dfrac{4\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$.

2. Išspręskite lygtį $2x+\sqrt{3x-2}=3$.

3. Kiek sveikųjų sprendinių turi nelygybė $5+\dfrac{17}{x-2}<\dfrac{2}{x+3}$?

4. Išspręskite lygtį $\log_5 x+\log_5(x-4)=1$.

5. Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 24 ir 10, o apibrėžto apie ją apskritimo spindulys lygus 13. Apibrėžtinio apskritimo centras nepriklauso trapecijai. Apskaičiuokite trapecijos aukštinę.

6. Raskite funkcijos $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ didžiausios ir mažiausios reikšmės atkarpoje $[-1; 2]$ kvadratų sumą.

7. Kiek lygties $\sin 3x-\cos 3x=0$ sprendinių priklauso atkarpai $[0; \pi]$?

8. Geometrinės progresijos ketvirtojo ir penktojo nario suma lygi 20, o trečiojo ir ketvirtojo nario suma lygi 5. Raskite tos progresijos šeštąjį narį.

9. $R=\sqrt[3]{2}$ spindulio metalinis rutulys perlydytas į kūgį, kurio šoninio paviršiaus plotas tris kartus didesnis už pagrindo plotą. Raskite kūgio aukštinę.

10. Išspręskite lygtį $2(\arcsin x)^2+\pi^2=3\pi\arcsin x$.

III variantas

1. Supaprastinkite reiškinį

$$\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}+2\sqrt{x}$$

ir apskaičiuokite jo reikšmę, kai $x=7$.

2. Raskite $\mathrm{tg}\,\alpha$, kai $\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

3. Išspręskite lygtį $4^{x-1}-3\cdot 2^{x-2}=1$.

4. Raskite $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, kai $f(x)=2\sqrt{2}\sin^3 x$.

5. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 30, o į šoninę kraštinę nubrėžta aukštinė lygi 24. Raskite šoninės kraštinės ilgį.

6. Apskaičiuokite lygties $f(x)+4f'(x)=0$ šaknų sumą, kai $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$.

7. Apskaičiuokite lygties $\cos^2\frac{\pi x}{2}=1$ šaknų, priklausančių atkarpai $[\pi; 3\pi]$, sandaugą.

8. Raskite sveikąjį skaičių, tenkinantį nelygybių sistemą

$$\begin{cases}\log_{1/2}(2x-3)>-3,\\ x^2-4x>0.\end{cases}$$

9. Iš taško, nutolusio nuo plokštumos atstumu $5\sqrt{2}$, nubrėžtos dvi pasvirosios. Su plokštuma jos sudaro 45° kampus, o viena su kita — 60° kampą. Apskaičiuokite atstumą tarp pasvirųjų pagrindų.

10. Vektorius $\bar{a}(x; -1; 2)$ statmenas vektoriui $\bar{b}(1; 2; 0)$. Raskite vektoriaus $\bar{a}$ modulį.

IV variantas

1. Apskaičiuokite $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4}$.

2. Raskite visas sveikąsias x reikšmes, tenkinančias nelygybę $\dfrac{4-x}{x-5}\geqslant 1-\dfrac{4}{x}$.

3. Išspręskite lygtį $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

4. Raskite lygties

$$2^{1+\log_2 x}+4^{1+\log_2 x}=110$$

šaknis.

5. Lygiašonė trapecija, kurios pagrindai 2 cm ir 3 cm, o kampas 60°, sukama apie trumpesnįjį pagrindą. Apskaičiuokite sukinio tūrį ir atsakymą suapvalinkite iki artimiausio sveikojo skaičiaus.

6. Kiek lygties $\cos^2 2x+\cos^2 6x=1$ šaknų priklauso intervalui $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$?

7. Raskite atkarpos, kurioje teisinga nelygybė $\log_{0,1}(x^2-x+8)\geqslant-1$, vidurio taško koordinatę.

8. Dviejų skaičių aritmetinis vidurkis 16 vienetų mažesnis už didesnįjį skaičių, o jų geometrinis vidurkis 8 vienetais didesnis už mažesnįjį skaičių. Raskite tuodu skaičius.

9. Supaprastinkite reiškinį

$$\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}\right)^6.$$

10. Raskite funkcijos $y=\sqrt{x(10-x)}$ mažiausią ir didžiausią reikšmę jos apibrėžimo srityje.

V variantas

1. Išspręskite lygtį $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$.

2. Supaprastinkite

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2};\ a>b>0.$$

3. Raskite lygties

$$\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}$$

didžiausią šaknį.

4. Raskite mažiausią teigiamą sveikąją x reikšmę, tenkinančią nelygybę $\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}}>0{,}64$.

5. Apskaičiuokite $\cos 2\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$.

6. Raskite lygties $\sin x-1=0{,}5\sin 2x-\cos x$ šaknį, priklausančią intervalui $0^\circ<x<180^\circ$.

7. Lygiašonio trikampio aukštinės ir pagrindo santykis $3:4$, o šoninė kraštinė lygi $2\sqrt{39}$ cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

8. Metalinis ritinys, kurio pagrindo skersmuo $d=4$ cm ir aukštinė $h=4$ cm, perlydytas į rutulį. Apskaičiuokite to rutulio spindulį (laikykite, kad $\sqrt[3]{12}\approx\approx 2{,}3$).

9. Skaičių 26 išskaidykite į du dėmenis, kurių kvadratų suma būtų mažiausia.

10. Išspręskite lygtį $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

VI variantas

1. Apskaičiuokite $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}$.

2. Apskaičiuokite $3x+y+z$, kai $x+y+2z=14$, $2x+y+z=10$, $x+2y+z=12$.

3. Išspręskite lygtį $\log_2(17-2^x)=4-x$.

4. Apskaičiuokite 10^x reikšmę, kai $x=\lg 12+(\log_4 10)^{-1}$.

5. Duota: $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{3}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Raskite $\cos^2\alpha$.

6. Kiek lygties $\sin x+\cos x=1{,}4$ šaknų yra atkarpoje $[-\pi;\ 3\pi]$?

7. Atkarpos taškai tenkina nelygybę $3\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}\geqslant 2$. Raskite atkarpos vidurio taško koordinatę.

8. Aritmetinės progresijos aštuntasis narys lygus 2, vienuoliktasis narys lygus 11. Kiek reikia sudėti pirmųjų progresijos narių, kad jų suma būtų lygi 30?

9. Raskite funkcijos $f(x)=\sin x+\cos x$ didžiausios reikšmės kvadratą.

10. Per kūgio viršūnę išvesta plokštuma. Su pagrindo plokštuma ji sudaro kampą, kurio kosinusas lygus $\frac{1}{3}$, ir nukerta pagrindo apskritimo lanką, lygų 90°. Atstumas nuo pagrindo centro iki tos plokštumos lygus $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

VII variantas

1. Apskaičiuokite $(4^{-0{,}25}-2^{0{,}5})(4^{-0{,}25}+(2\sqrt{2})^{1/3})$.

2. Apskaičiuokite reiškinio $x-y+2z$ reikšmę, kai $x+y=4$, $y+z=8$, $x+z=6$.

3. Išspręskite lygtį $\frac{1}{2x}\lg 2=\lg(2^{1/x}-2)$.

4. Kiek lygties $\sin x+\cos 2x=0$ šaknų yra atkarpoje $[-\pi;\ 3\pi]$?

5. Duota: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Apskaičiuokite reiškinio $25\sin^2\alpha\cos\alpha$ reikšmę.

6. Raskite atkarpos, kurios taškai tenkina nelygybę $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\leqslant 6$, ilgį.

7. Kiek kartų abscisių ašis kerta funkcijos $f(x)=x^3+3x^2+5x$ grafiką?

8. Aritmetinės progresijos septintojo ir vienuoliktojo nario suma yra 10, o penktojo ir dešimtojo nario suma lygi 1. Raskite pirmųjų 20 narių sumą.

9. Apskaičiuokite $f'(1)$, kai $f(x)=\frac{x}{x^2+1}-\sqrt{x}$.

10. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė tris kartus ilgesnė už trumpesnįjį pagrindą. Tos trapecijos bukųjų kampų pusiaukampinės susikerta taške, priklausančiame pagrindui. Apskaičiuokite trapecijos ploto ir trikampio, kurį sudaro trumpesnysis pagrindas bei pusiaukampinės, ploto santykį.

VIII variantas

1. Išspręskite lygtį $\frac{x-1}{x}-\frac{3x}{2x-2}=-\frac{5}{2}$.

2. Raskite x (laipsniais), kai $180^\circ<x<360^\circ$ ir $\cos^2(180^\circ+x)+3\cos^2(90^\circ+x)=2$.

3. Raskite didžiausią x reikšmę, su kuria teisinga nelygybė $x^2+4(\sqrt{4-x})^2-21\leqslant 0$.

4. Išspręskite lygtį $2\sqrt[4]{3x+0{,}1}=3\sqrt{3x+0{,}1}-1$.

5. Trapecijos pagrindų ilgių skirtumas lygus 14 cm; šoninių kraštinių ilgis 13 cm ir 15 cm. Į ją galima įbrėžti apskritimą. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

6. Motorinė valtis nuplaukė upe 60 km prieš srovę ir 60 km pasroviui. Kelyje prieš srovę ji užtruko 50 min ilgiau negu plaukdama pasroviui. Valties greitis stovinčiame vandenyje lygus 21 km/h. Apskaičiuokite upės tėkmės greitį.

7. Raskite sveikąjį skaičių x, kai

$$\frac{\sqrt[3]{9^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1}\cdot 27^{-2/3}}=\frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}.$$

26. Užsak. Nr. 1941.

8. Apskaičiuokite reiškinio $27\cos^4 2\alpha$ reikšmę, kai $\cos(3\pi-4\alpha)=\frac{2}{3}$.

9. Raskite lygties

$$x^2 6^{-x}+6^{\sqrt{x}+2}=x^2 6^{\sqrt{x}}+6^{2-x}$$

šaknų sumą ir sandaugą.

10. Apskaičiuokite A reikšmę, kai $A=4^B$; čia $B=\log_2 5+\log_{1/4} 10$.

IX variantas

1. Raskite sveikąjį skaičių x, kai

$$\frac{(x-1)(\sqrt[4]{9})^3}{\sqrt{27}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{9^2}{(\sqrt[6]{9})^3}.$$

2. Išspręskite lygtį $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$.

3. Išspręskite lygtį $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$.

4. Apie apskritimą apibrėžtos lygiašonės trapecijos plotas 32 cm^2. Trapecijos kampas prie pagrindo lygus $\frac{\pi}{6}$. Raskite šoninės kraštinės ilgį.

5. Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys 2,5 karto didesnis už įbrėžtinio apskritimo spindulį. Raskite trikampio didesniojo smailiojo kampo sinusą.

6. Supaprastinkite reiškinį

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2(\pi-\alpha).$$

7. Apskaičiuokite $(0{,}001^{\lg 3-1}+0{,}01^{\lg 0{,}3+0{,}5})\cdot 2{,}7$.

8. 120° dvisienio kampo briaunoje pasirinkta atkarpa $AB=3$ cm; iš jos galų skirtingose sienose iškelti statmenys tai atkarpai: $AC=1$ cm ir $BD=2$ cm. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų C ir D.

9. Duota: $F(x)=\frac{x}{2-x}+2$. Raskite lygties $F(x)=F'(x)$ šaknų sumą.

10. Trikampį sudaro ašių Ox ir Oy atkarpos bei tiesė, einanti per taškus (0; 4) ir (4; 2). Raskite to trikampio plotą.

X variantas

1. Raskite sveikąjį skaičių $2x$, kai

$$\frac{x+5{,}5}{14}(4+\sqrt{2})=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{8^{2/3}-2^{1/2}}.$$

2. Apskaičiuokite reiškinio x^2+y^2 reikšmę, kai $2x+y=2$, $x+3y=3$.

3. Išspręskite lygtį $\log_{1/2}(x-1)+\log_{1/2}(x+1)-\log_{1/\sqrt{2}}(7-x)=1$.

4. Kiek sveikųjų x reikšmių tenkina nelygybę $x^2+8x<20$?

5. Išspręskite lygtį $2^x+3\cdot 2^{x+2}=6{,}5$.

6. Apskaičiuokite reiškinio $\operatorname{tg}^2 15°+4\operatorname{tg} 60°$ reikšmę.

7. Kiek lygties $\sin x-\sin 2x+\sin 3x=0$ šaknų priklauso intervalui $[0;\pi]$?

8. Aritmetinės progresijos šeštasis narys 4 kartus mažesnis už devintąjį narį, o jų suma lygi 20. Raskite pirmųjų devynių progresijos narių sumą.

9. Raskite funkcijos $f(x)=x\ln x$ ekstremumo taškus.

10. Per keturkampio viršūnes nubrėžtos tiesės, lygiagrečios jo įstrižainėms. Raskite šių tiesių sudaryto lygiagretainio ir duotojo keturkampio plotų santykį.

XI variantas

1. Raskite sveikąjį skaičių $3x$, kai

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{9^{1/2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2^{3/2}(3-\sqrt{5})}\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$$

2. Apskaičiuokite reiškinio x^2-y reikšmę, kai $2x-5y=0$, $x+10y=2$.

3. Apskaičiuokite 5^x reikšmę, kai $x=\log_4 16+1{,}5\log_{1/3} 3-\lg\sqrt{5}-\lg\sqrt{2}$.

4. Apskaičiuokite atkarpos, kurios taškai tenkina nelygybę $x^2-x\leqslant 6$, ilgį.

5. Išspręskite lygtį $4\cdot 5^x-5^{-x}+\lg 100=5$.

6. Supaprastinę reiškinį, apskaičiuokite $\cos 20°-\sin 20°\operatorname{ctg} 10°$.

7. Kiek šaknų turi lygtis $\cos x-\cos 3x-\sin 2x=0$ intervale $[0;\pi]$?

8. Ištirkite funkciją $f(x)=x^3+3x^2-5$. Kiek kartų jos grafikas kerta ašį Ox?

9. Aritmetinės progresijos šeštojo ir devintojo nario suma 20, o jų sandauga lygi 64. Progresijos pirmasis narys yra neigiamas. Raskite dešimtąjį jos narį.

10. Kūgio ašinis pjūvis — lygiakraštis trikampis. Raskite kūgio ir įbrėžto į jį rutulio tūrių santykį.

XII variantas

1. Išspręskite lygtį $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$.

2. Trikampyje, kurio pagrindas lygus 15 cm, nubrėžta atkarpa, lygiagreti pagrindui. Gautos trapecijos plotas sudaro 75% trikampio ploto. Raskite tos atkarpos ilgį.

3. Supaprastinkite reiškinį $\dfrac{\sin(60°+\alpha)}{4\sin\left(15°+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(75°-\frac{\alpha}{4}\right)}$, po to apskaičiuokite jo reikšmę, kai $\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)=0{,}8$, $0°<\alpha<90°$.

4. Išspręskite lygtį $\lg^2(100x)-\lg^2(10x)+\lg x=9$.

5. Raskite didžiausią neigiamą nelygybės $\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}}>-\sqrt{3}$ sprendinį.

6. Kiek šaknų, kurių modulis yra ne didesnis už π, turi lygtis $1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^4 x-\sin^4 x$?

7. Išspręskite lygtį $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}-\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}=0$.

8. Dviejų teigiamųjų skaičių aritmetinio vidurkio ir jų geometrinio vidurkio santykis lygus $\frac{13}{12}$. Raskite didesniojo ir mažesniojo skaičių santykį.

9. Duota: $\cos 3\alpha=\frac{2}{3}$. Apskaičiuokite reiškinio $81\cos^2\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$ reikšmę.

10. Įrodykite, kad su kiekvienu x funkcija $f(x)=\sin^2 2x+0{,}5\cos 4x+2\sin^2 x+\cos 2x$ įgyja tą pačią reikšmę. Apskaičiuokite ją.

XIII variantas

1. Supaprastinkite reiškinį

$$\frac{x^{-6}-64}{16+4x^{-2}+x^{-4}}\cdot\frac{1}{4-4x^{-1}+x^{-2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}.$$

2. Supaprastinkite reiškinį $\left(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg} 2\alpha\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{tg} 2\alpha\right)$.

3. Išspręskite lygtį $1{,}5\cdot 4^{x+0{,}5}=6^x+2\cdot 9^{x-0{,}5}$.

4. Aritmetinės progresijos pirmojo, trečiojo ir penktojo nario suma lygi —12, o jų sandauga 80. Pasirinkę mažiausią a_1 reikšmę, raskite progresijos pirmąjį narį a_1 ir skirtumą d.

5. Apskaičiuokite visų sveikųjų nelygybės $\log_{1/2}\frac{x-1}{7-x}>-1$ sprendinių sumą.

6. Kiek lygtis $f'(x)=0$ turi sprendinių atkarpoje $[0;\ 2\pi]$; čia $f(x)=4\sin 2x-3\cos 2x-10x$.

7. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ilgis lygus $4\sqrt{10}$, o į šoninę kraštinę nubrėžtos pusiaukraštinės ilgis $3\sqrt{10}$. Raskite trikampio pagrindo ilgį.

8. Su kuria parametro a reikšme lygtis $|x^2-2x-3|=a$ turi tris sprendinius?

9. Trikampės piramidės $ABCD$ sienos ABC ir BCD — taisyklingieji trikampiai, kurių aukštinė pastovi. Kampas tarp šių sienų lygus φ. Su kuria $\frac{1}{\cos\varphi}$ reikšme piramidės viso paviršiaus plotas yra didžiausas?

10. Parabolės $y=x^2-3x+4$ liestinė eina per koordinačių pradžią. Lietimosi taško abscisė — teigiamas skaičius. Raskite liestinės krypties koeficientą.

XIV variantas

1. Išspręskite lygtį $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$.

2. Apskaičiuokite A reikšmę, kai $A=5^B$; čia $B=2\log_{25}8+\log_{1/5}5$.

3. Raskite mažiausią x reikšmę, su kuria teisinga nelygybė $\frac{x-3}{2}\geqslant\frac{(\sqrt{x}-5)^2}{x-6}$.

4. Vanduo į baseiną gali tekėti trimis vamzdžiais. Kad pripildytų baseiną, pirmasis vamzdis turi veikti 4 h ilgiau negu antrasis, o antrasis — $\frac{1}{3}$ laiko, per kurį pripildomas baseinas trečiuoju vamzdžiu. Jeigu visi vamzdžiai veiks kartu, tai baseinas bus pripildytas per 4 h. Per kiek valandų gali pripildyti baseiną pirmas ir trečias vamzdis veikdami atskirai?

5. Išspręskite lygtį

$$(x^2-3x)9^{\sqrt{2-x}}+4\cdot 9^x=(x^2-3x)9^x+4\cdot 9^{\sqrt{2-x}}.$$

6. Raskite sveikąjį skaičių x, kai $\frac{(\sqrt[6]{4})^5\cdot 16^{1/2}}{\sqrt[3]{64}\cdot x}=16^{1/6}\cdot 4^{-1/2}$.

7. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai, o perimetras lygus 48. Apskaičiuokite šoninės kraštinės ilgį.

8. Apskaičiuokite reiškinio $4\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ reikšmę, kai $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. Išspręskite lygtį $x\sqrt[3]{x}+16=8\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$.

10. Raskite x (laipsniais), kai $0°<x<360°$ ir $2\sin^2(x+270°)-7\sin(x+90°)=4$.

XV variantas

1. Išspręskite lygtį

$$x^2\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+4^{2-x}=16\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+x^2\cdot 2^{-2x}.$$

2. Raskite sveikąjį skaičių x, kai

$$\frac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{-1/2}}{(\sqrt[6]{25})^2\cdot\sqrt{5}\cdot x}=\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{25}}\right)^2.$$

3. Apskaičiuokite A reikšmę, kai $a=2^B+6^C$; čia $B=\frac{2}{\log_{\sqrt{3}}2}$ ir $C=\frac{1}{\log_2 6}$

4. Išspręskite lygtį $\sqrt{42-x}=2+\sqrt{6-x}$.

5. Išspręskite lygtį $\frac{6}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}-1$.

6. Apskaičiuokite reiškinio $16\sin^4\left(\frac{11\pi}{2}-2\alpha\right)$ reikšmę, kai $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-4\alpha\right)=\frac{1}{4}$.

7. Du vienodo spindulio apskritimai liečia vienas kitą iš išorės taške C. Be to, kiekvienas jų iš išorės liečia trečią apskritimą, kurio spindulys lygus 6,5, atitinkamai taškuose A ir B. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai $AB=5$.

8. Raskite didžiausią x reikšmę, su kuria teisinga nelygybė $\frac{x^2+x-45}{x-6}\geqslant\frac{3x+1}{2}$.

9. Raskite x (laipsniais), kai $90°<x<270°$ ir $3\cos^2(x+270°)+\sin^2(x+180°)=1$.

10. Pirmą dieną automobilis sunaudojo 10% bake esančio benzino, antrą dieną — 25% likusio benzino. Po to bake liko benzino 13 l mažiau negu buvo iš pradžių. Kiek litrų benzino buvo bake iš pradžių?

XVI variantas

1. Apskaičiuokite A reikšmę, kai $A=2^B-10^C$ reikšmę; čia $B=\frac{1}{\log_6 2}$, $C=\frac{2}{\log_2 10}$.

2. Raskite racionaliąją x reikšmę, tenkinančią lygtį $10x:(\sqrt[3]{2})^2=2^{5/3}\times 4^{-2/3}:\sqrt[6]{64}$.

3. Išspręskite lygtį $2\sqrt{x-2}-15=\sqrt[4]{x-2}$.

4. Raskite didžiausią x reikšmę, su kuria teisinga nelygybė $2x-5\sqrt{x}+2\leqslant 0$.

5. Lygiašonės trapecijos aukštinė lygi 16, o įstrižainė lygi 20. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

6. Raskite x (laipsniais), kai $0°<x<270°$ ir $\sin(90°+2x)+\sin x=0$.

7. Apskaičiuokite reiškinio $49:\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$ reikšmę, kai $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

8. Užsakymą atliko dvejos staklės. Kiekvienos turėjo apdoroti 150 detalių. Pirmomis staklėmis kas valandą apdorota 5 detalėmis daugiau negu antromis. Pirmos staklės pradėjo veikti 1 h vėliau negu antros, be to, 30 min jos buvo išjungtos. Tačiau abejomis staklėmis darbas buvo baigtas tuo pačiu metu. Kiek detalių per valandą buvo apdorota kiekvienomis staklėmis?

9. Išspręskite lygtį

$$x^2\cdot 5^{\sqrt{3x-2}}+5^{2+x}=5^{\sqrt{3x-2}+2}+x^2\cdot 5^x.$$

10. Išspręskite lygtį $\frac{6-x}{1-x^2}-\frac{x+3}{x(1-x)}=\frac{x+5}{x(1+x)}$.

XVII variantas

1. Išspręskite lygtį $\frac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}=6$.
2. E — kvadrato $ABCD$ kraštinės BC vidurio taškas, F — kraštinės CD vidurio taškas. Raskite kampo EAF tangentą.
3. Apskaičiuokite sumą visų parametro a reikšmių, su kiekviena kurių lygtis $(a-2)x^2-2\sqrt{6}x+a-1=0$ turi tik vieną šaknį.
4. Lygiašonės trapecijos aukštinė ir įstrižainė lygi atitinkamai 5 ir 13. Apskaičiuokite trapecijos plotą.
5. Raskite $\sin\alpha$, kai $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=3$.
6. Apskaičiuokite visų sveikųjų nelygybės $\log_{1/3}(2x-1)>-2$ sprendinių sumą.
7. Kreivės $\frac{8}{x^2}$ liestinė, nubrėžta per tos kreivės ir pirmo koordinatinio kampo pusiaukampinės susikirtimo tašką, nukerta ordinačių ašies atkarpą. Raskite jos ilgį.
8. Taškas $M(2;\ 5)$ priklauso parabolei $y=-x^2+ax+5$. Raskite parabolės viršūnės ordinatę.
9. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninės sienos — kvadratai. Prizmės šoninio paviršiaus plotas lygus 144. Apskaičiuokite briaunainio, kurio viršūnės yra visų prizmės sienų centrai, tūrį.
10. Raskite parametro k reikšmę, su kuria lygybė

$$2\sin 4x(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=\sin kx$$

yra teisinga, kai x įgyja bet kurią reikšmę.

XVIII variantas

1. Apskaičiuokite lygties $x(x-\sqrt{3})=1$ šaknų kvadratų sumą.
2. Išspręskite lygtį $\log_{1/2}(\log_2 x-1)=-1$.
3. Trys sveikieji teigiami skaičiai sudaro geometrinę progresiją. Antrasis jos narys 1 vienetu didesnis už pirmą. Raskite trečią progresijos narį.
4. Raskite funkcijos $f(x)=|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|$ mažiausią reikšmę.
5. Lygiagretainio $ABCD$ $(AB\parallel CD)$ bukojo kampo B pusiaukampinė kerta kraštinę AD taške F. Kraštinės AB ilgis lygus 12 ir $AF:FD=4:3$. Raskite lygiagretainio perimetrą.
6. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases}\frac{1}{2-x}\geqslant 1,\\ 2\cdot 4^{2x}\geqslant 32^x.\end{cases}$$

7. Kūgio aukštinė lygi 6. Kampas tarp jo sudaromosios ir pagrindo plokštumos lygus 60°. Į kūgį įdėta piramidė, kurios pagrindas — lygiašonis statusis trikampis, įbrėžtas į kūgio pagrindą, o viršūnė — vienos iš kūgio sudaromųjų vidurio taškas. Apskaičiuokite piramidės tūrį.
8. Kvadratinės lygties $x^2-2kx+3(2k-3)=0$ parametras k įgyja tokias reikšmes: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7. Kiekvieną nurodytų k reikšmių atitinka tam tikras pateiktos lygties šaknų skaičius. Raskite visų šaknų skaičių.
9. Išspręskite lygtį $4\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{x+3}=\pi$.

10. Raskite lygties $\frac{f(x)}{2f'(x)}=\frac{1}{3}$ sveikąją šaknį, kai $f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}$.

XIX variantas

1. Raskite didžiausią funkcijos $f(x)=\sqrt{x^2-6x+16}$ reikšmę atkarpoje $[1;\ 6]$.
2. Išspręskite nelygybę $\frac{x^2(x-2)^2}{\log_{0,5}(x^2+1)}\geqslant 0$.
3. Raskite $|x|$, kai $|x-4|+5x=-8$.
4. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės BD, statmenos kraštinei AB, ilgis lygus 6; įstrižainės AC ilgis lygus $2\sqrt{22}$. Raskite kraštinės AD ilgį.
5. Išspręskite lygtį $\frac{\sqrt{x^2+x+4}}{x-1}=2$.
6. Kiek šaknų turi lygtis $\frac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}=0$ atkarpoje $[0;\ 9\pi]$?
7. Kubo briaunos ilgis lygus $4\sqrt[4]{3}$. Kubą kerta plokštuma, kuri eina per trijų jo briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės, vidurio taškus. Raskite pjūvio plotą.
8. Raskite $\sqrt{5}\cos(\operatorname{arctg}0{,}75)$.
9. Raskite $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.
10. Apskaičiuokite $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^n}{3^n}+\ldots}$

XX variantas

1. Raskite skaičiaus a reikšmę, su kuria sistema

$$\begin{cases}\frac{2x-y}{3}+\frac{x+3y}{5}=2,\\ \frac{x+2y}{2}-\frac{x-5y}{3}=3,\\ \frac{5x-y}{3}-\frac{x-10y}{2}=a\end{cases}$$

turi sprendinį.
2. Apskaičiuokite funkcijų $y=4-x$, $y=4+x$, $y=|x|$ grafikų ribojamos figūros plotą.
3. Raskite $\left(\frac{\sin 80^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.
4. Išspręskite lygtį $\log_2^2(2x)=\log_2 x^4$.
5. Stačiojo trikampio statinių santykis lygus 0,5. Raskite smailiojo kampo tarp pusiaukraštinių, nubrėžtų į statinius, tangentą.
6. Begalinės geometrinės progresijos, kurios $|q|<1$, suma lygi 9, o jos narių kvadratų suma 40,5. Raskite antrąjį progresijos narį.
7. Išmatavus tam tikrą dydį, gautos tokios penkios reikšmės: 51; 51,2; 51,4; 52,1; 52,3. Raskite skaičių x, su kuriuo gautų reikšmių ir skaičiaus x skirtumų kvadratų suma būtų mažiausia.

8. Išspręskite lygtį $\frac{\log_2(9-x^{\log_x 2^{x-3}})}{x}=1$.

9. Stačiojo trikampio ABC įžambinės AB ilgis lygus 4. Raskite sumą $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

10. Raskite mažiausią teigiamą kampą (laipsniais), tenkinantį lygtį $2\cos^2(270°+\alpha)+7\sin(270°-\alpha)=5$.

XXI variantas

1. Išspręskite lygtį $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$.

2. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis lygus 12. Į trikampį įbrėžto skritulio spindulys lygus 3. Apskaičiuokite trikampio plotą.

3. Raskite nelygybės $4^{x-1}-2^x<1{,}25$ visų sveikųjų teigiamų sprendinių sumą.

4. Raskite $\operatorname{tg}\alpha$, kai $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=3$.

5. Išspręskite lygtį $\log_2\log_{1/2}\log_9 x=0$.

6. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases}\cos\pi x=-1,\\ x^3-5x^2-14x=0.\end{cases}$

7. Raskite funkcijos $f(x)=\frac{20x}{x^2+1}$ maksimumą.

8. Piramidės $ABCF$ pagrindas — taisyklingasis trikampis ABC, kurio kraštinės ilgis lygus 20. Briauna FB statmena pagrindo plokštumai, o tos briaunos ilgis lygus 5. Piramidę kerta plokštuma, lygiagreti prasilenkiančioms briaunoms AC ir FB. Šis pjūvis — kvadratas. Raskite kvadrato kraštinės ilgį.

9. Raskite atstumą tarp parabolės $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-3$ ir tiesės $4x+3y+9=0$ susikirtimo taškų.

10. Išspręskite lygtį $|x-4|=x$.

XXII variantas

1. Pertvarkykite reiškinį $(2\log_2 25+\lg 2)\log_2 10$ taip, kad jo išraiška būtų $(A\log_2 5+B)^2$.

2. Tiesių $2x+y=9$ ir $kx+5y=18$ susikirtimo taškas priklauso pirmo koordinatinio kampo pusiaukampinei. Raskite k.

3. Kampo tarp lygiašonio trikampio šoninių kraštinių didumas mažesnis už 60°. Į šoninę kraštinę nubrėžta pusiaukraštinė ir aukštinė, kurių ilgis lygus atitinkamai $3\sqrt{5}$ ir 6. Raskite šoninės kraštinės ilgį.

4. Parabolės $y=x^2-5x+10$ liestinė su abscisių ašimi sudaro 45° kampą. Raskite atstumą nuo lietimosi taško iki koordinačių pradžios.

5. Išspręskite lygtį $\frac{25}{2x+1}+\frac{10}{\sqrt{2x+1}}=3$.

6. Raskite $\cos^2 2\alpha$, kai $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

7. Aritmetinės progresijos penktasis narys lygus 4. Koks turi būti progresijos skirtumas, kad antrojo ir šeštojo nario kvadratų suma būtų mažiausia?

8. Per piramidės $ABCF$ pagrindo ABC pusiaukraštinę BK ir šoninės briaunos AF vidurio tašką nubrėžta plokštuma. Raskite briaunainio $BCKLF$ ir piramidės $ABKL$ tūrių santykį.

9. Raskite nelygybės $2^x+\frac{9}{2^x}<10$ visų sveikųjų sprendinių sumą.

10. Išspręskite lygtį $\frac{\pi}{24}(6x+1)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

XXIII variantas

1. Kvadratinės lygties $4x^2+kx-3=0$ šaknų modulių suma lygi 2. Neigiamos šaknies modulis didesnis už teigiamąją šaknį. Raskite k.

2. Raskite lygties $\log_3\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{15}+\frac{1}{2}=0$ mažiausią teigiamą šaknį.

3. Skritulio ir įbrėžto į jį kvadrato plotų skirtumas lygus $2\sqrt{3}(\pi-2)$. Apskaičiuokite į tą skritulį įbrėžto taisyklingojo šešiakampio plotą.

4. Išspręskite lygtį $2x+\sqrt{x+11}=14$.

5. Išspręskite lygtį $\frac{2}{9}x=(\sin 15°+\operatorname{tg}30°\cos 15°)^2$.

6. Visos keturios piramidės sienos — taisyklingieji trikampiai. Piramidės visas paviršius lygus $81\sqrt{3}$. Raskite atstumą tarp dviejų jos sienų centrų.

7. Išspręskite lygtį

$$\frac{\sqrt{x^2-x-12}\,(2^{x-1{,}5}-\sqrt{2})}{x+3}=0.$$

8. Funkcijos $y=\sqrt{x^2+2x+4}$ grafiko liestinė, nubrėžta per tašką, kurio abscisė lygi −2, abscisių ašyje iškerta atkarpą. Raskite tos atkarpos ilgį.

9. Raskite nelygybės $\frac{x^2+x+1}{x^2-12x+35}<0$ sveikąjį sprendinį.

10. Kiek lygtis $\sin x+\cos 2x=0$ turi šaknų, priklausančių atkarpai $[0;\ 3\pi]$?

XXIV variantas

1. Apskaičiuokite visų lygties $(x^2-7x+2)^2-13(x^2-7x)-26=0$ šaknų sumą.

2. Raskite $\sin^2 3\alpha$, kai $\alpha=2\operatorname{arctg}1-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$.

3. Stačiojo trikampio ABC statinių AC ir BC ilgis lygus atitinkamai 12 ir 8; taškas K — pusiaukraštinės BD vidurys. Raskite atkarpos CK ilgį.

4. Išspręskite lygtį $\log_{|x|}(x^4+x^3-6x^2-7x)=4$.

5. Raskite mažiausią funkcijos $f(x)=2^x+2^{2-x}$ reikšmę atkarpoje $[0;\ 2]$.

6. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$) pagrindas — kvadratas $ABCD$, kurio plotas lygus 50. Taškas O — kvadrato $ABCD$ centras, F ir K — atitinkamai briaunų CC_1 ir A_1B_1 vidurio taškai. Vektorius $\overline{OF}$ statmenas vektoriui $\overline{DK}$. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

7. Tam tikrą dviženklį skaičių padalijus iš jo skaitmenų sandaugos, gaunamas dalmuo 3 ir liekana 9. Jeigu prie to skaičiaus skaitmenų kvadratų sumos pridėsime jo skaitmenų sandaugą, tai gausime ieškomąjį skaičių. Raskite tą skaičių.

8. Raskite $\sin^2 x$, kai $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\operatorname{tg}x=2$ ir $0<x<\frac{\pi}{2}$.

9. Tiesių $2x-y=10$ ir $3x+2y=1$ susikirtimo taškas priklauso apskritimui, kurio centras yra koordinačių pradžia. Raskite to apskritimo spindulį.

10. Raskite nelygybių sistemos

$$\begin{cases} x^2-5x-6<0, \\ x^2-3x>0 \end{cases}$$

visų sveikųjų sprendinių sandaugą.

XXV variantas

1. Išspręskite lygtį $x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=8$.

2. Išspręskite lygtį $\log_{0,5}(x-12)=-\log_2\sqrt{x}$.

3. Trikampio ABC kampo C didumas lygus 60°, kraštinės AB ilgis lygus $\sqrt{31}$. Kraštinėje AC atidėta atkarpa AD, kurios ilgis lygus 3. Atkarpos BD ilgis lygus $2\sqrt{7}$. Raskite kraštinės BC ilgį.

4. Lygiašonio trikampio ABC pusiaukampinė AD su pagrindu AC sudaro kampą, kurio tangentas lygus 0,5. Raskite kampo ABC kosinusą.

5. Koordinačių plokštumoje xOy nubrėžta tiesė $x+5y=4$ ir vektoriai $\bar{a}(2; -3)$ ir $\bar{b}(-1; 5)$. Raskite šios tiesės tokį tašką M, kad vektorius $\overline{OM}$ būtų statmenas vektoriui $2\bar{a}+3\bar{b}$.

6. Keturkampės piramidės pagrindas yra kvadratas. Viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai. Piramidės tūris lygus 72. Kokio ilgio turi būti piramidės aukštinė, kad apibrėžto apie piramidę rutulio spindulys būtų mažiausias?

7. Raskite didžiausią funkcijos $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ reikšmę atkarpoje $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

8. Raskite $f'(2)$, kai $f(x)=x\ln(x^2+2x-7)$.

9. Apskaičiuokite sumą visų racionaliųjų (tarp jų ir suprastinamų) trupmenų, kurių vardiklis lygus 2 ir kurios yra nelygybės $2^x+3\cdot 2^{2-x}<13$ sprendiniai.

10. Figūrą riboja lygties $x+|y|=2$ grafikas ir ordinačių ašis. Apskaičiuokite tos figūros plotą.

XXVI variantas

1. Išspręskite lygtį $x=2-\sqrt{-10x-x^2}$.

2. Keleivis nuvažiavo traukiniu 120 km ir, stotyje palaukęs 40 min, grįžo kitu traukiniu, kuris kas valandą nuvažiuodavo 6 km daugiau negu pirmasis. Visa kelionė truko 8 h. Kiek kilometrų per minutę nuvažiuodavo kiekvienas traukinys?

3. Raskite atkarpos, kurios taškai tenkina nelygybę $4x^2+4x+2\cdot(\sqrt{2x+1})^2\leqslant$ $\leqslant 34$, vidurio tašką.

4. Du vienodo spindulio apskritimai iš išorės liečia vienas kitą taške C. Be to, kiekvienas jų iš išorės liečia trečią apskritimą atitinkamai taškuose A ir B. Šio trečiojo apskritimo spindulys lygus 5. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai $AB=6$.

5. Raskite x, kai $\dfrac{4^{-1/3}\cdot 16^{2/3}}{\sqrt[3]{64\,x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3/4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}$.

6. Apskaičiuokite lygties
$2x^2\cdot 2^{\sqrt{x+2}}+x\cdot 2^{x+1}=2x^2\cdot 2^x+x\cdot 2^{\sqrt{x+2}+1}$ šaknų sumą ir sandaugą.

7. Apskaičiuokite A reikšmę, kai $A=9\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)\right)^{-1}$, $\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Išspręskite lygtį $\frac{2x+1}{x}+\frac{3x}{2(2x+1)}=\frac{5}{2}$.

9. Raskite x laipsniais, kai $0°<x<360°$ ir $2\cos^2(x+270°)=3\sin(x+270°)$.

10. Apskaičiuokite A, kai $A=4^B+5^C$; čia $B=\frac{1}{2\log_5 2}$, $C=\frac{1}{\log_7 5}$.

XXVII variantas

1. Raskite x laipsniais, kai $90°<x<270°$ ir $\sin^2(180°+x)+3\cos^2(180°+x)=$ $=2$.

2. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi 2 cm, o dvisienio kampo prie pagrindo tangentas $\frac{4}{3}$. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

3. Raskite skaičių A, B ir C didžiausią bendrąjį daliklį ir mažiausią bendrąjį kartotinį; čia $A=62$, $B=102$ ir $C=42$.

4. Aritmetinę progresiją sudaro 10 narių. Lyginių narių suma lygi 50, o nelyginių — 35. Raskite progresijos pirmąjį narį ir skirtumą.

5. Raskite lygties $\log_4(x^2+3x-4)=\log_4\frac{x-1}{x+4}$ šaknį.

6. Apskaičiuokite A reikšmę, kai $A=10^B+3^C$; čia $B=\frac{2}{\log_3 10}$ ir $C=\frac{1}{\log_6 3}$.

7. Raskite funkcijos $f(x)=\frac{\sin x+2x}{\cos x-3}$ išvestinės reikšmę taške $x=0$.

8. Raskite atkarpos, kurios taškai tenkina nelygybę $x^2+7<6x+y^2$, vidurio tašką; čia $y=(7-2x)^{1/2}$.

9. Taškų koordinatės tenkina lygčių sistemą $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=0, \\ x^{-2}+y^{-2}=8. \end{cases}$

Raskite atstumo tarp šių taškų kvadratą.

10. Išspręskite lygtį $8^{2/3}\cdot 2^3\cdot(0,5)^{-2}\cdot x^{-1}=2^7\cdot 2^{-2}$.

XXVIII variantas

1. 60 t kroviniui pervežti iš vienos vietos į kitą reikia tam tikro skaičiaus sunkvežimių. Kadangi į kiekvieną sunkvežimį pakrauta 0,5 t mažiau, tai papildomai reikėjo 4 sunkvežimių. Kiek sunkvežimių pareikalauta iš pradžių?

2. Raskite atkarpos, kurios taškai tenkina nelygybę $\log_{0,25}\frac{1-2x}{x+1}<0,5$, vidurio tašką.

3. Išspręskite lygtį $x=(16-x^2-6x)^{1/2}-2$.

4. Išspręskite lygtį $(2x+1):x+2,5x:(2x+1)=3,5$.

5. Kiek skirtingų šaknų turi lygtis $7+4\sin x:\cos^{-1}x+3\cos(90°-2x)=0$ atkarpoje $[0; 360°]$.

6. Skaičiai x, y, z tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x-2y-z=2, \\ 3x+4y-5z=4, \\ x+3y-2z=-1. \end{cases}$$

Apskaičiuokite skaičių x, y, z sumą ir sandaugą.

7. Apskaičiuokite A reikšmę, kai $A=\sin(90°-2x)$; $\sin(180°-x):\cos(180°-$ $-x)=-2$.

8. Tiesė $y=kx+q$ kerta hiperbolę $y=\frac{2,4}{x}$ taškuose, kurių abscisės $x=2$ ir $x=-3$. Raskite tiesės lygties koeficientus k ir q.

9. Duota lygtis x atžvilgiu:

$x\cdot 3^y - x\cdot 3^x = 3^{y+1} - 3^{x+1}$; čia $y=(x+2)^{1/2}$.

Apskaičiuokite jos šaknų sumą ir sandaugą.

10. Su kuria parametro k reikšme lygčių sistema $\begin{cases} 3x+2y=k, \\ x^2+y^2=117 \end{cases}$ turi vienintelį sprendinį?

ATSAKYMAI

1 skyrius

1.001. 20. **1.002.** 1. **1.003.** 32. **1.004.** 0,5. **1.005.** 5. **1.006.** 1. **1.007.** 3. **1.008.** 1. **1.009.** 9. **1.010.** 1. **1.011.** 2. **1.012.** 4. **1.013.** 12. **1.014.** 1. **1.015.** 4. **1.016.** 2. **1.017.** 8. **1.018.** 3. **1.019.** 2. **1.020.** 3. **1.021.** 0,5. **1.022.** 1. **1.023.** 10. **1.024.** 1. **1.025.** 3. **1.026.** 3. **1.027.** 6. **1.028.** 2. **1.029.** 3. **1.030.** 0,5. **1.031.** 5/6. **1.032.** 11. **1.033.** 1. **1.034.** 5/3. **1.035.** 9. **1.036.** 16. **1.037.** 17/27. **1.038.** 5. **1.039.** 12. **1.040.** 15/14. **1.041.** 1. **1.042.** 1/3. **1.043.** 5. **1.044.** 5. **1.045.** 25. **1.046.** 1. **1.047.** 125. **1.048.** 1/4. **1.049.** 5. **1.050.** —3/2.

2 skyrius

2.001. $x-1$. **2.002.** $\frac{2(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}{p-q}$. **2.003.** $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$. **2.004.** 0,2. **2.005.** 0. **2.006.** $\frac{1}{ab}$. **2.007.** $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$. **2.008.** y^2. **2.009.** $\frac{t+1}{t}$. **2.010.** -4. **2.011.** $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$. **2.012.** $x+1$. **2.013.** $\sqrt{a-1}$. **2.014.** $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. **2.015.** $\sqrt[m]{y}$. **2.016.** $|z^{1/p}-z^{1/q}|$. **2.017.** $\sqrt{x}$. **2.018.** 0,04. **2.019.** 16. **2.020.** $\frac{2\sqrt[6]{a^5}}{a}$. **2.021.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **2.022.** $-\sqrt{x}$, kai $x\in(0;\ 2)$; $\sqrt{x}$, kai $x\in(2;\ \infty)$. **2.023.** $\sqrt{6x}$. **2.024.** $\sqrt[3]{20x}$. **2.025.** 1. **2.026.** $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$. **2.027.** $\pm\sqrt[6]{2}$. **2.028.** $\frac{2}{x^2-a^2}$. **2.029.** $\frac{2\sqrt[3]{r}}{r}$. **2.030.** -1. **2.031.** $\frac{1}{a}$. **2.032.** 5. **2.033.** $4p-\sqrt{4p^2-1}$. **2.034.** $\sqrt{a^2-1}$. **2.035.** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$. **2.036.** $-3n(m+p)$. **2.037.** $-\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$. **2.038.** $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$. **2.039.** -4. **2.040.** 0,1. **2.041.** $-\frac{1}{a^2+a+1}$. **2.042.** 1. **2.043.** $\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}$. **2.044.** 1. **2.045.** $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$. **2.046.** -1. **2.047.** $\frac{b+1}{b-2a}$. **2.048.** 0,5. **2.049.** $q(p+q)$. **2.050.** $1+3x^2$. **2.051.** 5. **2.052.** $1-x^2$. **2.053.** $\frac{2}{1-p^4}$. **2.054.** 1. **2.055.** $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$. **2.056.** $\frac{1}{2}$. **2.057.** $\frac{x-y}{x+y}$. **2.058.** 1. **2.059.** $\frac{1}{xy}$. **2.060.** $\frac{24}{5y-2x}$. **2.061.** 20. **2.062.** $2a+3$. **2.063.** $1+2x$. **2.064.** $\frac{a-b}{a+b}$. **2.065.** $x+y$. **2.066.** $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$. **2.067.** $a^{5/6}$. **2.068.** 1. **2.069.** $a^{1/3}+b^{1/3}$. **2.070.** $a-b$. **2.071.** $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m}$. **2.072.** $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$. **2.073.** 1. **2.074.** $\frac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$. **2.075.** $\frac{x^{1/m}+3x^{1/n}}{x}$. **2.076.** 6. **2.077.** $\frac{1}{4}$. **2.078.** 2.

2.079. $\sqrt{2}(m+3)$. 2.080. $a-b$. 2.081. $\frac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}$. 2.082. -1. 2.083. $2x-1$. 2.084. 1. 2.085. 1. 2.086. -25, kai $a>0$; 25, kai $a<0$. 2.087. $-\sqrt{ac}$. 2.088. $\sqrt{1+x}$. 2.089. 2. 2.090. 3. 2.091. $\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{\sqrt[6]{x^5y^2}}$. 2.092. $\frac{1}{x^2-1}$. 2.093. $2\sqrt{3}$. 2.094. 0. 2.095. $z^{1/(p-3)}$. 2.096. $\frac{a^2}{4(a^2-x)}$. 2.097. 2. 2.098. 1. 2.099. -1. 2.100. $z(z+1)(z+2)$. 2.101. $-\frac{\sqrt{2}}{2a}$. 2.102. $1-a$, kai $a\in(-\infty;-1)$; $a-1$, kai $a\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$. 2.103. $\frac{a}{2}$. 2.104. $(a+b)\sqrt[3]{b^2+2a^3}$. 2.105. -1. 2.106. $\frac{29}{35}$. 2.107. $\frac{a^3}{2(a-1)}$. 2.108. $-\frac{7}{24}$. 2.109. 100. 2.110. $\frac{1}{3}$. 2.111. $\frac{1}{ab}$. 2.112. $\frac{\sqrt[3]{8-t^3}}{\sqrt{2}}$. 2.113. $\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$. 2.114. $16a^2$. 2.115. $(a+b)^2$. 2.116. $\frac{1}{m^2}$. 2.117. $-a^2$. 2.118. $\frac{1}{2}$. 2.119. $\frac{3}{5}$. 2.120. $\frac{31}{3}$. 2.121. $\sqrt[12]{32}$. 2.122. $2\sqrt[6]{18}$. 2.123. 0. 2.124. 0. 2.135. 0. 2.136. 0. 2.137. $\frac{a+b}{ab}$. 2.138. $-\frac{3}{4}$. 2.139. $\frac{3}{4}$. 2.140. 0,2. 2.141. 6. 2.142. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$. 2.143. $a-b$. 2.144. $a+b$. 2.145. 1. 2.146. $2(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2})(3+\sqrt{2})$. 2.147. $(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})(\sqrt{13}+3)$. 2.148. $-\frac{(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{3})}{2}$. 2.149. $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$. 2.150. $\frac{(2\sqrt{6}+1)(3-4\sqrt{2})}{23}$. 2.151. $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a})(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a})}{a}$. 2.153. 6. 2.154. 5. 2.156. 638. 2.157. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; b) 4. 2.158. $-\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$, kai $-1<a<1$; $\frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$, kai $1<a<\infty$. 2.159. $\frac{1}{ab}$. 2.160. 1. 2.161. $\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}$. 2.162. -2, kai $a\in(-\infty;0)$; 2, kai $a\in(0;\infty)$. 2.163. $\frac{16a^4}{x^2}$. 2.164. $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$. 2.165. $-\sqrt{\frac{t+2}{t-2}}$. 2.166. $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$, kai $b\in(0;1)$; $\frac{b^2+3}{\sqrt{b}}$, kai $b\in(1;\infty)$. 2.167. $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$, kai $m\in(-\infty;0)\cup(0;1)$; $\frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$, kai $m\in(1;\sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2};\infty)$. 2.168. $-(x^2+x+1)$, kai $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)$; x^2+x+1, kai $x\in(3;\infty)$. 2.169. mn. 2.170. $-\frac{a}{2}$, kai $a\in(-\infty;-2)$; $\frac{a(a-1)}{2}$, kai $a\in(-2;\infty)$. 2.171. $\frac{x+y}{2}$. 2.172. $\frac{4a-16}{a+4}$, kai $a\in(4;\infty)$, ir $\frac{(4-a)(a^2+16)}{2a(4+a)}$, kai $a\in(-4;4)$. 2.173. $\frac{1}{m+2}$, kai $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(3;\infty)$; $-\frac{1}{m+2}$, kai $m\in(0;3)$. 2.174. $-\frac{1}{x}$, kai $x\in(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$; $\frac{1}{x}$, kai $x\in(2;3)\cup(3;\infty)$.

2.175. -1, kai $x\in[1;2)$; 1, kai $x\in(2;\infty)$. 2.176. $\frac{1}{a+1}$, kai $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;2)$; $\frac{1}{a+3}$, kai $a\in(2;\infty)$. 2.177. $\frac{x+3}{x^2-x}$, kai $x\in(-\infty;0)$; $\frac{2x^2+x+3}{x^2+x}$, kai $x\in(0;1)$; $\frac{3}{x}$, kai $x\in[1;\infty)$. 2.178. $\frac{a+2}{a-1}$. 2.179. $\frac{a^2+1}{a-1}$. 2.180. $\frac{1}{1-3x}$, kai $x\in(-\infty;0)$; $\frac{x+1}{(x-1)(3x-1)}$, kai $x\in\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)$; $\frac{1}{x-1}$, kai $x\in(1;\infty)$. 2.181. $\sqrt[6]{a^2-1}$. 2.182. $a^2x^2-b^2y^2$. 2.183. $\frac{3}{x(2x+3)}$, kai $x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};0\right)\cup(0;3)$; $\frac{1}{x}$, kai $x\in(3;\infty)$. 2.184. $-\frac{1}{a}$, kai $a\in(-\infty;-5)$; $\frac{a+5}{a(3a-5)}$, kai $a\in(-5;0)\cup\left(0;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3};\infty\right)$. 2.185. $-\frac{x+1}{x}$, kai $x\in(-\infty;-1)$; $\frac{x+1}{2-x}$, kai $x\in(-1;0)$; $\frac{x+1}{x-2}$, kai $x\in(0;2)\cup(2;\infty)$. 2.186. p. 2.187. $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$. 2.188. $\frac{1}{x-x^2}$, kai $x\in(0;1)$; $\frac{1}{x^2-x}$, kai $x\in(1;\infty)$. 2.189. $\frac{r^2-r}{r^2+1}$, kai $r\in(-\infty;0)$; $\frac{r}{1-r}$, kai $r\in[0;1)$; $\frac{r}{r-1}$, kai $r\in(1;\infty)$. 2.190. $\frac{1}{z+2}$. 2.191. $\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$. 2.192. $\frac{a}{a+1}$. 2.193. $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$. 2.194. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}}$. 2.195. $\frac{a+2}{a^2(a-1)^2}$. 2.196. 2, kai $x\in(-\infty;-1]$; $\frac{2x^2}{2x^2-1}$, kai $x\in\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$; 0, kai $x\in(1;\infty)$. 2.197. $\frac{1}{\sqrt{b+2}}$. 2.198. $\frac{1-b}{1+b}$. 2.199. $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$. 2.200. $\sqrt[4]{x}$, kai $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0$; $-\sqrt[4]{x}$, kai $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0$. 2.201. $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$. 2.202. $\frac{m-8}{2}$. 2.203. $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$. 2.204. 1. 2.205. $\frac{x^2-1}{2x-b}$. 2.206. $\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}$. 2.207. $\frac{x^2-3x+2}{3x}$. 2.208. 1. 2.209. $3-2\sqrt{x}$, kai $x\in[0;9)$; -3, kai $x\in(9;\infty)$. 2.210. 2, kai $a\in(0;1)$; $\frac{2}{3}$, kai $a\in(1;\infty)$. 2.211. $\frac{z^2}{z^2+z+1}$. 2.212. 5. 2.213. $-\frac{1}{2}$, kai $x\in(-\infty;0)$; $\frac{1}{2}$, kai $x\in(0;\infty)$. 2.214. -2, kai $x\in(-\infty;0)$; 2, kai $x\in(0;\infty)$. 2.215. $-\frac{(z^2+9)(3-z)}{9z}$, kai $z\in(-3;0)\cup(0;3)$; $\frac{2(z-3)}{3}$, kai $z\in(3;\infty)$. 2.216. $\frac{m}{2}$. 2.217. $\frac{1}{a(3a+b)}$. 2.218. $2\sqrt{2}$, kai $x\in[2;4)$; $2\sqrt{x-2}$, kai $x\in[4;\infty)$. 2.219. 5. 2.220. 1, kai $0\leqslant b\leqslant a$, $a\neq 0$; $\frac{\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}$, kai $0<-b\leqslant a$. 2.221. $x\sqrt{2}$. 2.222. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 2.223. $-\frac{1}{\sqrt{a-2}}$, kai $a\in(2;3)$; $-\sqrt{a-2}$, kai

$a\in(3;\infty)$. **2.224.** $\frac{3-x^2}{x+2}$, kai $x\in(-\infty;-2)$; $\frac{5-x^2}{x+2}$, kai $x\in(-2;2)$; $\frac{x^2-3}{x+2}$, kai $x\in[2;\infty)$. **2.225.** $-(x-3)$, kai $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};3\right)$; $x-3$, kai $x\in[3;+\infty)$. **2.226.** $-3x$, kai $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;0)$; $3x$, kai $x\in(0;\infty)$. **2.227.** $\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}$. **2.228.** $\left(y-\frac{2}{y}\right)^2$. **2.229.** $\sqrt{2}$. **2.230.** 2. **2.231.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.232.** $-2a$, kai $a\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$; $2a$, kai $a\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};\infty)$. **2.233.** $\sqrt{a^2-1}$. **2.234.** $-2-4\sqrt{3}$. **2.235.** $\frac{1-a}{2a}$, kai $a\in(0;1)$; $\frac{a-1}{2}$, kai $a\in(1;\infty)$. **2.236.** $\frac{m-1}{2m}$, kai $m\in(0;1)$; $\frac{1-m}{2}$, kai $m\in[1;\infty)$. **2.237.** $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$, kai $a\in(0;1)$; $\frac{a-1}{\sqrt{a}}$, kai $a\in(1;\infty)$. **2.238.** $\frac{1}{x-\sqrt{2x}+1}$. **2.239.** $-\sqrt[4]{2}$. **2.240.** 1. **2.241.** $\sqrt[3]{4-x^2}$. **2.242.** $\frac{z^2-5z+6}{1-z}$, kai $z\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;2)$; $z-2$, kai $z\in[2;\infty)$. **2.243.** $\frac{x}{x-2}$. **2.244.** $a-b$. **2.245.** $-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. **2.246.** $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$. **2.247.** $1+\sqrt[3]{a}$. **2.248.** $\sqrt{2}$. **2.249.** $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})$. **2.250.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}$. **2.251.** $2\sqrt[4]{\frac{y}{x^2}}$. **2.252.** 2,4. **2.253.** -1, kai $x\in\left[\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)$; 1, kai $x\in\left(\frac{1}{4};\infty\right)$. **2.254.** 3. **2.255.** 3. **2.256.** $x^3\sqrt[4]{a}$. **2.257.** $\frac{1}{\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}}$. **2.258.** $\frac{1}{2\sqrt{b}}$. **2.259.** 0. **2.260.** $\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{p}}$. **2.261.** $\sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}$, kai $x\in(0;1]$. **2.262.** 1,25. **2.263.** x^2+1. **2.264.** $\frac{x+3}{x-1}$. **2.265.** 1,1. **2.266.** $\frac{4}{9}$. **2.267.** $\frac{1}{2y^3}$, kai $y<2x$; $-\frac{1}{2y^3}$, kai $y>2x$. **2.268.** $\sqrt{x}+1$. **2.269.** $-(a^3+\sqrt[4]{a^3})$. **2.270.** $\frac{4}{\sqrt{x-4}}-1$, kai $x\in(4;8)$; 1, kai $x\in[8;\infty)$. **2.271.** 4. **2.272.** $\frac{1}{\sqrt[8]{p-q}}$. **2.273.** $-\sqrt{x}$, kai $x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$; $\sqrt{x}$, kai $x\in\left(\frac{2}{3};\infty\right)$. **2.274.** 2. **2.275.** $x^3|\sqrt[3]{y}|$. **2.276.** $\frac{\sqrt[3]{a}-1}{4}$. **2.277.** 1. **2.278.** $\sqrt[3]{\frac{2n}{1+n}}$. **2.279.** $-2b(a+3\sqrt{ab})$. **2.280.** $\sqrt{\frac{a}{a+4b}}$. **2.281.** $\frac{\sqrt[4]{a}}{6}$. **2.282.** -1. **2.283.** 1. **2.284.** $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, kai $0<b<a$; $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$, kai $0<a<b$. **2.285.** $y=\begin{cases}2, & \text{kai } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2\sqrt{x-1}, & \text{kai } 2<x<\infty.\end{cases}$ **2.286.** $\frac{11}{3}$. **2.287.** $a=165{,}5$; $b=158{,}5$.

2.289. $(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. **2.290.** $3b^2+a^4=4ac$. **2.294.** Teisinga su visais $n\in[0;3m]$, $m>0$. **2.304.** Teisinga su visais $q\in[0;5p]$, $p>0$. **2.306.** 3^3-2^3. **2.307.** $\frac{n}{n+1}$. **2.310.** $A=1$, $B=2$, $C=0$. **2.312.** $\frac{x+1}{x}$, kai $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$; $-\frac{x+1}{x}$, kai $x\in(-1;0)$. **2.313.** -1, kai $x\in(-\infty;-1)$; $\frac{2+x-x^3}{x^3+x}$, kai $x\in[-1;0)\cup(0;1)$; 1, kai $x\in[1;\infty)$. **2.314.** $-(x+1)$, kai $x\in(-\infty;-1]$; $x+1$, kai $x\in[-1;1)$; $2x^2+x-1$, kai $x\in[1;\infty)$. **2.315.** 6, kai $x\in(-\infty;0)$; $6-2x$, kai $x\in[0;6)$; -6, kai $x\in[6;\infty)$. **2.316.** $\frac{2\sqrt{2}}{4-x}$, kai $x\in[2;4)$; $\frac{2\sqrt{x-2}}{x-4}$, kai $x\in(4;\infty)$. **2.317.** $m-n$, kai $0<\frac{m}{n}\leqslant 1$ ir $\frac{m}{n}>2$; $n-m$, kai $1<\frac{m}{n}<2$. **2.318.** $2x^2-a^2$, kai $x<-|a|$; $-a^2$, kai $x>|a|$. **2.319.** $x-2$, kai $x\in(-\infty;-1)$, $\frac{x^2+4}{x-2}$, kai $x\in(-1;1)$; $-(x+2)$, kai $x\in(1;2)$; $x+2$, kai $x\in(2;\infty)$. **2.320.** $\frac{-2x^2+2x-3}{x}$, kai $x\in(-\infty;0)$; $\frac{3+2x}{x}$, kai $x\in(0;2)$; $\frac{2x^2-2x+3}{x}$, kai $x\in[2;\infty)$. **2.321.** $6-4a$, kai $a\in[0;\sqrt{2})$; $2(a-1)^2$, kai $a\in[\sqrt{2};\infty)$. **2.322.** -4, kai $y\in(-\infty;3)$; $2y-10$, kai $y\in[3;9)$; 8, kai $y\in[9;\infty)$. **2.323.** $\frac{5}{2\sqrt{x}}$, kai $x\in(0;4)$; $\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$, kai $x\in[4;\infty)$. **2.324.** $\frac{1+x-x^2}{x+1}$, kai $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$; $\frac{x^2+x-1}{x+1}$, kai $x\in[1;\infty)$; $\frac{1-x-x^2}{x+1}$, kai $x\in(-1;0)$. **2.325.** $\frac{n+1}{n}$, kai $n\neq 0$ ir $n\neq 1$. **2.326.** $\frac{1}{\sqrt{a}}$, kai $\sqrt{2a}>5\sqrt[3]{b}$; $-\frac{1}{\sqrt{a}}$, kai $\sqrt{2a}<5\sqrt[3]{b}$. **2.327.** $\frac{x+1}{1-x}$, kai $x\in(-\infty;-1)$; $\frac{x+1}{x-1}$, kai $x\in[-1;0)$; $\frac{x-1}{x+1}$, kai $x\in[0;\infty)$. **2.328.** $\frac{2-x}{2}$, kai $x\in(-\infty;-2)$; $-\frac{x^2+2x+8}{2x}$, kai $x\in[-2;0)$; $\frac{x^2+2x+8}{2x}$, kai $x\in(0;\infty)$. **2.329.** $\frac{x}{x-1}$, kai $x\in(-\infty;-1)$; $\frac{x}{1-x}$, kai $x\in(-1;0)$; $-\frac{x}{x+1}$, kai $x\in[0;1)$; $\frac{x}{x+1}$, kai $x\in(1;\infty)$. **2.330.** $\frac{4-x^2}{x^2+4x-4}$, kai $x\in(-\infty;1)$, $x\neq-2\pm2\sqrt{2}$; $\frac{x+2}{2-x}$, kai $x\in[1;2)$; $\frac{x+2}{x-2}$, kai $x\in(2;\infty)$. **2.331.** $-x$, kai $0<x<1$; x, kai $x>1$. **2.332.** $\frac{x-1}{x}$, kai $x\in(-\infty;0)\cup[1;\infty)$; $\frac{1-x}{x}$, kai $x\in(0;1)$. **2.333.** $-\frac{z+1}{z}$, kai $z\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$; $\frac{z+1}{z}$, kai $z\in[-1;0)(1;\infty)$. **2.334.** 1, kai $a>0$, $-\sqrt[6]{a}\leqslant b<\sqrt[3]{a^3-\sqrt{a}}$. **2.335.** $\frac{1}{a}$, kai $a\in(-\infty;-1)\cup[1;\infty)$; a, kai $a\in[-1;1)$. **2.336.** $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$, kai $x\in(0;\infty)$, $y\in(0;\infty)$;

27. Užsak. Nr. 1941.

$-(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})$, kai $x\in(0;\ \infty)$, $y\in\left[-\frac{x}{2};\ 0\right)$. **2.337.** $2a$, kai $a\in(-\infty;\ 0)\cup$ $\cup(3;\ \infty)$; $-2a$, kai $a\in(0;\ 3)$. **2.338.** $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, $y\neq0$. **2.339.** $\frac{4a^2+3}{9(a^2+1)}$. **2.340.** $\frac{2}{2-a}$, kai $1\leqslant a<2$; $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, kai $2<a<\infty$. **2.341.** $-9z^3$, kai $z\in$ $\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$; $7z^3+2$, kai $z\in\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$. **2.342.** $-\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$, kai $x\in\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$; $-\frac{\sqrt{2x+1}}{2}$, kai $x\in\left(\frac{3}{2};\ \infty\right)$. **2.343.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$, kai $x>0$, $0\leqslant y<4x^2$; $-\frac{1}{\sqrt{x}}$, kai $x>0$, $y>4x^2$. **2.344.** $\frac{t-1}{3t-1}$, kai $t\in\left[\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)\cup[1;\ \infty)$; $\frac{1-t}{3t-1}$, kai $t\in\left(\frac{1}{3};\ 1\right)$. **2.345.** $-\frac{1}{x}$, kai $x\in(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(0;\ \sqrt{2})$; $\frac{1}{x}$, kai $x\in(-\sqrt{2};\ 0)\cup(\sqrt{2};\ \infty)$. **2.346.** $1-$ $-\sqrt{x}$, kai $x\in[0;\ 1)$; $\sqrt{x}-1$, kai $x\in[1;\ \infty)$. **2.347.** x, kai $x\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$; $-x$, kai $x\in\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$. **2.348.** $x^2-4x-12$, kai $-\infty<x<2$; $(x+2)^2$, kai $2<x<$ $<\infty$. **2.349.** $x^2+\sqrt{2}$. **2.350.** $\frac{9-2x}{x}$, kai $-\infty<x<0$; $\frac{2x-9}{x}$, kai $0<x<$ $<\frac{3}{2}$; $\frac{2x+3}{x}$, kai $\frac{3}{2}<x<\infty$. **2.351.** x^4. **2.352.** $-\frac{2\sqrt{x}}{3}$. **2.353.** $\frac{\sqrt{2}}{1-3a}$, kai $\frac{1}{6}\leqslant a<\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}$, kai $\frac{1}{3}<a<\infty$. **2.354.** $-\frac{(\sqrt{1-4p^2}+1)^2}{4p^2}$, kai $-\frac{1}{2}\leqslant p<0$; -1, kai $0<p<\frac{1}{2}$. **2.355.** $|\sqrt[2]{a}-\sqrt[6]{b}|$, $b>0$. **2.356.** $\frac{4x}{x-4}$, kai $4<x<8$; $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$, kai $8\leqslant x<\infty$. **2.358.** $(y-x)(z-y)(x-z)$. **2.359.** $(x-$ $-y)(z-x)(y-z)$.

3 skyrius

3.063. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha+\pi}{4}$. **3.064.** $-\sin^2\alpha$. **3.065.** $\frac{1}{8}$. **3.066.** $-\text{tg}\,\frac{\alpha}{8}$. **3.067.** $2\sin\alpha$. **3.068.** $\sin2\alpha$. **3.069.** $-\frac{1}{2}\sin8\alpha$. **3.070.** $\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{2}$. **3.071.** $\sin\alpha\times$ $\times\sin4\beta$. **3.072.** $\cos^{-3}2x$. **3.073.** $-\sin2\alpha\sin4\beta$. **3.074.** $-\cos2\alpha\cos4\beta$. **3.075.** $4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}$. **3.076.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{tg}\,\alpha$. **3.077.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. **3.078.** $2\,\text{tg}\,\alpha$. **3.079.** $\frac{\text{ctg}\,\alpha}{2}$. **3.080.** $\text{tg}\,\frac{m+n}{2}\alpha$. **3.081.** 2. **3.082.** $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$. **3.083.** $\text{ctg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}$. **3.084.** $\text{ctg}^4\alpha$. **3.085.** $0{,}5\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}$. **3.086.** $\frac{\text{tg}\,2\alpha}{2}$. **3.087.** 1. **3.088.** 1. **3.089.** 1. **3.090.** $\sin^2\alpha$. **3.091.** $\frac{\sin^2 2\alpha}{4}$. **3.092.** $-\cos\alpha$. **3.093.** $\text{ctg}^2\alpha$. **3.094.** $\text{tg}^2 2\alpha$.

3.095. $-\frac{1}{4}\sin8\alpha$. **3.096.** $\frac{2}{\sin^3 2\alpha}$. **3.097.** $\frac{2}{\cos^3\alpha}$. **3.098.** 0. **3.099.** $-\text{tg}^4\alpha$. **3.100.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\alpha$. **3.101.** $\cos4\alpha$. **3.102.** $4\cos2\alpha$. **3.103.** $\text{ctg}\,2\alpha$. **3.104.** $\cos4\alpha$. **3.105.** 2. **3.106.** $\text{ctg}\,2\alpha$. **3.107.** $\text{tg}\,4\alpha$. **3.108.** $\sin^2\alpha$. **3.109.** $\text{tg}\,2\alpha$. **3.110.** $\text{ctg}\,4\alpha$. **3.111.** $\frac{1}{2}\,\text{ctg}^4\alpha$. **3.112.** $2\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **3.113.** $2\cos\alpha$. **3.114.** $\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$. **3.115.** $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha$. **3.116.** $-16\,\text{ctg}\,2\alpha\sin^{-3}2\alpha$. **3.117.** $\text{tg}^8\alpha$. **3.118.** $4\sin(\alpha-60^\circ)\sin(\alpha+60^\circ)\sin^{-2}\alpha$. **3.119.** $4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)\cos^{-2}\alpha$. **3.120.** $4\cos2\alpha\sin^{-2}2\alpha$. **3.121.** $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$. **3.122.** $4\sin(30^\circ+\alpha)\times$ $\times\sin(30^\circ-\alpha)$. **3.123.** $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. **3.124.** $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\right.$ $\left.-\alpha\right)$. **3.125.** $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.126.** $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}{\cos3\alpha}$. **3.127.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. **3.128.** $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. **3.129.** $2\cos\alpha\times$ $\times\cos3\alpha$. **3.130.** $4\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha$. **3.131.** $\frac{2\sqrt{2}\cos2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos4\alpha}$. **3.132.** $\text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\text{ctg}\,3\alpha$. **3.133.** $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.134.** $\text{tg}\,5\alpha$. **3.135.** $2\cos\alpha\times$ $\times\sin2\alpha\sin6\alpha$. **3.136.** $2\cos2\alpha\sin6\alpha\sin10\alpha$. **3.137.** $\text{ctg}\,\frac{17\alpha}{2}$. **3.138.** $-4\sin\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\sin\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$. **3.139.** $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}$. **3.140.** $\text{tg}\,\frac{29\alpha}{2}$. **3.141.** $4\sin3\alpha\times$ $\times\cos2\alpha\cos\alpha$. **3.142.** $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$. **3.143.** $4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos2\alpha\cos\frac{17\alpha}{2}$. **3.144.** $8\cos^4 2\alpha$. **3.145.** $2\sqrt{\text{tg}\,\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. **3.146.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos2\alpha}$. **3.147.** $4\sin3\alpha\sin2\alpha\sin\alpha$. **3.153.** 2. **3.154.** 4. **3.155.** $2\sqrt{3}$. **3.156.** $\frac{7}{25}$. **3.157.** $2\sqrt{3}$. **3.158.** $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$. **3.159.** $\frac{7\sqrt{2}}{26}$. **3.160.** $\frac{65}{113}$. **3.161.** $\frac{26}{87}$. **3.162.** 0,96. **3.163.** $1-p^2$. **3.164.** $\frac{57}{5}$. **3.165.** 2. **3.166.** $-\frac{22}{9}$. **3.167.** $\pi-\text{arctg}\,\frac{2}{3}$. **3.169.** $\pi-$ $-\text{arctg}\,5$. **3.170.** $\frac{23}{32}$. **3.171.** $\frac{3\pi}{4}$. **3.172.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$. **3.174.** $-\frac{4\sqrt{6}}{23}$. **3.176.** $\alpha+$ $+\beta=\frac{\pi}{4}$. **3.177.** 2. **3.178.** 2. **3.181.** $x-y=xy$. **3.184.** $1+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}$. **3.185.** m^4- $-4m^2+2$. **3.240.** $2|\text{ctg}\,\alpha|$. **3.241.** $-0{,}5\sin2\alpha$. **3.242.** $|\sin\alpha-\sin\beta|$. **3.243.** -1. **3.244.** 1. **3.245.** $-\sqrt{3}\,\text{ctg}\,2\alpha$. **3.246.** $\text{tg}\,2\alpha$. **3.247.** 1. **3.248.** $\sin4x\cos^{-2}4x$. **3.249.** $-\cos^2 4\alpha$. **3.250.** $-2\sin^2 2\alpha$. **3.251.** $\cos(40^\circ+2\alpha)$. **3.252.** $\text{tg}^4 2\alpha$. **3.253.** $\text{tg}\,\alpha$. **3.254.** $\sin4\alpha$. **3.255.** $\cos8\alpha$. **3.256.** $-\sin4\alpha$. **3.257.** $\text{tg}^4\frac{\alpha}{2}$. **3.258.** $2\sin\left(2\alpha-\right.$

$-\frac{\pi}{6}\Big)$. **3.259.** $-\frac{1}{2}$. **3.260.** $-2\,\mathrm{ctg}^2\alpha$. **3.261.** $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$. **3.262.** $8\sqrt{3}$. **3.263.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.264.** $\mathrm{tg}\,5x$. **3.265.** $\sin 3x$. **3.266.** $\cos 3x$. **3.267.** $2|\sin^{-1}2\alpha|$. **3.268.** $\mathrm{tg}\,\alpha$. **3.269.** $\mathrm{tg}(\alpha+30°)\,\mathrm{tg}(\alpha-30°)$. **3.270.** $2\sin 2\alpha$. **3.271.** $2|\mathrm{ctg}\,4\alpha|$. **3.272.** $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.273.** $\frac{1}{4}$. **3.274.** $\sin(\alpha+\beta)$. **3.275.** a) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$; b) $-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **3.276.** $-\sin 2\alpha$. **3.277.** $\sin 4\alpha$. **3.278.** a) $-2\,\mathrm{tg}\,\alpha$; b) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **3.279.** $\cos\frac{\alpha}{2}$. **3.280.** $\mathrm{tg}^4 2\alpha$. **3.281.** $\frac{1}{8}\sin 8\alpha\sin 4\alpha$. **3.282.** 1. **3.283.** $-\sin 6\alpha$. **3.284.** 1, kai $\mathrm{ctg}\,x>0$; -1, kai $\mathrm{ctg}\,x<0$. **3.285.** $2\sin(6\alpha-60°)$. **3.286.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha-60°)$. **3.287.** $-8\cos 4\alpha$. **3.288.** $\frac{4\sqrt{2}\sin(x-45°)\sin(x-60°)\sin(x+60°)}{\cos^3 x}$. **3.289.** $\frac{8\sin(x-45°)\sin(x+45°)\sin(x-60°)\sin(x+60°)}{\cos^4 x}$. **3.290.** $-8\cos(2\alpha+60°)\cos(2\alpha-60°)$. **3.291.** $2\sin\frac{\alpha}{4}$. **3.292.** $8\cos(2\alpha+60°)\cos(2\alpha-60°)$. **3.293.** $\sin^2(\alpha-\beta)$. **3.294.** $\frac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}\,\mathrm{tg}\,2\alpha$. **3.295.** $-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **3.296.** $-2\times\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta)$. **3.297.** $-2\sin 2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta)$. **3.298.** $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.299.** $4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$. **3.300.** $-\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}$. **3.301.** $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **3.302.** $2\,\mathrm{ctg}\,4\alpha$. **3.303.** $\cos^2(\alpha-\beta)$. **3.304.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. **3.305.** $8\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **3.306.** a) $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$; b) $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **3.307.** $2\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.308.** $2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta$. **3.309.** $4\times\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.310.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15°)\cos(\alpha+15°)$. **3.311.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **3.312.** $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-4\alpha\right)$. **3.313.** $\frac{1}{2\cos 2\alpha}$. **3.314.** $\mathrm{tg}(\alpha-15°)\,\mathrm{ctg}(\alpha+15°)$. **3.315.** $4\sin 4\alpha\sin(\alpha+15°)\times\cos(\alpha-15°)$. **3.316.** $-\sin 4\alpha$. **3.317.** $\mathrm{ctg}^3\alpha$. **3.318.** $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\mathrm{tg}^2\alpha$. **3.319.** $2\sqrt{2}\sin 2\alpha\sin(4\alpha-45°)$. **3.320.** $\frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **3.321.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$. **3.322.** $\frac{4\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$. **3.323.** $\sqrt{2}\sin(45°+\alpha)$. **3.324.** $4\cos 4\alpha\times$

$\times\sin(15°-\alpha)\cos(15°+\alpha)$. **3.325.** $4\sin(30°+2\alpha)\sin(30°-2\alpha)$. **3.326.** $\cos\frac{(m+n)\alpha}{2}\times\cos\frac{(m-n)\alpha}{2}$. **3.327.** $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **3.328.** $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **3.329.** $\sin 4\alpha$. **3.330.** $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$. **3.331.** $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin 70°$. **3.355.** $\frac{3}{2}$. **3.356.** $\frac{3}{16}$. **3.357.** $\frac{1}{4}$. **3.358.** 1. **3.359.** 1. **3.360.** 0. **3.361.** 1. **3.362.** $-\frac{85}{44}$. **3.363.** $-\frac{50}{7}$. **3.364.** $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}$ ir $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{\sqrt{130}}$. **3.365.** $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{27}{7\sqrt{130}}$. **3.366.** $\frac{3n-n^3}{2}$. **3.367.** $-\frac{9}{4}$. **3.375.** $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=2$ arba $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$. **3.376.** $\frac{1-m}{1+m}$. **3.377.** $\frac{m^2-1}{2}$. **3.378.** $\frac{p+q}{p-q}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **3.379.** $\frac{1+6m^2-3m^4}{4}$. **3.380.** $\sin 2\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$; $\cos 2\alpha=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$; $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2pq}{q^2-p^2}$. **3.381.** a) $-\frac{3}{5}$; b) $\frac{4}{5}$. **3.382.** a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{3}{5}$. **3.383.** $\frac{q-p}{q+p}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **3.384.** -2. **3.386.** -1. **3.387.** $-\frac{2}{3}$. **3.388.** $\frac{1}{2}$. **3.390.** $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$. **3.392.** $\frac{1}{3}$. **3.393.** $f(\alpha)=p+2$. **3.394.** $f(\alpha)=\frac{7}{9}$. **3.410.** $\frac{3}{4}\sin 8\alpha$. **3.411.** $2\sin^3 2\alpha$. **3.412.** $-\cos^2 2x$. **3.413.** $\frac{3}{4}\sin 4\alpha$. **3.414.** $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}$. **3.415.** $8\cos 16\alpha\cos^3 2\alpha$. **3.441.** $-\frac{a}{b}$. **3.442.** $-\frac{b}{a}$. **3.443.** $\frac{-2\sqrt[4]{2}}{3}$. **3.444.** $-0{,}007$. **3.445.** $\frac{6}{25}$. **3.446.** $\frac{6}{25}$. **3.447.** $\frac{3\pi}{4}$. **3.448.** $-\frac{\pi}{4}$. **3.449.** $\frac{1-a^2}{2a}$. **3.450.** $0{,}009$. **3.451.** $\frac{1}{8}$. **3.452.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **3.453.** $\sqrt{10}-3$. **3.454.** $0{,}98$. **3.455.** $-\frac{119}{120}$. **3.456.** $\frac{1}{5}$. **3.457.** -2. **3.458.** $\frac{11}{2}$. **3.459.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **3.460.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **3.461.** $\frac{2a}{b}$. **3.462.** $-\frac{1}{2}$. **3.463.** 1) $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}=3-2\sqrt{2}$. **3.465.** $\frac{2m}{1+m^2}$. **3.466.** $\frac{3m^2+1}{4}$. **3.467.** $\frac{m(m^2+1)}{2}$. **3.468.** $2(1-m^2)$. **3.469.** $-\frac{38}{125}$. **3.475.** $2+\cos 2\alpha$. **3.476.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, kai $\alpha=\frac{\pi}{16}$. **3.477.** 2, kai $\alpha=\frac{\pi}{16}$. **3.481.** 2, kai $\alpha=\frac{\pi}{8}$. **3.482.** $\frac{1}{2}$, kai $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.484.** $-\frac{76}{125}$. **3.485.** 4, kai $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.486.** 2, kai $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.487.** $\frac{41}{125}$. **3.490.** $\frac{1}{4}$, kai $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.491.** $\frac{1}{2}$, kai $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.492.** $f(x)=\sin^2\alpha$. **3.493.** $\frac{\sin(n+1)2\alpha\cos 2n\alpha}{\sin 2\alpha}$. **3.495.** 2.

4 skyrius

4.001. 9. **4.002.** $\frac{119}{3}$. **4.003.** 21 kartą. **4.004.** 1) 2, —1, —4; 2) —10, —7, —4. **4.005.** 7; 1) 1, 6, 11; 2) 7, 10, 13. **4.006.** Per 8 h. **4.007.** 3, 4. **4.008.** 7, —14, 28, —56. **4.009.** $\frac{1}{8}$. **4.010.** 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$. **4.011.** $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1. **4.012.** 44. **4.013.** 120. **4.014.** 1, 9, 17. **4.015.** —20 100. **4.016.** 1) 7, —28, 112, —448; 2) $-11\frac{2}{3}$, $-46\frac{2}{3}$, $-186\frac{2}{3}$. $-746\frac{2}{3}$. **4.017.** 3, —6, 12, —24. **4.018.** 5. **4.019.** 1) 6, $\frac{1}{4}$; 2) —6, $-\frac{1}{4}$. **4.020.** 5, 405. **4.021.** 10; 5, 15, 25. **4.022.** 1) 3, 4; 2) 48, $\frac{1}{4}$. **4.023.** a) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{7}{9}$; b) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$. **4.024.** 9 arba 31. **4.025.** $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{4}$. **4.026.** 1, 2, 3, 4, ... **4.027.** 37,5 arba 52,5. **4.028.** 6. **4.029.** 810. **4.030.** $\frac{1}{5}$. **4.031.** 9. **4.032.** 1) 4, 5; 2) $-\frac{79}{7}$, $-\frac{37}{14}$. **4.033.** 6, 3, $\frac{3}{2}$, ... **4.034.** 3, 9, 15. **4.035.** 4, 12. **4.036.** 1) 3, 2; 2) 12, $\frac{1}{2}$. **4.038.** Taip; $n+m$. **4.039.** 14. **4.040.** 1) 1, 3, 9; 2) $\frac{1}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{49}{9}$. **4.041.** 7. **4.042.** 82 350. **4.043.** 6, $-\frac{1}{2}$. **4.044.** 1) 3, 6, 12, 18; 2) 18,75; 11,25; 6,75; 2,25. **4.045.** 5103 arba $\frac{7}{81}$. **4.046.** 1) 4, 8, 16; 2) $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$. **4.047.** 1) 8, 4, 2; 2) 2, 4, 8. **4.049.** $\frac{127}{8}$. **4.050.** 70 336. **4.051.** $2n+\frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$. **4.052.** S_1S_2. **4.055.** $\frac{S^2}{2S-1}$. **4.056.** 2. **4.061.** 7. **4.062.** 1) 12+24+48+96; 2) $\frac{9}{2}+\frac{27}{2}+\frac{81}{2}+\frac{243}{2}$. **4.063.** 7. **4.064.** 1) 3, 6, 12; 2) 27, 18, 12. **4.065.** $\frac{(a+b)S-2ab}{2S-(a+b)}S$. **4.066.** $3n$. **4.067.** $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$. **4.068.** —2. **4.069.** 931. **4.070.** 41. **4.071.** 1064. **4.072.** Mažesnis už 2. **4.073.** $25\frac{25}{27}$. **4.075.** 101. **4.077.** 2, —6, 18, —54 arba —54, 18, —6, 2. **4.078.** $x=\sqrt[d]{q}$; visada. **4.079.** $2^{n+1}(n-1)+$ $+2-0{,}5n(n+1)$. **4.080.** $3^{n+1}(n-1)+3$. **4.081.** $\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{n/2}$. **4.082.** 9. **4.084.** 0. **4.085.** 7381 kartą.

5 skyrius

5.001. a) $x=4$; b) $x=7$. **5.002.** a) $x=5$; b) $x=5$. **5.003.** a) $x=5$; b) $x=6$; $x=11$. **5.004.** a) $x=8$; b) $x=7$. **5.005.** a) $x=5$; b) $x=7$. **5.008.** 240; trečiasis dėmuo. **5.009.** $C_{10}^{8}a^2=45a^2$. **5.010.** $\frac{15}{28}<x<\frac{10}{13}$. **5.011.** 924. **5.012.** $252ab$. **5.013.** $\frac{1547}{1024}$. **5.014.** $x=4$. **5.015.** $A_{16}^{2}=240$. **5.016.** 5. **5.017.** 55 440. **5.018.** 42.

5.019. 1140. **5.020.** 968. **5.021.** 364. **5.022.** 64. **5.023.** 240. **5.024.** 124. **5.025.** 32 760. **5.026**. $\frac{25!}{20!}$. **5.027.** 3136. **5.028.** 896. **5.029.** 8!. **5.030.** $x=8$; $y=0$, 1, 2, 3, 4, 5. 6, 7. **5.031.** $x=10$. **5.032.** $x=7$. **5.033.** a) $x=5$; $y=7$; b) $x=5$; $y=3$. **5.034.** a) $x=$ $=8$; $y=3$; b) $x=7$; $y=3$. **5.035.** a) $x=7$; $y=3$; b) $x=7$; $y=3$. **5.037.** 6. **5.038.** 7290. **5.039.** $x_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_2=5\sqrt{5}$. **5.040.** 252. **5.041.** $U_3=10z^2$, $V_4=20z^2$. **5.042.** 9. **5.043.** $x=2$. **5.044.** $\frac{30!}{(10!)^3}$. **5.045.** 42. **5.046.** 9!. **5.047.** $30!-2\cdot 29!$. **5.048.** 2520. **5.049.** $\frac{12!}{(2!)^6}$. **5.050.** 204. **5.051.** $2\cdot 9!$. **5.052.** 2 027 025. **5.053.** 5^6; $6\cdot 4^5$. **5.054.** 2^{10}. **5.055.** 16^{100}. **5.056.** 40. **5.057**. $\frac{80!}{3!\cdot 75!}$. **5.058.** $\frac{10!}{48}$. **5.059.** 3^6; 6!. **5.060.** 2304. **5.061.** 15 368. **5.062**. $\frac{10\cdot 15!}{7!}$. **5.063**. $\frac{28!}{(7!)^4}$. **5.064.** 15 015. **5.065.** 3^5. **5.066.** 10^8. **5.067**. $\frac{16!}{2^6\cdot 3^2}$. **5.068.** 420. **5.069.** 1800. **5.070.** 105. **5.071.** 62. **5.072.** $9\cdot 10^6$. **5.073.** 36. **5.074.** 60. **5.077.** $(n+1)!-1$. **5.079.** 2^{36}. **5.080.** $314\,925\cdot 10^5$; devintasis dėmuo. **5.081.** $\frac{5}{8}<x<\frac{20}{21}$. **5.082.** 3003. **5.083.** $2(6!)^2$. **5.084.** 2^{200}. **5.085.** 8^6; $8^6-13\cdot 7^5$. **5.086.** $2(11!)^2$. **5.088.** $\frac{10!}{4}$. **5.089.** 35. **5.090.** $2^8\cdot 8!$.

6 skyrius

6.001. $x_1=5$, $x_2=-\frac{55}{16}$. **6.002.** $x_1=a+b$, $x_2=\frac{a+b}{2}$. **6.003.** $x_1=1$, $x_2=-5$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$. **6.004.** $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt[4]{24}}{2}$. **6.005.** $x_1=1$, $x_2=-3$. **6.006.** $x_1=\frac{m+n}{m-n}$, $x_2=\frac{m-n}{m+n}$. **6.007.** $x_{1,2}=\pm a\sqrt{b}$, $x_{3,4}=\pm b\sqrt{a}$. **6.008.** $x=0$. **6.009.** $y_1=0$, $y_{2,3}=\frac{a(-9\pm\sqrt{5})}{4}$. **6.010.** $x_1=1$, $x_2=-\sqrt[3]{6}$. **6.011.** $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\frac{\pm 3\sqrt{21}}{7}$. **6.012.** $x=-1$. **6.013.** $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$. **6.014.** $x=0$. **6.015.** $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=\frac{38}{11}$. **6.016.** $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$. **6.017.** Kai $n=p$, tai x — bet kuris skaičius išskyrus n; kai $n\neq p$, tai $x_1=m$, $x_2=-m$, $x_3=m+$ $+n+p$. **6.018.** $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. **6.019.** $x_1=1$, $x_2=3$. **6.020.** Kai $a\neq b$, tai $x_1=2b-a$, $x_2=2a-b$; kai $a=b$, šaknų nėra. **6.021.** $x_1=-\frac{1}{8}$, $x_2=-2$. **6.022.** $x_1=1$, $x_2=-5$. **6.023.** $x_1=0$, $x_{2,3}=-3\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.024.** $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$ $x_{3,4}=\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$. **6.025.** Kai $a=b$, tai x — bet kuris skaičius; kai $a\neq b$,

tai $x_1=0$, $x_2=a+b$. **6.026.** $x_1=a+1$, $x_2=\frac{a+1}{a}$. **6.027.** Kai $a\neq0$, tai $x_1=3a$, $x_2=-2a$; kai $a=0$, šaknų nėra. **6.028.** Kai $b\neq0$, tai $x_1=a+b$, $x_2=\frac{a^2-b^2}{2b}$; kai $b=0$, tai $x=a$. **6.029.** $x_1=a$, $x_2=\frac{1-a^2}{a}$. **6.030.** $x_1=-3$, $x_2=3$. **6.031.** $x=4$. **6.032.** $x=5$. **6.033.** $x=-1$. **6.034.** $x=7$. **6.035.** $x_1=a$, $x_2=\frac{4a-b}{3}$. **6.036.** $x_1=-1$, $x_2=3$. **6.037.** $x=0$. **6.038.** $x=3$. **6.039.** $x=\frac{5}{3}$. **6.040.** $x=9$. **6.041.** $x_1=-61$, $x_2=30$. **6.042.** $x_1=-5$, $x_2=2$. **6.043.** $x_1=-7$, $x_2=7$. **6.044.** $x_1=6$, $x_2=-\frac{2(\sqrt[3]{4}+1)}{5}$. **6.045.** $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$. **6.046.** $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$. **6.047.** $x_1=4$, $x_2=-4$. **6.048.** $x_1=8$, $x_2=27$. **6.049.** $x=2$. **6.050.** $x_1=3$, $x_2=5$. **6.051.** $x_1=8$, $x_2=7$. **6.052.** $x=4$. **6.053.** $x=8$. **6.054.** $x=64$. **6.055.** $x=1024$. **6.056.** $x_1=-4$, $x_2=4$. **6.057.** $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$. **6.058.** $x=1$. **6.059.** $z_1=2$, $z_2=-\frac{1}{511}$. **6.060.** $x_1=4$, $x_2=-3$. **6.061.** $x=64$. **6.062.** $x_{1,2}=\pm1$. **6.063.** $x=64$. **6.064.** $x=-1$. **6.065.** $x=2$. **6.066.** $x_1=6$, $x_2=-2$. **6.067.** (0,6; 0,3), (0,4; 0,5). **6.068.** (−1; 2), (2; −1). **6.069.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **6.070.** (2; 3), (3; 2). **6.071.** (2; 1), (−1; −2). **6.072.** (4; 3), (4; −3). **6.073.** (7; 3), (−7; −3). **6.074.** (4; 1), $\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$. **6.075.** (1; 2), (2; 1). **6.076.** (1; 2). **6.077.** (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1). **6.078.** (2; 3), (3; 2). **6.079.** (1; 2), (2; 1). **6.080.** (3; 2), (−3; −2). **6.081.** (4; 1), (1; 4). **6.082.** (2; 1), (2; −1), (1; $\sqrt{2}$), (1; $-\sqrt{2}$). **6.083.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{24};-\frac{7}{24}\right)$, $\left(-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right)$. **6.084.** (2; 6), (1; 3). **6.085.** (2; 4), (4; 2). **6.086.** (4; 1), (1; 4). **6.087.** (2; 1), (−2; −1). **6.088.** (3; 2), (−3; −2). **6.089.** $(\sqrt[3]{m}; -1)$, $(-1; \sqrt[3]{m})$. **6.090.** Kai $ab=0$, šaknų nėra; kai $ab\neq0$, tai $x=\frac{1}{a}$, $y=b$. **6.091.** (5; 3). **6.092.** (−4; −4), (−6; −2). **6.093.** (2; 3; 4). **6.094.** (5; 1), (−5; −1). **6.095.** (1; 2; 3). **6.096.** $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. **6.097.** (2; −1; 1). **6.098.** (2; −1), (−1; 2). **6.099.** (9; 1), (1; 9). **6.100.** (41; 40). **6.101.** (12; 4), (34; −30). **6.102.** (3; 1). **6.103.** (1; 4). **6.104.** (1; 64), (64; 1). **6.105.** (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1). **6.106.** (4; 1), (1; 4), $(2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$. **6.107.** (1; 9), (9; 1). **6.108.** (5; 4). **6.109.** (1; 27), (27; 1). **6.110.** (41; 40). **6.111.** (4; 1), (1; 4). **6.112.** (1; 81), (81; 1). **6.113.** Kai $a\neq0$, tai $x_1=0$, $y_1=a$; $x_2=2-a$, $y_2=2$; kai $a=0$, tai $x=y=2$. **6.114.** (4; 1), (1; 4). **6.115.** (1; 8), (8; 1). **6.116.** (16; 1). **6.117.** $(9a^2; a^2)$. **6.118.** (124; 76). **6.119.** (4; 1). **6.120.** $\frac{b^2-2ac}{c^2}$. **6.121.** $cx^2+bx+a=0$. **6.122.** $a^2x^2+(ab-ac)x-bc=0$. **6.123.** $ax^2+(b-2a)x+(c-b+a)=0$. **6.124.** $p=q=0$; $p=1$, $q=-2$. **6.125.** $A_1=1$, $B_1=-2$; $A_2=0$, $B_2=0$. **6.126.** $k=2$. **6.127.** $p=3$; $x=1$.

6.128. $a=1$ ir $a=\frac{1}{2}$. **6.129.** $a=-6$. **6.130.** $c=-15$. **6.131.** $a=4$. **6.132.** $p_1=-6$, $p_2=6$. **6.133.** $\frac{215}{27}$. **6.134.** $b=2$. **6.135.** $c=\frac{1}{3}$. **6.136.** $x=1$. **6.137.** $x_1=1$, $x_{2,3}=-2\pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **6.138.** $x_1=x_2=3$, $x_{3,4}=3\pm2\sqrt{5}$. **6.139.** $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$. **6.140.** $z_1=0$, $z_2=1$. **6.141.** $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{66}}{2}$. **6.142.** $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$. **6.143.** $x_1=1$, $x_2=-3$. **6.144.** $x_1=2$, $x_2=-4$. **6.145.** $x=1$. **6.146.** $x=0$. **6.147.** $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$. **6.148.** $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$. **6.149.** $x_{1,2}=-1$. **6.150.** $u_1=1$, $u_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$. **6.151.** Kai $m=1$, tai x — bet kuris skaičius išskyrus ±1, ±2; kai $m\neq1$, šaknų nėra. **6.152.** Šaknų nėra. **6.153.** Kai $a=0$, tai x — bet kuris skaičius; kai $a\neq0$, tai $x_{1,2}=\pm a$. **6.154.** $x_1=0$, $x_2=-2$. **6.155.** Kai $a=0$, tai $x=0$; kai $a\neq0$, tai $x_1=\frac{1}{a}$, $x_2=-\sqrt[3]{a}$. **6.156.** $x_1=3$, $x_2=\frac{2}{3}$. **6.157.** $x_1=2a-1$, $x_2=2-a$. **6.158.** $x=0$. **6.159.** $x=2$. **6.160.** $x=12$. **6.161.** $x_1=1$, $x_2=4$. **6.162.** $x_1=\frac{b+128}{a}$, $x_2=\frac{128b+1}{128a}$. **6.163.** $x_1=0$, $x_2=4$. **6.164.** $x=2$. **6.165.** $x_1=0$, $x_2=-5$. **6.166.** $x_1=2$, $x_2=-7$. **6.167.** $x_1=0$, $x_2=-1$. **6.168.** $x_1=1$, $x_2=-\frac{1}{3}$. **6.169.** $x=1$. **6.170.** $x=5$. **6.171.** $x_1=8$, $x_{2,3}=8\pm\frac{12\sqrt{21}}{7}$. **6.172.** $x_1=1$, $x_2=-1$. **6.173.** $x=0$. **6.174.** $z=-\frac{4}{3}$. **6.175.** $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_3=2$. **6.176.** $x=0$. **6.177.** $x=1$. **6.178.** $x_1=\frac{4b-a}{3}$, $x_2=\frac{4a-b}{3}$; kai $a=b$, šaknų nėra. **6.179.** $x\in[0;1]$. **6.180.** 10; −20,5. **6.181.** $x=-(a+1)$. **6.182.** −1; 2. **6.183.** (2; 3), (3; 2), $\left(\frac{-7+\sqrt{73}}{2}; -\frac{7+\sqrt{73}}{2}\right)$, $\left(-\frac{7+\sqrt{73}}{2}; \frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)$. **6.184.** (2; 1), (−2; −1). **6.185.** (3; 2), (−3; −2), $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. **6.186.** $x=\frac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}$, $y=\frac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}$, $z=\frac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$. **6.187.** (4; 1), (1; 4). **6.188.** $x=abc$, $y=ab+bc+ca$, $z=a+b+c$. **6.189.** (2; 1), (−1; −2). **6.190.** $x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{abc}}{b}$, $y_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{abc}}{c}$, $z_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{abc}}{a}$. **6.191.** (2; 2), (−3; −3), $\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$. **6.192.** (3; 1), (3; −1), $\left(-\frac{5}{3}; \frac{\sqrt{65}}{3}\right)$,

$\left(-\frac{5}{3}; -\frac{\sqrt{65}}{3}\right)$. **6.193.** (1; 1; 1), (−2; −2; −2). **6.194.** (5; 3), (−5; −3). **6.195.** (1; 2), $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. **6.196.** (3; 5), (5; 3). **6.197.** (±2; ±2). **6.198.** Kai $ab+1=0$, tai $y=\pm\sqrt{x^2+1}$, x — bet kuris skaičius; kai $ab+1\neq0$, tai $x_1=\frac{a+b}{2}$, $y_1=\frac{a-b}{2}$; $x_2=\frac{a+b}{2ab}$, $y_2=\frac{a-b}{2ab}$. **6.199.** (3; 0; 5). **6.200.** (3; 2), (1; 4), (−3; −4), (−5; −2). **6.201.** (2; −3). **6.202.** (1; 1; 1). **6.203.** (0; 0; 0), $(a-b; b-c; c-a)$. **6.204.** (2; 1), (6; −3), $(6+2\sqrt{3}; -2-2\sqrt{3})$, $(6-2\sqrt{3}; -2+2\sqrt{3})$. **6.205.** (3; 1), (−3; −1), $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$. **6.206.** (3; 1), (1; 3). **6.207.** (1; 2; 3), (1; 4; 1), (5; 2; −1), (5; 4; −3). **6.208.** $(a; 2a)$, $(2a; a)$. **6.209.** (3; −2), (−2; 3). **6.210.** (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (2; −1), (−1; 2), (−2; −1), (−1; −2). **6.211.** (2; 3), (−2; −3). **6.212.** (1; 3; 5), (−1; −3; −5). **6.213.** (2; 1), (−2; −1), (2; −1), (−2; 1), (1; 2), (−1; −2), (1; −2), (−1; 2). **6.214.** (0; 0; 0), (2; −1; −1). **6.215.** (2; −5). **6.216.** (4; 4), (−5; −5), $\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2}; \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{77}}{2}; \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$. **6.217.** (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1). **6.218.** $(a; 2a)$, $(2a; a)$. **6.219.** (1; 1; 1), (7; −3; −1). **7.220.** (4; 2), (−4; −2). **6.221.** (3; −2; 1), (−1; 0; 3). **6.222.** (11; 1). **6.223.** (2; −2). **6.224.** (3; −2; 6). **6.225.** (16; 1), (1; 16). **6.226.** (1; 1). **6.227.** (−4; 5; 3). **6.228.** (4; 9), (9; 4). **6.229.** (49; 49). **6.230.** (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. **6.231.** (5; 4), (−9; 25). **6.232.** (5; 4). **6.233.** (2; −1). **6.234.** (64; 1), (1; 64). **6.235.** (1; 7), $\left(\frac{49}{64}, \frac{41}{8}\right)$, (7; −8). **6.236.** $(\sqrt{10}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$. **6.237.** (4; 1), $\left(\frac{121}{64}; \frac{169}{64}\right)$. **6.238.** (1; 2), (−1; −2). **6.239.** $\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$, (−1; −1), (1; 1), $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$. **6.240.** (4; 1), (1; 4), (−4; −1), (−1; −4). **6.241.** (5; 4), $(-\sqrt{28{,}5}; -\sqrt{12{,}5})$, $(-\sqrt{28{,}5}; \sqrt{12{,}5})$. **6.242.** $\left(3; \frac{3}{2}\right)$, (6; 3). **6.243.** (10; 1), $\left(-\frac{21}{2}; \frac{53}{12}\right)$. **6.244.** $x_1=0$; $x_2=-10$. **6.245.** (0; 0), (1; −1), $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. **6.246.** $ax^2+bx+(c+\sqrt{b^2-4ac}-a)=0$. **6.247.** $m=3$ ir $m=-2$; su šiomis m reikšmėmis bus $z_1=-1$, $z_2=-3$, $z_3=4$. **6.250.** $a=-2$. **6.251.** $p>2$; $x_1=p+2$, $x_2=\frac{2-p}{5}$. **6.252.** $p=1$, $q=-6$ ir $p=-1$, $q=-6$. **6.253.** $x^2+(4q-2p^2)x+(p^4-4p^2q)=0$. **6.254.** $21x^2-23x+6=0$. **6.256.** $x_1=-3$, $x_2=-5$. **6.257.** $u_1=1$, $u_2=a+b$, $u_3=a-b$. **6.258.** $x_1=1$, $x_2=a$, $x_3=1-a$. **6.259.** $x_1=-1$, $x_2=a$, $x_3=2a$. **6.260.** $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-2$. **6.261.** $x_1=1$, $x_2=a+\sqrt{a}$, $x_3=a-\sqrt{a}$. **6.262.** $x=1$. **6.263.** $x_1=4$, $x_2=2$. **6.264.** $x_1=-1$, $x_2=2$. **6.265.** $x_1=1$, $x_{2,3}=a\pm\sqrt{m}$. **6.266.** $x_1=a$, $x_{2,3}=$

$=a\pm\sqrt{b}$. **6.267.** $x_1=-3$, $x_2=p+1$, $x_3=-p+2$. **6.268.** $z_1=1$, $z_{2,3}=p\pm\sqrt{q}$. **6.269.** $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=x_3=a-\sqrt{3}$. **6.270.** $x=-\frac{1}{2}$. **6.271.** $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$, $x_4=-\frac{1}{2}$. **6.272.** $x_1=x_2=\frac{2}{3}$; $x_3=-\frac{5}{3}$. **6.273.** $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$; $x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$. **6.274.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$. **6.275.** $x=0$. **6.276.** $x_1=1$, $x_2=4$. **6.277.** $x=1$. **6.278.** $x=3$. **6.279.** $x=8$. **6.280.** $x=0$. **6.281.** $x_1=-6$, $x_2=-5{,}5$ ir $x_3=-5$. **6.282.** $u=2$. **6.283.** $x=32$. **6.284.** $x_1=\frac{63}{5}$, $x_2=-\frac{17}{5}$. **6.285.** $x_1=0$, $x_2=1$. **6.286.** $x=1$. **6.287.** $x=64$. **6.288.** $x=5$. **6.289.** $x_1=1$, $x_2=2\sqrt[3]{4}$, $x_3=-3\sqrt[3]{9}$. **6.290.** $x=5$. **6.291.** $x=4$. **6.292.** $x_1=-1$, $x_2=1$. **6.293.** $x=1$. **6.294.** $x_1=1$, $x_2=-6$. **6.295.** $x_1=1$, $x_2=-1$. **6.296.** $x_1=7$, $x_2=26$. **6.297.** $x=31$. **6.298.** $x_1=7$, $x_2=14$, $x_{3,4}=\frac{21}{2}\pm\frac{7\sqrt{141}}{12}$. **6.299.** $x=79$. **6.300.** $x=3$. **6.301.** $x_1=\frac{190}{63}$, $x_2=\frac{2185}{728}$. **6.302.** $x=2$. **6.303.** (3; −1), (1; −3). **6.304.** $(a; b; c)$. **6.305.** $x=2$, $u=1$, $v=2$, $w=3$. **6.306.** (0; 0; 0), (−1; 1; 1). **6.307.** (1; 1; 1). **6.308.** (1; 2; 3), (−1; −2; −3). **6.309.** (1; −1; 2), (1; 2; −1), (−1; 1; 2), (−1; 2; 1), (2; 1; −1), (2; −1; 1). **6.310.** (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **6.311.** (2; −1), (−1; 2), (−2; 1), (1; −2). **6.312.** (1; −2; 3), (1; −3; 2), (2; −1; 3), (2; −3; 1), (3; −1; 2), (3; −2; 1). **6.313.** (2; 1), $\left(\frac{19\sqrt[3]{4}}{4}; -\frac{17\sqrt[3]{4}}{4}\right)$. **6.314.** (2; 2; 2). **6.315.** (1; 1). **6.316.** $(a+1; a; a-1)$, $(-a-1; -a; -a+1)$. **6.317.** (3; −2; 2), $\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}; -\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; \frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}; \frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)$. **6.318.** (3; 1), (1; 3), (−1; −3), (−3; −1). **6.319.** (−2; 3), (3; −2). **6.320.** (1; 2), (2; 1). **6.321.** (2; 1), (−2; −1). **6.322.** (2; 1). **6.323.** (1; 2). **6.324.** (6; 9), (9; 6). **6.325.** (4; 4; −4). **6.326.** (0; 0), (−1; −2), (−2; −1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **6.327.** Šaknų nėra. **6.328.** (0; 0), (2; 4), (4; 2). **6.329.** (1; 64), (64; 1). **6.330.** Kai $a\neq b$, tai $x_1=\frac{1}{3}$, $y_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{4}{3}$, $y_2=-\frac{4}{3}$; kai $a=b\neq0$, tai sistema turi be galo daug sprendinių, kurie išreiškia dviejų tiesių $x-4y=-1$ ir $4x-y=-4$ taškų koordinates. **6.331.** $\left(\frac{17}{12}; \frac{5}{3}\right)$. **6.332.** (1; 1; 1). **6.333.** (2; 3), (−2; −3), (2; −3), (−2; 3). **6.334.** (0; 0). **6.335.** (26; 10), (650; −646). **6.336.** $\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)$. **6.337.** (5; 4; 5). **6.338.** (4; 4), (4,5; 3,5). **6.339.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

6.340. (5; 3), (5; 4). 6.341. $\left(\frac{8\sqrt{26}}{13}; \frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$, $\left(-\frac{8\sqrt{26}}{13}; -\frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$, $\left(-\frac{8\sqrt{26}}{13}; \frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$, $\left(\frac{8\sqrt{26}}{13}; -\frac{27\sqrt{26}}{13}\right)$. 6.342. $S_{n+2}=-\frac{bS_{n+1}+cS_n}{a}$. 6.343. 1) $x^3-qx+prx-r^2=0$; 2) $x=\sqrt{2}$. 6.344. $a=-52$, $b=-40$. 6.345. $p=-60$, $q=36$. 6.346. ab. 6.348. $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=\frac{1}{2}$. 6.349. $x_1=\frac{1}{2}$. 6.350. $x^3-(p^2-q)x^2+(p^2q-q^2)x-q^3=0$. 6.351. $x_1=10$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$ ir $x=5$. 6.352. $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\pm4$ ir $x=-2$. 6.353. $x=1+\lambda^{-1}$; čia λ — realusis skaičius; $\lambda\neq0$. 6.354. $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{5}{2}$. 6.355. $n=17$. 6.356. $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=2-\sqrt{3}$. 6.357. $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_3=-2\sqrt{3}$. 6.358. $x=5$ ir $x_1=10$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. 6.359. $x_1=-\frac{b}{a}$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{-\frac{d}{b}}$, kai $bd<0$. 6.361. $x=-q$. 6.363. $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$. 6.364. $x_1=1{,}5$, $x_2=0{,}5+\sqrt{3}$, $x_3=0{,}5-\sqrt{3}$. 6.365. $x=1$. 6.366. $x^4-10x^2+1=0$. 6.368. $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$. 6.369. $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=\frac{1}{2}$. 6.370. $x=2$.

7 skyrius

7.001. 10. 7.002. 890. 7.003. 3. 7.004. 2. 7.005. −11. 7.006. 24. 7.007. 19. 7.008. 1. 7.009. 8. 7.010. a^2+a+1. 7.011. $\log_a\sqrt{a^2-1}$. 7.012. $ab(a-b)^2$. 7.013. $1+a$. 7.014. $\log_a b$. 7.015. $\log_a b$. 7.016. $\frac{1}{b}$. 7.018. 5. 7.019. $z\geqslant2$. 7.020. $\frac{1}{2}$. 7.021. 2. 7.022. 3; 81. 7.023. $-\frac{5}{4}$. 7.024. 1,5; 10. 7.025. −2. 7.026. 13. 7.027. $\frac{1}{2}$. 7.028. 0. 7.029. 5. 7.030. −1; 5. 7.031. 3. 7.032. 1. 7.033. 0,01; 0,1; 10; 100. 7.034. 3. 7.035. 1. 7.036. −3; 3. 7.037. −1; 1. 7.038. 5; 15. 7.039. 7. 7.040. −3; 3. 7.041. 2; 11. 7.042. 1. 7.043. 2; 6. 7.044. $\frac{1}{9}$; 3. 7.045. 37. 7.046. $4-\sqrt{11}$. 7.047. 3. 7.048. 54. 7.049. 2; 3. 7.050. 6. 7.051. 29. 7.052. $\frac{1}{128}$; 2. 7.053. 10. 7.054. 64. 7.055. 2. 7.056. 100. 7.057. −3. 7.058. 5,5. 7.059. 81. 7.060. −0,2; 3. 7.061. 25. 7.062. $\frac{5}{3}$. 7.063. 1; 2. 7.064. −2,5; 3. 7.065. $\frac{9}{4}$. 7.066. 4. 7.067. −7; 8. 7.068. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. 7.069. 2. 7.070. 1; 3. 7.071. 0. 7.072. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 7.073. $-\sqrt{2}$; −1; 1; $\sqrt{2}$. 7.074. 3. 7.075. 20. 7.076. 9. 7.077. −1; 9. 7.078. $3\log_6 2$; 3. 7.079. $\frac{1}{27}$; 9. 7.080. 10. 7.081. 5; 25.

7.082. 10^{-5}; 10^3. 7.083. 2; 64. 7.084. 3. 7.085. −1; 1. 7.086. $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 100. 7.087. −3; 1. 7.088. $\sqrt[3]{2}$. 7.089. 0; 2. 7.090. 1; 100. 7.091. 1. 7.092. 3; $3+\sqrt{12}$. 7.093. $\frac{1}{9}$; 9. 7.094. 5. 7.095. $\sqrt[9]{a}$; a^9; čia $a>0$; $a\neq1$. 7.096. −1; 7. 7.097. 0; 6. 7.098. 5. 7.099. 0. 7.100. 1; 2. 7.101. 10. 7.102. $5-\sqrt{11}$. 7.103. 10. 7.104. 5. 7.105. 5. 7.106. $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{2}$. 7.107. $\sqrt[3]{2}$; 4. 7.108. $\frac{17}{4}$; $\frac{33}{8}$; 8; 12. 7.109. 1. 7.110. 0. 7.111. 9. 7.112. 10. 7.113. 0,1; 1000. 7.114. −10. 7.115. $10^{-9/2}$; 10. 7.116. 2; 8. 7.117. 9. 7.118. 7. 7.119. 2. 7.120. 3; 10. 7.121. 2. 7.122. 0; 25. 7.123. 7; 8. 7.124. 2; 4. 7.125. 3; 27^3. 7.126. $\sqrt{3}$. 7.127. −2. 7.128. (5; 5). 7.129. (4,5; 0,5). 7.130. (4; 2), (4; −2). 7.131. (2; 18), (18; 2). 7.132. (1; 2), (16; −28). 7.133. (9; 3), (3; 9). 7.134. (3; 2). 7.135. (6; 8), (8; 6). 7.136. (25; 36). 7.137. (4; 2). 7.138. (5; 1), (5; −1). 7.139. (3; −3). 7.140. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. 7.141. (4; 2). 7.142. (4; 16). 7.143. (3; 3), (5; 1). 7.144. (1; 1). 7.145. (16; 3), $\left(\frac{1}{64}; -2\right)$. 7.146. (3; 27). 7.147. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. 7.148. (9; 16). 7.149. (5; 1). 7.150. $a+b$. 7.151. 0, kai $\begin{cases}0<a<1,\\0<b<1\end{cases}$ arba $\begin{cases}a>1,\\b>1,\end{cases}$ ir $-2(\log_b a+\log_a b)$, kai $\begin{cases}a>1,\\0<b<1\end{cases}$ arba $\begin{cases}0<a<1,\\b>1.\end{cases}$ 7.152. $(\log_2 x+1)^3$. 7.153. $x+1$; čia $x>0$, $x\neq1$. 7.154. $\log_a b$. 7.155. $3-2\log_a b$, kai $0<b<a^3$, ir −3, kai $b>a^3>0$. 7.156. $\frac{1}{\log_a b-1}$. 7.157. $\frac{1}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1}}$. 7.158. $\alpha=10^{1/(1-\lg\gamma)}$. 7.160. 0. 7.161. $\frac{3(1-a)}{b+1}$. 7.163. $a(b+3)$. 7.165. $-\frac{1}{2}$. 7.166. 25. 7.167. $\frac{1}{25}$. 7.168. $\frac{1}{12}$. 7.169. $\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 7.170. 0; $\frac{16}{9}$. 7.171. 1; $\frac{1}{16}$. 7.172. −64; −1. 7.173. −100. 7.174. $\frac{1}{9}$; 9. 7.175. −1; 3. 7.176. 5. 7.177. 0. 7.178. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. 7.179. 2. 7.180. $\frac{1}{10}$; $10^{(1\pm\sqrt{3})/2}$. 7.181. $\frac{1}{3}$; 9. 7.182. a; čia $a>0$, $a\neq1$. 7.183. 0,75. 7.184. a^6; čia $a>0$, $a\neq1$. 7.185. $\sqrt[5]{7}$; 7. 7.186. 3. 7.187. 2. 7.188. $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{5}$; 25. 7.189. m; čia $m>0$, $m\neq1$. 7.190. $\frac{16}{3}$. 7.191. $\sqrt[10]{10}$. 7.192. $\frac{1}{8}$; 8. 7.193. $\sqrt{3}$. 7.194. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 8. 7.195. $\frac{1}{625}$; 5. 7.196. $\sqrt{3}$. 7.197. 9. 7.198. 25. 7.199. −5; 5. 7.200. 6. 7.201. 17. 7.202. $\sqrt{3}$; 3. 7.203. $\frac{1}{4\sqrt[5]{8}}$; 1; 4. 7.204. 2; 3; 4; 11. 7.205. $\frac{1}{3}$; 2; 4. 7.206. $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 1; 3. 7.207. a; čia $a>0$, $a\neq1$. 7.208. 4. 7.209. 3. 7.210. 1; 3. 7.211. $\frac{1}{3}$. 7.212. 4. 7.213. $\frac{1}{9}$; 9. 7.214. 0. 7.215. 2,5. 7.216. 0; 1; 2.

7.217. -2; 2. **7.218.** 2. **7.219.** 1. **7.220.** -2. **7.221.** 0,01. **7.222.** 0; $\frac{1}{2}$. **7.223.** $\frac{1}{3}$. **7.224.** 1; $\log_2(3+\sqrt{29})-1$. **7.225.** 2. **7.226.** $\frac{1}{3}$; 3. **7.227.** 5. **7.228.** 100. **7.229.** 0. **7.230.** 1. **7.231.** 16. **7.232.** $0{,}5\sqrt[3]{4}$; 4. **7.233.** $\frac{1}{a}$; $\sqrt{a}$; a^2. **7.234.** 0,1; $\sqrt{10}$; 100. **7.235.** 1. **7.236.** -1000. **7.237.** $-\frac{1}{2}$. **7.238.** $-2\sqrt[3]{2}$. **7.239.** 256. **7.240.** 1,1; 11. **7.241.** 1. **7.242.** 0. **7.243.** 3. **7.244.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **7.245.** 3. **7.246.** 2. **7.247.** 5. **7.248.** 8; 9. **7.249.** $2+\log_4\frac{a-27}{3-a}$; čia $3<a<27$. **7.250.** a^6; čia $a>0$, $a\neq1$. **7.251.** 0,001; 1; 10. **7.252.** 1. **7.253.** $x=4-a^2$, kai $0<a<1$ ir $1<a<2\sqrt{2}$. **7.254.** 0. **7.255.** 4. **7.256.** $4\log_3 2$. **7.257.** 1023. **7.258.** $\frac{2a-1}{a+3}$, kai $a\neq-2$, $a\neq-3$ ir $a\neq\frac{1}{2}$; kai $a=-2$, $a=-3$ ir $a=\frac{1}{2}$, šaknų nėra. **7.259.** (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3};\ \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$. **7.260.** (2; 2). **7.261.** (2; 4). **7.262.** (6; 2). **7.263.** (2; 1). **7.264.** (10; 1,5), (0,2; 75), (15; 1). **7.265.** (2; 4). **7.266.** $(\sqrt{3};\ 1)$, $(-\sqrt{3};\ 1)$. **7.267.** (27; 4), $\left(\frac{1}{81};\ -3\right)$. **7.268.** (1; 9), (16; 1). **7.269.** $(-2;\ 7)$. **7.270.** (8; 4). **7.271.** (5; 2). **7.272.** (16; 20). **7.273.** (1; 0). (2; 1). **7.274.** $(9a;\ 2a)$, $(a;\ 18a)$; čia $a>0$, $a\neq1$. **7.275.** (4; 1). **7.276.** (4; 1), $(-4;\ -1)$. **7.277.** $(\sqrt{2};\ 2)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2};\ -3\right)$. **7.278.** (6; 6). **7.279.** (3; 5), (6; 2), (1; 7). **7.280.** (2; 4), $(4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2})$. **7.281.** (3; 9). **7.282.** (6; 2). **7.283.** (5; 5). **7.284.** (3; 9), (9; 3). **7.285.** (5; 3), $(1;\ -1)$. **7.286.** $(-10;\ 20)$, $\left(\frac{10}{3};\ \frac{20}{3}\right)$. **7.287.** (1; 4). **7.288.** (8; 9), $(27\log_5^3 2;\ \log_2^2 5)$. **7.289.** (4; 2), $(-4;\ 2)$. **7.290.** $\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$. **7.291.** (2; 3). **7.292.** (1; 3). **7.293.** $\left(\frac{2}{9};\ \frac{1}{9}\right)$. **7.294.** (6; 2). **7.295.** $\lg b$; čia $b>1$. **7.296.** 2, kai $1<a\leqslant b$, ir $2\log_a b$, kai $1<b<a$. **7.297.** $\log_n^2 p$; čia $\begin{cases} n>1, \\ p>1 \end{cases}$ arba $\begin{cases} 0<n<1, \\ 0<p<1. \end{cases}$ **7.298.** -2, kai $1<a\leqslant b$, ir $-2\log_a b$, kai $1<b<a$. **7.299.** $1-\log_a(a-b)$, kai $\begin{cases} 0<a<1, \\ b<0 \end{cases}$ arba $\begin{cases} a>1, \\ 0<b<a, \end{cases}$ ir $\log_a(a-b)-1$, kai $0<b<a<1$ arba $\begin{cases} a>1, \\ b<0. \end{cases}$ **7.300.** $\log_{135}675>\log_{45}75$. **7.301.** $x=\log_{0,4}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $0<x<1$. **7.303.** $\log_n A\times\log_m A\log_p A\log_A(mnp)$. **7.305.** $\log_a b-\log_b a$. **7.306.** Su $p=1$ ir $p\in\left[-\frac{1}{2};\ -\frac{3}{22}\right]$. **7.307.** Su $a=12$ ir $a\in(-\infty;\ 0)$. **7.308.** 3. **7.309.** 1; 4. **7.310.** 3. **7.311.** $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$. **7.312.** 64. **7.313.** 3. **7.314.** 7. **7.315.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; čia $n\in Z$.

7.316. $1-\sqrt{1-0{,}5\lg p}$; $1+\sqrt{1-0{,}5\lg p}$; čia $1<p\leqslant100$. **7.317.** 4. **7.318.** $\sqrt[k]{k}$; čia $k\geqslant2$. **7.319.** b^2+1; čia $b>0$, $b\neq1$. **7.320.** $\frac{1}{3}$; 3. **7.321.** 0,1; 2; 1000. **7.322.** 2, kai $a\neq1$, ir (0; 6), kai $a=1$. **7.323.** 2, kai $p\neq1$, ir $(-2;\ \infty)$, kai $p=1$. **7.324.** -1; 1; 2. **7.325.** 1; 3. **7.326.** -1; 2; 4. **7.327.** 4. **7.328.** 100. **7.329.** 1; $\frac{17}{12}$; $\frac{11}{6}$. **7.330.** $1-\sqrt{2}$; 1; $1+\sqrt{2}$. **7.331.** $\frac{1}{3}$; 9. **7.332.** $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$; $\frac{9-\sqrt{29}}{2}$. **7.333.** 16. **7.334.** $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. **7.335.** $\left(a^{\frac{q^2}{p(q-p)}};\ a^{\frac{q}{q-p}}\right)$. **7.336.** $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right)$. **7.337.** $\left(-a^3;\ -\frac{1}{a}\right)$, $\left(-\frac{1}{a};\ -a^3\right)$. **7.338.** (8; 2), $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{8}\right)$. **7.339.** (0; 0), $(8;\ -8)$, $\left(3;\ \frac{1}{3}\right)$, $(-4;\ -2)$. **7.340.** (3; 9), $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right)$.

8 skyrius

(Jeigu nėra kitų nurodymų, laikoma, kad k, l, m ir n įgyja bet kurias sveikąsias reikšmes)

8.001. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k+1)$. **8.002.** $x=(-1)^{k-1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.003.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.004.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.005.** $z=(-1)^k10^\circ+60^\circ\cdot k$. **8.006.** $t=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.007.** $t_1=\pi k$, $t_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.008.** $t_1=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, $t_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{3}$. **8.009.** $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.010.** $z=\pm40^\circ+120^\circ\cdot k$. **8.011.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.012.** $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.013.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.014.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.015.** $z_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.016.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.017.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(8k\pm3)$. **8.018.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.019.** $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$. **8.020.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.021.** $x=\frac{\pi}{4}\times(2k+1)$. **8.022.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$. **8.023.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi k}{5}$, $x_3=\frac{\pi}{11}(2k+1)$. **8.024.** $x=\frac{\pi k}{3}$. **8.025.** $x=15^\circ+360^\circ\cdot k$. **8.026.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.027.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi k}{7}$. **8.028.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.029.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.030.** $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.031.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$. **8.032.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=$

$=\frac{2\pi k}{11}$. **8.033.** $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.034.** $x=\frac{\pi k}{8}$. **8.035.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.036.** $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.037.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{12}\times(6k\pm1)$. **8.038.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.039.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\operatorname{arcctg}5+\pi k$. **8.040.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$. **8.041.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.042.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.043.** $z_1=35°+120°\cdot k$, $z_2=55°+120°\cdot k$. **8.044.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7}$. **8.045.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.046.** $z_1=\pi k$, $z_2=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. **8.047.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$. **8.048.** $x=\frac{\pi k}{4}$. **8.049.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.050.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **8.051.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.052.** $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.053.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.054.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+3)$. **8.055.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.056.** $t_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{3}(2k+1)$. **8.057.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.058.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{20}(4k+3)$. **8.059.** $x_1=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{3}$. **8.060.** $x=\frac{\pi k}{5}$. **8.061.** $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.062.** $x=\pi(2k+1)$. **8.063.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$. **8.064.** $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.065.** $z_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{20}(8k+3)$. **8.066.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.067.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. **8.068.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.069.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.070.** $z_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$, $z_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2\pi k}{5}$. **8.071.** $z_1=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{2\pi k}{3}$, $z_2=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.072.** $x=\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k$. **8.073.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.074.** $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi k$. **8.075.** $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **8.076.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. **8.077.** $z_1=2\operatorname{arcctg}3+2\pi k$, $z_2=-2\operatorname{arctg}7+2\pi k$. **8.078.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.079.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.080.** $x_1=\pi k$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.081.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\pi k$. **8.082.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{10}(4k+1)$. **8.083.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi k$.

8.084. $x_1=\frac{\pi}{12}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **8.085.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.086.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.087.** $x_1=\frac{\pi}{4}\times(4k+1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **8.088.** $t=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.089.** $t_1=-31°+180°\cdot k$, $t_2=89°+180°\cdot k$. **8.090.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.091.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2=\pi k$. **8.092.** $x_1=100°+360°\cdot k$, $x_2=-20°+360°\cdot k$. **8.093.** $t_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $t_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **8.094.** $x=\pi(4k+1)$. **8.095.** $x=\frac{\pi k}{6}$. **8.096.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. **8.097.** $z_1=2\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.098.** $z_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $z_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.099.** $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.100.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.101.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(8k\pm3)$. **8.102.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.103.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.104.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.105.** $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.106.** $x=\pm40°+120°\cdot k$. **8.107.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+2\pi k$. **8.108.** $z=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.109.** $x=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.110.** $x=\frac{\pi k}{10}$. **8.111.** $x_1=75°+180°\cdot k$, $x_2=45°\cdot k-3°45'$. **8.112.** $x_1=\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.113.** $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.114.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.115.** $z=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.116.** $x_1=135°+360°\cdot k$, $x_2=-105°+360°\cdot k$. **8.117.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.118.** $t_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.119.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.120.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. **8.121.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.122.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi k}{5}$. **8.123.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.124.** $x=\frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.125.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k-1)$. **8.126.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.127.** $x=\frac{\pi}{12}(1+6k)$. **8.128.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **8.129.** $x=\frac{\pi k}{4}$. **8.130.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}$. **8.131.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$. **8.132.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.133.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi k}{9}$. **8.134.** $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.135.** $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.136.** $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2=\operatorname{arctg}4+\pi k$. **8.137.** $x=(-1)^k\times$

28. Užsak. Nr. 1941.

$\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.138. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm1)$. 8.139. $x_1=\frac{3\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\pi(3k\pm1)$. 8.140. $x=45°(4k+1)$. 8.141. $x_1=\frac{\pi k}{2}-1$, $x_2=\frac{\pi}{10}(2k+1)-1$. 8.142. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)-\frac{1}{2}$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}-\frac{1}{2}$. 8.143. $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.144. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. 8.145. $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.146. $x=60°+180°\cdot k$. 8.147. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.148. $x=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.149. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.150. $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.151. $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(4k+1)$. 8.152. $x=\frac{\pi}{9}(3k\pm1)$. 8.153. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.154. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.155. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.156. $x_1=\frac{2\pi k}{5}$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k-2)$. 8.157. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.158. $x=30°+180°\cdot k$. 8.159. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.160. $x=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{3}{4}+\pi k$. 8.161. $x_1=\pi k-\operatorname{arctg}3$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.162. $x_1=\pi k$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 8.163. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.164. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. 8.165. $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. 8.166. $x=\pm\arccos 0{,}8+2\pi k$. 8.167. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.168. $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. 8.169. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.170. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.171. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.172. $x=180°\cdot k-25°$. 8.173. $x_1=2\pi k$, $x_2=2\pi k-\frac{1}{\pi}$. 8.174. $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.175. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-9}{2}+\pi k$. 8.176. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.177. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$. 8.178. $x=60°\cdot k-40°$. 8.179. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.180. $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.181. $t=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. 8.182. $x_1=\frac{2\pi k}{5}$, $x_2=\frac{2\pi k}{3}$. 8.183. $t=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi k}{2}$. 8.184. $z_1=\frac{2\pi k}{15}$, $k\neq 15l$, $z_2=\frac{\pi}{17}(2k+1)$, $k\neq 17l+8$. 8.185. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.186. $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.187. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 8.188. $x=25°+90°\cdot k$. 8.189. $t=2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2\pi k$. 8.190. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.191. $t=\frac{\pi}{7}(2k+1)$, $k\neq 7l+3$. 8.192. $x_1=\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi k$. 8.193. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.194. $t_1=$

$=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.195. $z=\frac{\pi}{18}(6k\pm1)$. 8.196. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.197. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.198. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$. 8.199. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.200. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.201. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.202. $x=\frac{\pi k}{12}$. 8.203. $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.204. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.205. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.206. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. 8.207. $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.208. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.209. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.210. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.211. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.212. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k\pm1)$. 8.213. $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.214. $t_1=\pi(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.215. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.216. $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_3=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. 8.217. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.218. $x_1=\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2}{5}\pi k$, $x_2=\pi k$. 8.219. $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.220. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.221. $t_1=\frac{\pi k}{4}$, $k\neq 4l+2$, $t_2=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}\pm\pi k$. 8.222. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.223. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.224. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.225. $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $t_3=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. 8.226. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.227. $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$, $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2k+1)}}{2}$; $k=0, 1, 2, \ldots$. 8.228. $z=\frac{\pi k}{3}$. 8.229. $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=(-1)^k\frac{1}{2}\times\arcsin(1-\sqrt{3})+\frac{k\pi}{2}$. 8.230. $x=\frac{\pi k}{14}$, $k\neq 14l$. 8.231. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.232. $t=\frac{\pi k}{4}$. 8.233. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.234. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.235. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.236. $x=\frac{\pi}{4}(1+4k)$. 8.237. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{24}(2k+1)$. 8.238. $x_1=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{5\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$. 8.239. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. 8.240. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.241. $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.242. $x=\frac{\pi}{20}(2k+1)$, $k\neq 5l+2$. 8.243. $z=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. 8.244. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.245. $t=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. 8.246. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.247. $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.248. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.249. $x=\frac{\pi}{12}(3k+1)$. 8.250. $z=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. 8.251. $t=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.252. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.253. $t_1=$

$=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $t_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.254.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2+\frac{\pi k}{2}$. **8.255.** $x=\pi k-2$. **8.256.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.257.** $z=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.258.** $z=\frac{\pi}{8}(8k\pm1)$. **8.259.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3=-\mathrm{arctg}\,2+\pi k$. **8.260.** $z_1=\frac{\pi}{14}(2k+1)$; $2k+1\neq 7l$, $z_2=\frac{\pi}{28}(3+4k)$; $3+4k=7l$. **8.261.** $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.262.** $z=-20^\circ+60^\circ\cdot k$. **8.263.** $x=4\pi k$. **8.264.** $t=\pi k$. **8.265.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.266.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.267.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\mathrm{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, $x_3=\mathrm{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$. **8.268.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k$. **8.269.** $x=\mathrm{arctg}\,3+\pi k$. **8.270.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. **8.271.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.272.** $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.273.** $z_1=\pi k$, $z_2=\pi k-\mathrm{arctg}\,3$. **8.274.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **8.275.** $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $t_2=\frac{\pi k}{5}$, $k\neq 5l$. **8.276.** $x_1=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{\sqrt{73}-7}{12}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$. **8.277.** $x=\frac{\pi}{32}(4k+3)$. **8.278.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.279.** $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.280.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.281.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.282.** $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.283.** $x_1=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. **8.284.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. **8.285.** $x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\,\mathrm{arcctg}\,3+\frac{\pi k}{2}$. **8.286.** $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{16}(2k+1)$. **8.287.** $x=8\pi k$. **8.288.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.289.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.290.** $t_1=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.291.** $x=2\pi k$. **8.292.** $t=\pi k$. **8.293.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.294.** $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.295.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.296.** $z_1=\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.297.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.298.** $z_1=\pm\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}+\frac{\pi k}{2}$, $z_2=\pm\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{5}+\frac{\pi k}{2}$. **8.299.** $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,5+\frac{\pi k}{2}$. **8.300.** $x=\pi k$. **8.301.** $z_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.302.** $x=$

$=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.303.** $z=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.304.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.305.** $t_1=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $t_2=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.306.** $t_1=360^\circ\cdot k$, $t_2=90^\circ\times(4k+1)$. **8.307.** $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=-\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4}$. **8.308.** $z_1=\frac{\pi}{2}\times(2k+1)$, $z_2=\pi k$, $z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.309.** $t=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2}$; $k=0, 1, 2, \ldots$ **8.310.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.311.** $t_1=\pi k$, $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. **8.312.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **8.313.** $x_1=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. **8.314.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.315.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.316.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.317.** $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.318.** $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.319.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.320.** $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.321.** $t_1=90^\circ\cdot k$, $t_2=\pm15^\circ+90^\circ\cdot k$. **8.322.** $x=\pi k$. **8.323.** $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$. **8.324.** $x_1=\frac{\pi}{3}(6k+1)$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(1+3k)$. **8.325.** $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.326.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.327.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.328.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.329.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.330.** $x_1=\frac{\pi}{18}\times(6k\pm1)$, $x_2=\frac{\pi k}{2}$. **8.331.** $x=\frac{\pi}{30}(6k\pm1)$. **8.332.** $x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. **8.333.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.334.** $t=\frac{\pi}{2}(1+4k)$. **8.335.** $x_1=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}-35^\circ+180^\circ\cdot k$, $x_2=-\mathrm{arctg}\,2-35^\circ+180^\circ\cdot k$. **8.336.** $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$; $k\neq 3l+1$; $x_3=\pm\mathrm{arctg}\sqrt{2}+\pi k$. **8.337.** $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\pi k$, $x_2=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2+\frac{1}{2}\pi k$. **8.338.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.339.** $x=2\pi k$. **8.340.** $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.341.** $x_1=-5^\circ+60^\circ\cdot k$, $x_2=70^\circ+90^\circ\cdot k$. **8.342.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.343.** $t_1=\frac{\pi}{6}\times(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.344.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.345.** $t_1=\frac{\pi}{3}\times(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $t_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)$, $k\neq 5l+2$. **8.346.** $x=2\pi k$. **8.347.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.348.** $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3=2\pi k$. **8.349.** $x_1=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{157}-6}{11}+\pi k$. **8.350.** $x=\frac{7}{12}\pi+\pi k$. **8.351.** $x_1=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $x_2=\mathrm{arctg}\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\pi k$, $x_3=\pi k-\mathrm{arctg}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

8.352. $x_1=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm3)$. 8.353. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.354. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.355. $x=\pi k$. 8.356. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $x_2=\frac{\pi}{12}\times(2k+1)$. 8.357. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.358. $x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.359. $x_1=\pi k$, $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg}5$. 8.360. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. 8.361. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.362. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. 8.363. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.364. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(12k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{3}(6k-1)$. 8.365. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.366. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.367. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. 8.368. $x_1=\pi k$, $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.369. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=(-1)^k\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.370. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.371. $x=\pi k$, kai a — bet kuris skaičius; $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}$, kai $-1\leqslant a\leqslant 3$. 8.372. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, kai m — bet kuris skaičius; $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{m+1}{2}$, kai $-3\leqslant m\leqslant 1$. 8.373. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\alpha$, kai $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$; kai $\alpha=\frac{\pi}{4}$, sprendinių nėra. 8.374. $x=(-1)^k\arcsin\frac{m}{8}+\frac{\pi}{6}(6k+1)$; $-8\leqslant m\leqslant 8$. 8.375. $x=\pi k-\frac{3}{2}+(-1)^k\arcsin\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}$, kai α — bet kuris skaičius. 8.376. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.377. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.378. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.379. $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. 8.380. $x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}$. 8.381. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. 8.382. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.383. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.384. $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.385. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.386. $x+y=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.390. $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\pi-\arcsin\frac{56}{65}$. 8.392. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 8.393. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. 8.394. $x_1=(-1)^k\times\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. 8.395. $x=\pi k_1$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k_2$. 8.396. $x=\frac{\pi}{2}(2k+3)$, $y=\frac{\pi}{6}(6k-1)$. 8.397. $x_1=\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2)$, $y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2)$; $x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2)$, $y_2=\frac{2\pi}{3}+\pi\times(k_1+k_2)$. 8.398. $x=\frac{1}{6}(6k-1)$, $y=\frac{1}{6}(6k+1)$. 8.399. $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$,

$y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$; $y_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k$. 8.400. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k_1$, k ir k_1 — to paties lyginumo skaičiai. 8.401. $x_1=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_1$, $y_1=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_2$; $x_2=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_1$, $y_2=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_2$. 8.402. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{3}(6k_1\pm1)$. 8.403. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2)$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_1-k_2)$. 8.404. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y_1=\frac{\pi}{3}(1-3k)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$, $y_2=\frac{\pi}{2}(1-2k)$. 8.405. $x=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $y=\frac{\pi}{6}(1-6k)$. 8.406. $x=\pi k$, $y=\frac{\pi m}{2}$, $z=\frac{\pi}{6}(4n-1)$. 8.407. $x=\pi k$. 8.408. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.409. $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.410. $t_1=\frac{\pi}{4}(1+8k)$, $t_2=-\operatorname{arctg}3+\pi(2k+1)$. 8.411. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.412. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$. 8.413. $z_1=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $z_2=\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\pi k$. 8.414. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.415. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.416. $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi k$. 8.417. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}4+\pi k$. 8.418. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. 8.419. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.420. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.421. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}6+\pi k$. 8.422. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.423. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.424. $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+5)$, $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi(2k+1)$. 8.425. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=2\pi k$. 8.426. $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+3)$, $x_2=\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}+\frac{\pi k}{4}$. 8.427. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.428. $x=\frac{\pi}{8}(8k+3)$. 8.429. $x_1=\frac{3\pi}{8}+\pi k$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.430. $t_1=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{2}+2k$; $t_2=\frac{3+\sqrt{5+8k}}{2}+2k$; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. 8.431. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.432. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. 8.433. $x=\pi k$. 8.434. $x=\pm\arccos\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}+2\pi k$. 8.435. $x=\frac{\pi k}{6}$. 8.436. $z=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.437. $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}(4n+1)$. 8.438. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.439. $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k$. 8.440. $t=\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{4}{2k+1}+\frac{\pi n}{2}$; $k=3,\ 4,\ \ldots$; $k=-4,\ -5,\ \ldots$. 8.441. $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$; $x_2=$

$=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$. **8.442.** $x=\frac{\pi}{12}(3k\pm1)$. **8.443.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k$. **8.444.** $t=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.445.** $t=\frac{\pi}{4}\pm$ $\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k$. **8.446.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+$ $+\frac{\pi k}{2}$. **8.447.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{32}(4k+1)$. **8.448.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\pi m$. **8.449.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.450.** $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}+2\pi k$. **8.451.** $x=\frac{\pi}{3}\times$ $\times(3k\pm1)$. **8.452.** $x_1=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2}+2\pi k$. **8.453.** $x=$ $=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.454.** $x=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}+2\pi k$; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. **8.455.** $t=$ $=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.456.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.457.** $x=\pi(4k+1)$. **8.458.** $t=$ $=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. **8.459.** $x=-1\pm\sqrt{1+\pi k}$; $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. **8.460.** $x=\pi k$. **8.461.** $x=2\pi k$. **8.462.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq3l+1$; $x_2=\frac{\pi}{4}\times$ $\times(4k+1)$. **8.463.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{2}(4l+1)$, $z=\frac{\pi n}{3}$. **8.464.** $x=(-1)^k\times$ $\times\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.465.** $x=\pi(2k+1)$. **8.466.** $x=\frac{2\pi k}{5}$; $k\neq5l$. **8.467.** $x_1=(-1)^{k+1}\times$ $\times\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.468.** $t_1=0$, $t_2=\frac{1+\sqrt{1+8k}}{4}$; $k>0$, $k=l(2l+$ $+1)$, $t_3=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{4}$, $k\neq l(2l-1)$, $l>0$. **8.469.** $x=\pi(2k+1)$. **8.470.** $t=$ $=\pm2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\pi k$. **8.471.** $x=\frac{5\pi}{6}(4k+1)$, $k\neq3l+2$. **8.472.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+$ $+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\pi k$. **8.473.** $x=\frac{\pi}{2}(1+4k)$. **8.474.** $x_1=\pi k$, $x_2=$ $=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}+\pi k$. **8.475.** $t=\frac{-2\pm\sqrt{4+2k}}{2}$, $k\geqslant1$, $k\neq2(l^2-1)$. **8.476.** $x=$ $=\frac{\pi}{12}(4k+1)$, $k\neq3l+2$. **8.477.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.478.** $t=\frac{\pi}{12}(3k\pm1)$. **8.479.** $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $y=\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **8.480.** $z_1=2\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.481.** $t=\frac{\pi}{12}(6k+5)$. **8.482.** $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.483.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.484.** $z=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi k$. **8.485.** $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.486.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.487.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.488.** $x=-\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.489.** $x=$

$=\frac{\pi}{6}(6k+1)$. **8.490.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.491.** $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.492.** $x=$ $=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.494.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{4}(2k+5)$. **8.495.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k_1+1)$, $y_1=\pi k_2$; $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_2=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k_1$. **8.496.** $x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $y_1=$ $=\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k$; $y_2=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n$; $x_3=$ $=2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi k$, $y_3=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}}+2\pi n$. **8.497.** $x=\pm\frac{\pi}{8}$, $y=$ $=\mp\frac{\pi}{8}$. **8.498.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{4}+\pi(2k_1+1)$. **8.499.** $x_1=(-1)^{k_1}\frac{\pi}{6}+\pi k_1$, $y_1=(-1)^{k_2}\frac{\pi}{6}+\pi k_2$, $z_1=(-1)^{k_3}\frac{\pi}{6}+\pi k_3$; k_1, k_2, k_3 — to paties lyginumo skaičiai; $x_2=y_3=z_4=\frac{\pi}{6}+2\pi k_1$; $y_2=z_3=x_4=\frac{\pi}{6}+\pi(2k_2+1)$; $z_2=x_3=y_4=$ $=-\frac{\pi}{6}+2\pi k_3$; $x_5=y_6=z_7=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k_1+1)$; $y_5=z_6=x_7=-\frac{\pi}{6}+2\pi k_2$; $z_5=x_6=y_7=\frac{\pi}{6}+\pi(2k_3+1)$. **8.500.** $x_1=\frac{\pi}{6}$, $y_1=\frac{\pi}{3}$, $z_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=y_3=$ $=z_4=0$, $y_2=z_3=x_4=0$, $z_2=x_3=y_4=\pi$.

9 skyrius

9.008. $(-4;\ 3]$. **9.010.** 2. **9.011.** 1. **9.012.** 2. **9.013.** $(-1;\ 2]$. **9.014.** 2; 3. **9.015.** $(-2;\ 0)$. **9.016.** $(-\infty;\ -1)\cup[4;\ \infty)$. **9.017.** $[-2;\ 1)\cup(1;\ 2]$. **9.018.** $(1;\ \infty)$. **9.019.** $[2;\ \infty)$. **9.020.** $(-\infty;\ 0)\cup[2;\ 3]$. **9.021.** $[2;\ 4)$. **9.022.** $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$. **9.023.** $(-\infty;\ -2)\cup\left(\frac{5}{8};\ \infty\right)$. **9.024.** $\left(\frac{5}{3};\ \infty\right)$. **9.025.** $(3;\ 4{,}5)$. **9.026.** $\left(\frac{8}{3};\ \infty\right)$. **9.027.** $(-1;\ 2)\cup(2;\ 3)$. **9.028.** $[0;\ 3]$. **9.029.** $(-\infty;\ 1)\cup\left(\frac{4}{3};\ 2\right)$. **9.030.** $(-4{,}5;\ -2)\cup(3;\ \infty)$. **9.031.** $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$, $(3;\ 5)$, $(5;\ \infty)$. **9.032.** $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]\cup[5;\ \infty)$. **9.033.** $(-1;\ 2)\cup(3;\ 6)$. **9.034.** $[0;\ 8]$. **9.035.** $(-\infty;\ -0{,}5]\cup[0{,}5;\ \infty)$. **9.036.** $(-\infty;\ 2)\cup(8;\ \infty)$. **9.037.** $(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$. **9.038.** $\left(-\infty;\ \frac{7}{3}\right)\cup(3;\ \infty)$. **9.039.** $(0;\ 4)$. **9.040.** $(-\infty;\ 0{,}75)\cup(4;\ 7)$. **9.041.** $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ \infty)$. **9.042.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **9.043.** $[4;\ \infty)$. **9.044.** $(-3;\ 1)$. **9.045.** $\left[\frac{20}{9};\ 4\right)\cup(5;\ \infty)$. **9.046.** $(1;\ 6)$. **9.047.** $(-1;\ 5)$. **9.048.** $(1;\ 3)\cup(3;\ 5)$. **9.049.** $(0;\ 3)\cup(7;\ \infty)$. **9.050.** $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 0]$. **9.051.** $(0;\ 2]$. **9.052.** $(0;\ 0{,}5)$. **9.053.** $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. **9.054.** $(0;\ \infty)$. **9.055.** $(-\infty;\ 1-\log_2 3)$. **9.056.** $\left(-1;\ \frac{91}{9}\right)$. **9.057.** $\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$. **9.058.** $(0;\ 0{,}4)\cup(1;\ \infty)$. **9.059.** $(3;\ \infty)$. **9.060.** $(3;\ 4)\cup(4;\ \infty)$. **9.061.** $(0;\ 1)$. **9.062.** $[1;\ 4]$. **9.063.** $(-\infty;\ 0)\cup\left[\frac{1}{2};\ \infty\right)$. **9.064.** $(-\infty;\ 11]$. **9.065.** $(-1;\ 4)$. **9.066.** $(-1;$

0) ∪ (3; 4). **9.067.** (0; ∞). **9.068.** (1; ∞). **9.069.** (1; 1,04) ∪ (26; ∞). **9.070.** (4; 6). **9.071.** (2; 3). **9.072.** (−1; 1). **9.073.** (−1; 1). **9.074.** (1; ∞). **9.075.** $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **9.076.** (0; 0,25) ∪ (4; ∞). **9.077.** (0; ∞). **9.078.** (−∞; 0,5) ∪ (1; ∞). **9.079.** (−8; 1]. **9.080.** (−2; −1) ∪ (−1; 2). **9.081.** (2; 3). **9.082.** (−∞; −3) ∪ (−2; −1). **9.083.** (−1; 1). **9.084.** $\left(\frac{1}{\lg 3}; \infty\right)$. **9.085.** (−1; 0) ∪ (0; 1). **9.086.** (0; 1). **9.087.** (2; 32). **9.088.** (0; 40). **9.089.** $(1; \sqrt[3]{5})$. **9.090.** [0; 4). **9.091.** [0; 0,5]. **9.092.** [0,5; 4]. **9.093.** (2; ∞). **9.094.** (0; 27). **9.095.** (−1; 2). **9.098.** (2; ∞). **9.099.** [1; ∞). **9.100.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. **9.101.** $\left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup [6; \infty)$. **9.102.** (−∞; −3) ∪ (2; 6]. **9.103.** $\left(-\frac{3}{2}; \frac{12}{7}\right)$. **9.104.** $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$. **9.105.** 11; 12; 14; 15. **9.109.** [−0,5; 0) ∪ (0; 0,5]. **9.110.** $\left[\frac{37}{7}; 7\right]$. **9.111.** 1. **9.112.** (−6; 6). **9.113.** [−5; −3) ∪ (3; 5]. **9.114.** (−∞; −1) ∪ (3; ∞). **9.115.** (−∞; −0,5). **9.116.** (−3; −2) ∪ (1; 2) ∪ (3; ∞). **9.117.** (−6; 2). **9.118.** (−7; 1). **9.119.** (−2; −1) ∪ (−1; 1) ∪ (5; ∞). **9.120.** 2; 3. **9.122.** [5,5; ∞). **9.123.** [0; 3) ∪ (3; 4). **9.124.** $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup (4; \infty)$. **9.125.** [0; 2) ∪ (4; 6]. **9.126.** (3; 3,5] ∪ [5; ∞). **9.127.** [−98; 2) ∪ (2; 102]. **9.128.** (3; 3,5) ∪ (3,5; 4). **9.129.** (4; 5) ∪ (5; ∞). **9.130.** $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$. **9.131.** (0; 0,75) ∪ (1,25; 2). **9.132.** $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$. **9.133.** $(-1; \sqrt[3]{4})$. **9.134.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$. **9.135.** a) $\left(a^4; \frac{1}{a}\right)$, kai $0<a<1$, ir $\left(\frac{1}{a}; a^4\right)$, kai $a>1$; b) $(1; \sqrt[4]{2}]$. **9.136.** (−2; 0) ∪ (0; 1). **9.137.** $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup (4; 8)$. **9.138.** [1,5; 2). **9.139.** Kai $m>3$ ir $m<-3$, tai $\left(-\infty; \frac{1}{m-3}\right)$; kai $-3<m<3$, tai $\left(\frac{1}{m-3}; \infty\right)$; kai $m=3$, tai $(-\infty; +\infty)$; kai $m=-3$, sprendinių nėra. **9.140.** $(-\infty; 2\sqrt{5}-4)$. **9.141.** (2; ∞). **9.142.** [0; 1,6] ∪ [2,5; ∞). **9.143.** $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}; \infty\right)$. **9.144.** (0; 0,5) ∪ (2; 3). **9.145.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in Z$. **9.146.** $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}(4n+1)\right)$; čia $n \in Z$. **9.147.** $\left(\frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi}{8}(4n-1)\right) \cup \left(\frac{\pi}{8}(4n-1); \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$. **9.148.** (−2; 0) ∪ (0; 1). **9.149.** $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{79}{75}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; \infty)$. **9.150.** (−∞; 0) ∪ (1; 2) ∪ (2; 3) ∪ (4; ∞). **9.151.** (−∞; 0] ∪ (4,5; ∞). **9.152.** $(0; 0{,}5) \cup [\sqrt{2}; \infty)$. **9.153.** [−3; 1). **9.154.** (−∞; −7) ∪ (−1; 0) ∪ (0; 1) ∪ (3; ∞). **9.155.** (1; 2) ∪ (64; ∞). **9.156.** (−∞; −2) ∪ (6; ∞). **9.157.** (1; ∞). **9.158.** (2; 5). **9.159.** [27; ∞). **9.160.** $\left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$. **9.161.** $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (243; \infty)$. **9.162.** $\left(-2; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$. **9.163.** (−3; −2) ∪ (−1; 0). **9.164.** $\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

9.165. (0; 0,5) ∪ (2; ∞). **9.166.** (0,01; ∞). **9.167.** (−∞; −1) ∪ (−1; 2]. **9.168.** $\left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$. **9.169.** (−2; −1,5) ∪ [1; 2) ∪ [5; ∞). **9.170.** (−∞; 2) ∪ [3,5; 4) ∪ [7; ∞). **9.171.** (−∞; −0,1] ∪ [−0,0001; 0). **9.172.** $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; \infty)$. **9.173.** $[-3; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{6}; -2] \cup [2; \sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3]$. **9.174.** (−∞; 0) ∪ (2; 3) ∪ (3; 3,5) ∪ (4; ∞). **9.175.** $(4^{\log_{0,8}0,2}; \infty)$. **9.176.** $(-\sqrt{14}; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \sqrt{14})$. **9.177.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. **9.178.** $\left[\frac{1}{8}; 4\right]$. **9.179.** (1; 3). **9.180.** (2; 8). **9.181.** (−4; −3) ∪ (8; ∞). **9.182.** (0; 0,5) ∪ (1; 2) ∪ (3; 6). **9.183.** (4; 10). **9.184.** $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. **9.185.** $(-\sqrt[4]{12}; \sqrt[4]{12})$. **9.186.** (−∞; −5), (−3; −1), (1; 2). **9.187.** $(1; 3) \cup (3^9; \infty)$. **9.188.** $\left(\frac{\sqrt{34}-1}{2}; \infty\right)$. **9.189.** (1; 4). **9.190.** (−∞; −2), (1; 2), (3; ∞). **9.191.** $\left(2\pi n-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in Z$. **9.192.** [−1; ∞). **9.193.** $\left(1; 1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right) \cup (3; \infty)$. **9.194.** (0; 2). **9.195.** $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$. **9.196.** (0; ∞). **9.197.** $(-\sqrt{5}; \infty)$. **9.198.** (1; 5). **9.199.** (5; ∞). **9.200.** (−2; 13). **9.201.** (1; 2) ∪ (3; ∞). **9.202.** (0,25; 1) ∪ (1; 4). **9.203.** (0,2; 5). **9.204.** $(2^{-28}; 1)$. **9.205.** (−3; −1). **9.206.** a_2; a_1; a_3. **9.207.** $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. **9.208.** [5; 7] ∪ 4. **9.209.** (5; 8) ∪ (8; 29). **9.210.** (−8; −6,5) ∪ (0; 5). **9.211.** [1,75; 4). **9.212.** (−1; 3). **9.213.** (−2; 0]. **9.214.** (−1; 2). **9.215.** (−∞; −7) ∪ (−7; −2] ∪ (1; 7) ∪ (7; 8] ∪ (11; ∞). **9.216.** $\left(0; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup (1; 3)$. **9.217.** $\left(2\pi n+\arcsin\frac{1}{8}; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right) \cup \left(2\pi n+\frac{5\pi}{6}; 2\pi n+\pi-\arcsin\frac{1}{8}\right) \cup \left(2\pi n-\frac{\pi}{6}; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n-\pi; 2\pi n-\frac{5\pi}{6}\right)$, $n \in Z$. **9.218.** [0,8; 1). **9.219.** (0; 1) ∪ (1; 2). **9.220.** $(-\infty; -2] \cup \left[-1; \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$. **9.222.** (−3; 6). **9.223.** (1; 2). **9.224.** $\left(-5; -\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$. **9.226.** (−2; 4). **9.234.** $\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$. **9.236.** (3; ∞). **9.237.** $(\log_4 13; 2]$. **9.238.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in Z$. **9.239.** $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in Z$. **9.240.** $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(2\pi n-\frac{3\pi}{4}; 2\pi n-\frac{\pi}{4}\right)$. **9.241.** $\left(\pi n-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in Z$. **9.242.** $(\log_9 7; 1) \cup (1; \infty)$. **9.243.** −5; 1. **9.244.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. **9.245.** $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\right) \cup (1; \sqrt{2}]$. **9.246.** (−3; −1). **9.247.** $(-\infty; \log_4(\sqrt{3}-1)) \cup (1{,}5; \infty)$. **9.248.** $\left(\log_3\frac{28}{27}; \log_3 4\right)$. **9.249.** Kai $0<p<1$, tai $(p; 1) \cup \left(\frac{1}{p}; \infty\right)$;

kai $p>1$, tai $\left(\frac{1}{p}; 1\right)$. **9.250.** $(-\infty; -1)\cup(0; 1)\cup(1; \infty)$. **9.251.** $(-\infty; 3)$. **9.252.** $(2; \infty)$. **9.253.** $(0; 1)\cup\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 2\right)$. **9.254.** $(-\infty; -11)$. **9.255.** $\left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}; 1\right)\cup(1; \infty)$. **9.256.** $(-\infty; 0)\cup(6; \infty)$. **9.257.** $[-2; 0)\cup(0; 2]$. **9.258.** $(5; \infty)$. **9.259.** $(-\infty; \sqrt[3]{2})\cup(\sqrt[3]{2}; \infty)$. **9.260.** $(-\infty; -2)\cup(0; 1)\cup(1; \infty)$. **9.261.** $\left(-\infty; \frac{\sqrt{17}+1}{4}\right]$. **9.262.** $[5; \infty)$. **9.263.** $(-\infty; -0{,}5)\cup(1; \infty)$. **9.264.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.265.** $(-1; 0)\cup(0; 1)\cup(1; 2)$. **9.266.** $\left(\frac{2}{3}; 1\right)\cup(2; 6)$. **9.267.** $(3; \infty)$. **9.268.** $(-\infty; 0)\cup(5; \infty)$. **9.269.** $(-1; 0)\cup[1; \infty)$. **9.270.** $(0; 1)\cup\left[\frac{4}{3}; 4\right)$. **9.271.** $(3; 9)$. **9.272.** $\left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$. **9.273.** $[0; 16]$. **9.274.** $(-2; -1]\cup[-0{,}5; 0]$. **9.275.** $(-5; -2)\cup(2; 3)\cup(3; 5)$. **9.276.** $\left(\frac{2\pi n}{5}-\frac{\pi}{10}; \frac{2\pi n}{5}-\frac{\pi}{30}\right)\cup\left(\frac{2\pi n}{5}+\frac{\pi}{10}; \frac{2\pi n}{5}+\frac{7\pi}{30}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.277.** $(180°n; 78°+180°n)\cup(156°+180°n; 168°+180°n)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.278.** $(-\infty; -1)\cup(5; \infty)$. **9.279.** $(0; a^2)\cup(1; \infty)$. **9.280.** $\left(0; 3^{\frac{2}{\log_3 7-\log_7 3}}\right)$. **9.281.** $(0; a)\cup\left(\frac{1}{a^4}; \infty\right)$. **9.282.** $(-2; -1]\cup\left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **9.283.** $(\sqrt[5]{5}; 5)$. **9.284.** $(0; 3)$. **9.285.** $\left(\pi n; \frac{2\pi}{9}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{5\pi}{9}+\pi n\right)\cup\left(\pi n-\frac{\pi}{3}; \pi n-\frac{\pi}{9}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.286.** $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.287.** $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.288.** $\left(\frac{\pi n}{8}; \frac{\pi}{48}(1+6n)\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.289.** $\left(\pi n-\frac{\pi}{8}; \pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{8}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{5\pi}{8}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.290.** $(360°n-95°; 360°n-10°)\cup(85°+360°n; 180°+360°n)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.292.** $\left(\pi n-\frac{7\pi}{12}; \pi n-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi n-\frac{\pi}{2}; \pi n+\frac{\pi}{12}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.295.** $\left(\frac{\pi}{18}(12n-7); \frac{\pi}{18}(12n+1)\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.296.** $\left(\frac{\pi}{3}(6n-1); \frac{\pi}{3}(6n+1)\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.297.** $x\neq\frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **9.300.** $(-\sqrt{12}; -2)\cup(2; \sqrt{12})$. **9.301.** $(2; 3)$. **9.302.** $\left[-\frac{1}{3}; 0\right)\cup(0; 1]$. **9.303.** 3. **9.304.** $x\in(0; 1)$. **9.305.** $a\in(-\infty; 0)$.

10 skyrius

10.001. 8 cm ir 15 cm. **10.002.** $8\sqrt{5}$ cm ir $4\sqrt{5}$ cm. **10.003.** 10,625 cm. **10.004.** $\sqrt{2n(m+n)}$, $\sqrt{4m^2+6mn+2n^2}$. **10.005.** $\frac{4ab}{a+b}$. **10.006.** 1,5 cm.

10.007. 9 cm ir 25 cm. **10.008.** $\sqrt{10}$ cm. **10.009.** $\frac{8}{3}$ cm, $\frac{25}{3}$ cm ir 5 cm. **10.010.** $12\sqrt{3}$ cm ir 36 cm. **10.011.** 6 cm. **10.012.** 13 cm. **10.013.** 8 cm ir 10 cm. **10.014.** 6,25 cm. **10.016.** $R(\sqrt{2}-1)$. **10.017.** 12 cm ir 6 cm. **10.018.** $\sqrt{41}$ cm ir 5 cm. **10.020.** 7,5 cm. **10.021.** m, $m\sqrt{3}$, $2m$. **10.022.** 60° ir 30°. **10.023.** $1{,}6R\sqrt{2}$. **10.024.** 12 cm. **10.025.** $\frac{r(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$, $\frac{r(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$. **10.026.** 6 cm. **10.027.** $2r^2(2\sqrt{3}+3)$. **10.029.** $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$, $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$. **10.030.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. **10.031.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **10.032.** 4 cm. **10.033.** 3 cm. **10.034.** 9 cm. **10.035.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **10.036.** 9 cm, $9\sqrt{3}$ cm ir 18 cm. **10.038.** 15 cm ir 30 cm. **10.039.** 4 cm, 8 cm, $2\sqrt{2}$ cm ir $2\sqrt{2}$ cm. **10.040.** 294 cm²; 12π cm. **10.041.** 12 cm, 10 cm ir $2\sqrt{91}$ cm. **10.042.** 2 cm. **10.043.** $\frac{3}{4}$. **10.044.** $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$. **10.045.** 2 ir $\sqrt{2}$. **10.046.** $\frac{65}{18}$. **10.047.** 32 cm. **10.048.** $3r$. **10.049.** 42 cm ir 56 cm. **10.050.** $\frac{29}{4}$ cm. **10.051.** 2 cm. **10.052.** $a(2-\sqrt{2})$. **10.053.** 2 : 1. **10.054.** $\frac{20}{3}$ cm. **10.055.** $\frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$. **10.057.** $3\sqrt{3}$ cm. **10.058.** $\frac{m(2\sqrt{3}+3)}{3}$. **10.059.** $\frac{r}{8}$. **10.060.** 6 cm ir 8 cm. **10.061.** 10 cm, 17 cm, 21 cm ir $\sqrt{337}$ cm. **10.062.** 12 cm ir 20 cm. **10.063.** $\frac{5\sqrt{m^2+n^2}}{6}$, $\frac{5\sqrt{m^2+n^2}}{4}$. **10.064.** 3 cm, 4 cm ir 5 cm. **10.065.** $6r\sqrt{3}$. **10.066.** 5 cm. **10.067.** 14 cm ir 4 cm. **10.068.** $18\sqrt{2}$ cm. **10.069.** 18 cm, 24 cm ir 30 cm. **10.070.** $R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$. **10.071.** $4\sqrt{5}$ cm ir $8\sqrt{5}$ cm. **10.072.** 10 cm. **10.073.** $\frac{3a^2}{8}$. **10.074.** $x\sqrt{2Rx-x^2}$. **10.075.** 1 cm. **10.076.** $\sqrt{2}-1$. **10.077.** 6 cm. **10.078.** $\sqrt{5}$ cm. **10.079.** $9\sqrt{5}$ cm ir $8\sqrt{10}$ cm. **10.081.** $3\sqrt[4]{3}$ cm ir $\sqrt[4]{27}$ cm. **10.082.** $\frac{\sqrt{2S}}{4}$. **10.083.** $\frac{\sqrt{m^2-4S}}{2}$. **10.084.** 0,24 m². **10.085.** $5R^2$. **10.086.** 64 kartus. **10.087.** $\frac{9}{4}$ kv. vnt. **10.088.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **10.089.** $285{,}61\pi$. **10.090.** 1700 cm². **10.091.** $\frac{\pi a^2}{12}$. **10.092.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. **10.093.** $\pi(p-c)^2$. **10.094.** 25π m². **10.095.** 5 cm, 5 cm, 6 cm ir 4 cm. **10.096.** 8 cm. **10.097.** $\sqrt{3}$ cm. **10.098.** $(\sqrt{6}+2):1$ arba $(\sqrt{3}+1):2$. **10.099.** $4+2\sqrt{3}$ cm, $4-2\sqrt{3}$ cm ir 4 cm. **10.100.** 120 cm². **10.101.** $a^2(2\sqrt{3}-3)$. **10.102.** 96 cm². **10.103.** 64π cm². **10.104.** 25π cm². **10.105.** $2(7+4\sqrt{3})$ cm². **10.106.** $\frac{c^2}{2}$. **10.107.** $\frac{4}{(\sqrt{3}+1)^2}$. **10.108.** $3a^2(7-4\sqrt{3})$. **10.109.** $a^2(3+\sqrt{3})$. **10.110.** $2a^2\times$

$\times(\sqrt{2}-1)$. **10.111.** $\frac{2a^2}{3}$. **10.112.** $8:3\sqrt{3}:6\sqrt{3}$. **10.113.** $\frac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}$. **10.114.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **10.115.** $\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{6}$. **10.116.** $\pi R^2(3+2\sqrt{2})$. **10.117.** 48 cm. **10.118.** $\sqrt{\frac{S(m^2+n^2)}{2mn}}$. **10.119.** $\frac{mnp^2}{2(m^2+n^2)}$. **10.120.** $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$. **10.121.** $\frac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}$. **10.122.** 16 cm. **10.123.** $\sqrt{2S}$. **10.125.** 20π cm. **10.126.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3\sqrt{3}+\pi}$. **10.127.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **10.128.** $a^2\sqrt{3}$. **10.129.** $2\sqrt{mn}(m+n)$. **10.130.** 16 cm². **10.131.** $\frac{8Q}{\pi}$. **10.132.** 2 : 3. **10.133.** $\frac{27a^2\sqrt{3}}{8}$. **10.134.** 1024 cm². **10.135.** 282,24 cm². **10.136.** 54 cm². **10.137.** πab. **10.138.** $\frac{r^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$. **10.139.** $\frac{\pi(a^2+b^2)-4ab}{8}$. **10.141.** 5 cm. **10.142.** 2 : 1. **10.143.** 3 : 1. **10.144.** 2,2 m² ir 4 m². **10.145.** 150 cm². **10.146.** $\frac{80}{3}$ cm. **10.147.** 12 cm ir 4 cm. **10.148.** $h^2\sqrt{3}$. **10.149.** $\frac{R^2(\pi-2)}{4}$. **10.150.** $\frac{c_1^2-c_2^2}{4\pi}$. **10.151.** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$. **10.152.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **10.153.** $R\sqrt{\frac{1}{3}}$, $R\sqrt{\frac{2}{3}}$, R. **10.154.** $\sqrt{\frac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. **10.155.** $\frac{(\pi+\sqrt{3})R^2}{2}$. **10.156.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$. **10.157.** 9. **10.158.** 84 cm². **10.159.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **10.160.** 24 m ir 30 m. **10.161.** 8,64 m² ir 15,36 m². **10.162.** 75 cm². **10.163.** $\left(\frac{65}{32}\right)^2$. **10.164.** 32 cm². **10.165.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **10.166.** 60 cm². **10.169.** $\frac{R(\sqrt{4+\pi}\pm\sqrt{4-\pi})}{2}$. **10.170.** $\pi\left(\frac{Ra}{R+a}\right)^2$. **10.171.** $\frac{(a^2-b^2)(\sqrt{3}-1)}{4}$. **10.172.** 4. **10.173.** 5 cm. **10.174.** $\frac{\sqrt{2S}}{4}$. **10.175.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **10.178.** $\frac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$. **10.179.** $R\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$. **10.180.** 168 cm². **10.181.** $\frac{3a^2}{8}$. **10.182.** $\frac{a^2}{25}$. **10.184.** 450 cm². **10.185.** 25. **10.186.** 13 cm. **10.187.** $H^2\sqrt{3}$. **10.188.** $\frac{3a^2}{8}$ arba $\frac{2a^2}{3}$. **10.189.** 1. **10.190.** $3\pi\sqrt{15}:50$. **10.191.** $\frac{36}{\sqrt{10}}$ cm, $\frac{12}{\sqrt{10}}$ cm, $\frac{18}{\sqrt{10}}$ cm ir $\frac{30}{\sqrt{10}}$ cm. **10.192.** $14\pi+12\sqrt{3}$. **10.193.** 20 cm ir 10 cm arba 5 cm ir 40 cm. **10.195.** 17 cm. **10.196.** 75°. **10.197.** $\frac{3}{2}$ cm, $\frac{8}{3}$ cm ir $\frac{25}{6}$ cm. **10.198.** 14 cm, 12,5 cm, 29,4 cm ir 16,9 cm. **10.199.** $\frac{4,5\sqrt{41}}{4}$ cm. **10.200.** $\frac{m(p+q)}{q}$, $\frac{m(p+q)}{p}$, $p+q$. **10.201.** 2 : 1. **10.203.** $\frac{85}{8}$ cm. **10.204.** 6,25 cm. **10.205.** 20 cm,

12,5 cm, 5 cm ir 12,5 cm. **10.206.** 5,5 cm ir 6 cm. **10.207.** $\frac{84}{13}$ cm ir $\frac{72}{13}$ cm. **10.208.** 6 cm ir $2\sqrt{3}$ cm. **10.209.** $\frac{120}{17}$. **10.210.** $5\sqrt{2}$. **10.211.** 5 cm. **10.212.** 15 cm ir 20 cm. **10.213.** 12π. **10.214.** $4\sqrt{3}+6$, $6\sqrt{3}+12$. **10.215.** 10. **10.216.** 8. **10.217.** Trapecija turi būti lygiašonė, jos šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai. **10.218.** 6 cm. **10.221.** $2\sqrt{5}$ cm. **10.222.** $\frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}$. **10.223.** 15 cm, 20 cm ir 25 cm. **10.224.** 6 cm. **10.225.** $\frac{\pi}{2}$. **10.226.** 6 cm, 8 cm ir 10 cm. **10.227.** $b+c+d$. **10.228.** $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ cm. **10.229.** 9 cm, 9 cm ir $6\sqrt{2}$ cm. **10.230.** 26 cm ir 30 cm. **10.231.** $4r$, $\frac{10r}{3}$, $2r$. **10.232.** $4\sqrt{2}$ cm ir 18 cm. **10.233.** $\frac{h\sqrt{3}}{3}$. **10.234.** 1 cm ir 17 cm. **10.235.** $\frac{m(\sqrt{5}+1)}{2}$ ir m. **10.236.** $2\sqrt{5}$ ir $5+\sqrt{5}$. **10.237.** pq. **10.238.** 1 : 3, 2 : 3. **10.239.** $\sqrt{10}$ cm. **10.240.** $\frac{28}{3}$ cm. **10.241.** $\frac{bm}{b-m}$. **10.242.** 4,8. **10.243.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm. **10.244.** 7 cm, 24 cm ir 25 cm. **10.245.** $\frac{ar}{a-r}$ ir $\frac{a^2r}{(a-r)^2}$. **10.246.** $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ cm. **10.247.** $2a\sqrt{7}$. **10.248.** $0,5\times\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. **10.251.** 7381 kartą. **10.252.** 3 : 1, 3 : 2, 2 : 1. **10.253.** 130 cm. **10.254.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **10.255.** 8 cm. **10.256.** 3 cm. **10.257.** $\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **10.258.** 5,8 cm. **10.259.** 3 cm. **10.260.** 5 cm. **10.261.** 1 : 2. **10.262.** $\frac{2r^2}{h-2r}$. **10.266.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. **10.268.** Atkarpos *AB* vidurys. **10.270.** 3 : 4. **10.271.** 150 cm². **10.273.** $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{Q}{q}}}$ ir $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{\frac{q}{Q}}}$. **10.276.** $5\sqrt{2}$ cm. **10.277.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **10.278.** $a\sqrt{3}$, $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$ ir $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$. **10.279.** 20 cm². **10.280.** 30°, 30° ir 120°. **10.281.** 3 cm. **10.282.** 1 : 2. **10.283.** 2 cm. **10.284.** $\frac{R^2\sqrt{3}(6\sqrt{3}-4)}{3}$. **10.285.** $\frac{R^2(\pi+\sqrt{3})}{2}$. **10.286.** $\frac{r^2(24\sqrt{3}-11\pi)}{6}$. **10.287.** $(3+\sqrt{3})$ cm². **10.288.** $12\sqrt{5}$ cm². **10.289.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$. **10.290.** $\frac{\pi R^2r^2}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^4}$. **10.291.** 3,6 cm². **10.292.** $\frac{2R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$. **10.293.** $\frac{8R^3}{a}$. **10.294.** $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$. **10.295.** $\frac{100\pi}{9}$ cm². **10.296.** r^2+2Rr. **10.297.** $\frac{(m+n)^2}{mn}$. **10.298.** $\frac{3(4\pi-3\sqrt{3})p^2}{4(2\pi+3\sqrt{3})^2}$. **10.299.** $\frac{5\pi R^2}{36}$.

10.300. $\frac{a^2(3\sqrt{3}+\pi)}{18}$. 10.301. 10 : 1. 10.302. $2S$. 10.305. $\frac{\pi(b^2-2ac)}{4a^2}$.
10.306. $\frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}$. 10.307. $\frac{65\pi a^2}{4}$. 10.308. $\frac{3a^2}{2}$. 10.309. 8 cm, 8 cm, $8+4\sqrt{3}$ cm ir $8-4\sqrt{3}$ cm. 10.310. 100π cm². 10.311. $\frac{25}{6\pi}$. 10.312. $R^2(\pi-\sqrt{3})$. 10.313. $\frac{R^2(2\pi-3\sqrt{3})}{6}$. 10.314. 4,32 cm². 10.315. $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm².
10.316. $\frac{200}{3}$ cm². 10.317. 9 cm². 10.318. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 10.319. a. 10.320. $\frac{3}{4}$.
10.321. 8 cm². 10.322. 6 cm. 10.323. 8 cm arba 6 cm. 10.324. $\frac{8}{\sqrt{3}}$ cm, $26\sqrt{3}$ cm ir $30\sqrt{3}$ cm. 10.325. 288 cm². 10.326. 16 m². 10.327. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm². 10.328. 2,16 cm², 3 cm² ir 0,84 cm². 10.329. 14 cm². 10.330. $\frac{b+\sqrt{b^2-2ac}}{2a}$. 10.331. $\frac{(b-a)^2}{2}$.
10.332. $\frac{p^2-m^2}{p}$, $\frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2-m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}$. 10.333. 96 cm ir 156 cm.
10.334. $\frac{a^2(\pi-2)}{2}$. 10.335. 14 cm. 10.336. $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{18}$ cm².
10.337. $\frac{a^2(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3})}{8}$. 10.338. $\frac{3R^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$. 10.339. $2(3\sqrt{3}-\pi)$ cm².
10.340. $\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$. 10.341. $0{,}5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$. 10.342. 45° ir 135°. 10.343. 235,2 cm².
10.344. 9,6 cm². 10.345. Statusis; 24 cm². 10.346. 9 kartus. 10.347. $\angle A=\angle B$ arba $\angle A+\angle B=120°$. 10.348. 120 cm². 10.349. $2R^2(\sqrt{3}+1)$. 10.350. $\frac{2S}{5}$.
10.351. 16,9 cm. 10.352. $\sqrt{3}$. 10.353. 2,56 karto. 10.354. $\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{8}$ cm² ≈ 3,4 cm². 10.355. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ir $\frac{9-5\sqrt{3}}{3}$. 10.357. 80 cm². 10.358. $a\cdot\frac{3a-b}{a+b}$, kai $b<a<3b$; $a\cdot\frac{a-3b}{a+b}$, kai $a>3b$. 10.359. 2,4 cm. 10.360. 12 ir 16. 10.361. 10 cm.
10.362. $\frac{2r+m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)}}{2}$; $r\leqslant\frac{m(\sqrt{2}-1)}{2}$. 10.363. 18 cm.
10.364. $\frac{2mn}{m+2n}$ ir $\frac{n(m+n)}{m+2n}$. 10.365. 30° ir 60°. 10.366. $\frac{20}{3}$ cm ir $\frac{15}{4}$ cm.
10.367. $\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$. 10.368. 10 cm. 10.369. 6 cm arba 4 cm. 10.370. $\frac{a+b}{4(a-b)}\times\sqrt{(a-b+c+d)(a-b+d-c)(c+a-b-d)(c-a+b+d)}$. 10.371. $\angle A+\angle B=90°$ arba $|\angle A-\angle B|=90°$. 10.372. n. 10.373. 16 cm. 10.374. Šoninę kraštinę.
10.375. $\frac{9R^2}{4}$. 10.376. $MN=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 10.377. 8 cm, 4 cm ir 6 cm.

10.378. $\frac{2Rr}{R+r}$. 10.379. m. 10.381. $\frac{11}{3}$ cm². 10.385. $S\left(1-\frac{3m^2}{(2n+m)^2}\right)$.
10.386. 3 ir 4. 10.387. 45°, 45° ir 90°. 10.388. $AB=AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 10.389. $\frac{175}{48}$ cm.
10.390. $\frac{33}{4}$ cm. 10.391. 6 cm. 10.392. $\frac{R^2(8\sqrt{3}-9)}{4}$. 10.393. 1,6 cm².
10.395. $\frac{a^2(3-3\sqrt{3}+\pi)}{3}$. 10.396. $\frac{R^2(6\sqrt{3}-3\pi)(7-4\sqrt{3})}{2}$. 10.397. $\frac{2R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{9}$.
10.398. $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$. 10.399. $\frac{a^2(\sqrt{3}-\pi)}{18}$. 10.400. $\frac{l(a+b)}{4ab}\times\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. 10.401. $\sqrt{\frac{Q}{\pi-3}}$. 10.402. $\frac{\pi R^2}{6}$. 10.403. 1 cm.
10.405. $\frac{a\sqrt{3}(a-2b)}{12}$. 10.406. Rp. 10.407. 3 : 7. 10.408. 125 cm².
10.409. $\sqrt{42}$ ir $\sqrt{33}$. 10.410. $a\sqrt{mn}\left(\frac{m+a-n}{a-n}\right)$. 10.411. $(2\sqrt{3}-3)S$. 10.412. r, $\frac{4r}{3}$ ir $\frac{5r}{3}$. 10.415. $\frac{(\sqrt{d+c}\pm\sqrt{d-c})^2}{4}$.
10.416. $\frac{1}{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)}$.
10.417. 5. 10.418. $(ad+bc):(ab+cd)$. 10.419. $\frac{3136\pi}{81}$ cm². 10.420. $\frac{a(3+\sqrt{6})}{6}$ ir $a(5+2\sqrt{6})$ arba $a(3-\sqrt{6})$16 ir $a(5-2\sqrt{6})$. 10.421. $\frac{11}{3}$ cm².
10.422. $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$. 10.423. 1,6 cm². 10.424. $\frac{a^2\sqrt{6}(2-\sqrt{3})}{12\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. 10.425. $\frac{180\sqrt{3}}{19}$ cm².

11 skyrius

11.001. $\frac{c^3\sqrt{3}}{48}$. 11.002. $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$. 11.003. $\frac{a^3}{24}$; $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$.
11.004. $\frac{Sd}{2}$. 11.005. $\sqrt{3}$. 11.006. 144 cm³. 11.007. 3. 11.008. $\frac{ab\sqrt{6ab}}{2}$.
11.009. $6V$. 11.010. $a^2(\sqrt{5}+1)$. 11.011. $\frac{3l^3}{16}$. 11.012. $\frac{a^2(1+\sqrt{7})}{2}$; $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
11.013. $2a^2$. 11.014. $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$. 11.015. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 11.016. $\frac{b^3\sqrt{3}}{24}$. 11.017. $\frac{\sqrt{47}}{24}$.
11.018. $\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$. 11.019. $\frac{(l^2-h^2)h\sqrt{3}}{4}$. 11.020. $18\sqrt{2}$ dm³. 11.021. 60,375 cm³.
11.022. $a^3\sqrt{2}$. 11.023. 26,25 dm². 11.024. $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}}{6}$. 11.025. $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{3}}{12}$.
11.026. $2Q\sqrt{2}$. 11.027. $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$. 11.028. $\frac{8r^3\sqrt{3}}{3}$; $24r^2$. 11.029. $\frac{a^3}{24}$;

29. Užsak. Nr. 1941.

$\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$. **11.030.** $4\sqrt{3}$ cm³. **11.031.** $\frac{a^3}{6}$; $a^2(\sqrt{2}+1)$. **11.032.** 108 cm³. **11.033.** $21\sqrt{55}$ cm³; 84 cm². **11.034.** $\frac{3d^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$. **11.035.** $2d^3\sqrt{2}$. **11.036.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **11.037.** $a^2(4+\sqrt{3})$. **11.038.** $2a(a+\sqrt{4b^2+a^2})$. **11.039.** $a^2\sqrt{3}$. **11.040.** 6 cm³. **11.041.** $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. **11.042.** 872 cm³. **11.043.** $\sqrt{\frac{S_1S_2Q}{2}}$. **11.044.** $\frac{l^3\sqrt{3}}{12}$. **11.045.** $\frac{9d^3}{64}$. **11.046.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. **11.047.** $2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)}$. **11.048.** $\frac{3a^3}{8}$. **11.050.** $\frac{3}{2}\sqrt{(l^2-h^2)(3l^2+h^2)}$. **11.051.** $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ cm³. **11.052.** $\sqrt{3}(2Q+0{,}5a^2)$. **11.053.** $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$. **11.054.** $\frac{mnc^2\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. **11.055.** $\frac{3a^2}{2}$. **11.056.** $2\sqrt{P^2+Q^2}$. **11.057.** $\frac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$. **11.058.** $\frac{\sqrt{3}}{27}h^2\sqrt{9m^2-h^2}$. **11.059.** $\frac{1}{4l}\times$ $\times\sqrt{(M+N+P)(M+N-P)(M+P-N)(N+P-M)}$. **11.060.** $2P+\frac{4V}{\sqrt{P}}$. **11.061.** $6h^2$. **11.062.** $\frac{l^3\sqrt{2}}{12}$; $\frac{l^2(2+\sqrt{2})}{2}$. **11.063.** $3a^2$; $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **11.064.** $\frac{h^3\sqrt{3}}{2}$. **11.065.** $S\sqrt{3}$. **11.066.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **11.067.** $18\sqrt{3}$ cm³. **11.068.** $3a^2$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **11.069.** $Q\sqrt{\frac{Q}{3}}$. **11.070.** $\frac{abS}{4(a+b)}$. **11.071.** $\frac{3\sqrt{1833}}{47}$. **11.072.** $\frac{mn}{m^2+n^2}$; $Q\sqrt{Q}$. **11.073.** 3 cm. **11.074.** 75,85 m³. **11.076.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **11.077.** $\frac{Sr}{3}$. **11.078.** $V=CS$. **11.080.** $2\pi(\sqrt{2}+1)a^2$; $\frac{2\pi a^3}{3}$. **11.081.** $\pi R:p$. **11.082.** $\frac{1152\pi}{125}$. **11.083.** $\frac{4\pi h^3}{81}$. **11.084.** $\pi R^2\sqrt{5}$. **11.085.** $\frac{N\sqrt{\pi M}}{2}$; $\pi N+2M$. **11.086.** 24π. **11.088.** 3 : 2 : 1. **11.089.** $\pi\frac{R^3\sqrt{15}}{3}$. **11.090.** $4\pi Q$. **11.091.** 600π cm²; 1000π cm³. **11.092.** 216π cm²; 448π cm³. **11.093.** $S:s=\pi:2$; $V:v=\pi\sqrt{3}:2$. **11.094.** $s:S=v:V=4:9$. **11.095.** $64\pi:27$. **11.096.** $\frac{\pi(R^2+h^2)^2}{h^2}$. **11.097.** $\frac{9}{16}$. **11.098.** $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. **11.099.** $4\pi\times$ $\times\sqrt{3}$ cm²; 2π cm³. **11.100.** $\frac{7V}{27}$. **11.101.** $\frac{2S\sqrt{6\pi S}}{27\pi}$. **11.102.** 8 m². **11.103.** $2R\sqrt[3]{4}$. **11.104.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **11.106.** $\frac{9a^3\sqrt{11}}{4}$. **11.107.** $16\sqrt{2{,}2(\sqrt{2}-1)}$. **11.108.** ≈ 515 dm³. **11.109.** $\frac{a^3\sqrt{1+\sqrt{5}}}{6}$. **11.110.** 3 cm. **11.111.** $4S$. **11.112.** $\frac{m^2(4+\sqrt{2})}{2}$; $\frac{m^3\sqrt[4]{2}}{6}$. **11.113.** 260 dm²; 312 dm³. **11.114.** 1900 m³.

11.115. $\frac{(S_1+S_2)h}{2}$. **11.116.** 12 cm³. **11.117.** 906 cm². **11.118.** $\frac{a^3\sqrt[3]{3}}{2}$; $a^2\times$ $\times(1+2\sqrt{3}+\sqrt{13})$. **11.119.** $\frac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$. **11.120.** $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$. **11.121.** $\sqrt{6}$. **11.122.** $\frac{37}{27}$ cm³ ir $\frac{152}{27}$ cm³. **11.123.** $\frac{8Q\sqrt{3}}{3}$. **11.124.** $\frac{a^3(\sqrt{2}-1)}{8}$. **11.125.** $\frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)}{3}$. **11.126.** $\frac{3a^3}{4}$; $\frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$. **11.127.** $\frac{7a^3(\sqrt{2}-1)}{3}$. **11.128.** $\frac{3a^2}{4}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$. **11.129.** $10\sqrt{19}$ cm². **11.130.** $1:\sqrt{2}$. **11.131.** $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. **11.132.** $\frac{S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}}{9}$. **11.133.** $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}{4}$. **11.134.** $\frac{a^3}{128}$. **11.135.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}}{6}$. **11.136.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3(2n+m)}{m}}\right)$. **11.137.** $\frac{144\sqrt{3}}{5}$ cm³. **11.138.** 192 cm². **11.139.** $\sqrt{3}(2\sqrt{2}+3):6$. **11.140.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{3}$. **11.141.** $4m^2\sqrt{3}$. **11.142.** $\frac{S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{6}}{2}$. **11.143.** $\frac{a^3(27\sqrt{2}-22\sqrt{3})}{2}$. **11.144.** $\frac{c^3}{32}$. **11.145.** $\frac{abc\sqrt{2}}{3}$. **11.146.** $\frac{a^2(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7})}{2}$. **11.147.** $8(11+\sqrt{34})$ m². **11.148.** $VS_2\sqrt{S_2}:(S_2\times$ $\times\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1})$. **11.149.** 12 dm³. **11.150.** 1,9. **11.151.** $\frac{a^3}{2}$. **11.152.** 9 : 1, 27 : 1. **11.153.** 3 : 4. **11.154.** $3al+a^2\sqrt{3}$. **11.155.** $ab(\sqrt{2}+1)$. **11.157.** $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$. **11.158.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **11.159.** 200 cm³. **11.160.** $\frac{d_1\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}}{12}$. **11.161.** $\frac{2PQ}{3a}$. **11.162.** $\frac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{12}$. **11.163.** $2pl+\frac{2l}{h}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; čia $2p=a+$ $+b+c$. **11.164.** $\frac{a^3}{8}$; $\frac{a^2\sqrt{3}(3+\sqrt{2})}{4}$. **11.165.** $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+$ $+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$. **11.166.** $abc\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.167.** $36\sqrt{2}$ kub. vnt. **11.168.** $\frac{S\sqrt{S}}{3}$. **11.169.** $\sqrt{6}$. **11.170.** $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$. **11.171.** $\frac{2}{3}R^3\sqrt{\frac{2}{3}}$. **11.172.** $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ kub. vnt. **11.173.** $12R^2\sqrt{3}$. **11.174.** $\frac{21R^3}{16}$. **11.175.** $3ab$. **11.176.** $\frac{2r^2(R+\sqrt{R^2-r^2})}{3}$ arba $\frac{2r^2(R-\sqrt{R^2-r^2})}{3}$. **11.177.** SL. **11.178.** $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$. **11.179.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **11.180.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab}$. **11.181.** $\frac{\pi S\sqrt{5S}}{21}$. **11.182.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2R^3}{(\pi^2-1)}$. **11.183.** 5 : 1. **11.184.** $\frac{6m-3n}{4n}$. **11.185.** $\frac{64\pi}{9}$ cm². **11.186.** $\frac{\pi h^3}{24}$. **11.187.** $\frac{\pi a^2}{6}$. **11.188.** πl^2; $\frac{2\pi R(l^2-R^2)}{3}$. **11.189.** 3,75 cm.

11.190. $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{6}$. 11.191. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. 11.192. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$. 11.193. $\frac{10\pi h^3}{9}$. 11.194. $2\pi dp$. 11.195. $\frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$. 11.196. $\frac{a^3(3\sqrt{2}-2)}{3}$. 11.197. $\frac{a^3}{4}$. 11.198. 336 cm³; 396 cm². 11.199. $\frac{m^2n^2}{2l}$. 11.200. 4 : 121. 11.201. $\frac{a^3}{12}$. 11.202. 3. 11.203. $\frac{a^3}{6}$. 11.204. $\frac{16a^3b^3}{3(a^2-b^2)\sqrt{2b^2-a^2}}$; $b<a<\sqrt{2}b$. 11.205. $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$. 11.206. $\frac{\sqrt{9m^2-3a^2+6am}}{a-m}$. 11.207. $2a^3(\sqrt{2}-1)$. 11.208. $2a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3}{3}$. 11.209. 20,25 cm². 11.211. $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. 11.212. $18d^2$. 11.213. 24 cm³. 11.214. $\frac{9\sqrt{39}}{4}$ cm³. 11.215. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. 11.218. $\frac{h(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)}{6}$. 11.219. $\frac{9a^3}{64}$. 11.220. $\frac{a+\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$. 11.222. $2\pi a^2$, $\frac{a^3(2\pi+3\sqrt{3})}{6}$. 11.223. $\frac{q^2(2-q)}{4}$, kai $q<2$; kai $q\geqslant 2$, uždavinys neturi sprendinio. 11.224. $\frac{\pi R^2(4-\sqrt{7})}{2}$. 11.225. $\frac{\pi h^3}{l}$. 11.226. $\frac{12}{19}$ m. 11.227. $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$. 11.229. $\frac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}$. 11.230. $3H^2\sqrt{3}$. 11.231. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 11.233. a) $5\sqrt{3}$ ir $\sqrt{51}$; b) ne.

12 skyrius

12.001. $\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}$. 12.002. $\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. 12.003. $\cos\frac{\alpha}{2}:\cos\frac{\alpha}{6}$. 12.004. $\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. 12.005. $h\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 12.006. $\frac{1}{3}\sqrt{S\sin 2\alpha}$. 12.007. $\frac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$. 12.008. $\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}\cdot\frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$. 12.009. $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. 12.010. $\frac{8R}{\sin\alpha}$. 12.012. $\arccos\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. 12.013. $\frac{1}{2k}$. 12.014. $\sqrt{2S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$. 12.015. $\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.016. $\frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2+2h_1h_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. 12.017. $2d\sqrt{2}\sin\frac{\pi(3m+n)}{4(m+n)}$. 12.018. $\arccos\frac{k-1}{k}$ ir $\pi-\arccos\frac{k-1}{k}$; $k>1$. 12.019. $2\sqrt{S\,\mathrm{tg}(\alpha/2)/3}$. 12.020. $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2(\alpha/4)}$. 12.021. $\frac{4r\cos^2(\alpha/2)}{\sin(3\alpha/2)}$. 12.022. $2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$.

12.023. $\frac{a}{4}\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+9}$. 12.024. $\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. 12.025. $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\alpha-\frac{\pi}{2}}$. 12.026. $2\,\mathrm{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$ ir $\pi-2\,\mathrm{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$. 12.027. $\frac{4R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$. 12.028. $\frac{r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)}{\sin 2\alpha}$. 12.029. $\sqrt{S\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.030. $\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$. 12.031. $2\sqrt{5}/5$. 12.032. $r^2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 12.033. $\frac{P\sin\alpha}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 12.034. $2\times$ $\times\sin 2\alpha\sin^2\alpha:\pi$. 12.035. $\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. 12.037. $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$. 12.038. 30°. 12.040. $\frac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 16. 12.041. $\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$. 12.042. $R^2(\alpha+\sin\alpha)$. 12.043. $\frac{b\sin\alpha}{\sin(3\alpha/2)}$. 12.044. $2d^2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. 12.045. $\frac{1}{3}\pi d^3\times$ $\times\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. 12.046. $\frac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 12.047. $\frac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. 12.048. $2\times$ $\times\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$. 12.049. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 12.050. $\frac{1}{7}$. 12.051. $\frac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$. 12.052. $\frac{\pi}{3}\times$ $\times ab(a+b)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. 12.053. $2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$. 12.054. $\frac{\pi H^3}{12}\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. 12.055. $\frac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. 12.056. $\frac{8\pi r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$. 12.057. $\frac{d^3\sin\beta\sin 2\beta\sin 2\alpha}{8}$. 12.058. $\sqrt[3]{\frac{4V\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2)}{\pi}}$. 12.059. $\arccos\frac{1}{9}$. 12.060. $\frac{a^3\sin(\alpha/2)\,\mathrm{tg}\,\beta}{6}$. 12.061. $\frac{(a^2-b^2)(a-b)\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{8}$. 12.062. $\sqrt[3]{\frac{2V}{\mathrm{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$. 12.063. $\frac{2h^3\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin\beta}{3}$. 12.064. $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin(\alpha/2)}$. 12.065. $\frac{\sqrt{3}\,l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$. 12.066. $\frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}$. 12.067. $\frac{1}{8}l^3\times$ $\times\sin 2\beta\cos\beta\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 12.068. $\arcsin\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 12.069. $\frac{\pi S}{\sin\frac{\pi n}{m+n}}$. 12.070. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. 12.071. $\frac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. 12.072. $\frac{H^3}{3}\mathrm{ctg}^2\beta\sin 2\alpha$. 12.073. $2\,\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$. 12.074. $1-k$. 12.075. $2\,\mathrm{arctg}\frac{4m}{\pi n}$. 12.076. $\mathrm{arctg}\frac{k}{2\sin\alpha}$. 12.077. $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$. 12.078. $2\arcsin\frac{k}{\sqrt{3}}$; $0<k<\sqrt{3}$. 12.079. $\arcsin\frac{\sin\alpha}{2}$. 12.080. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. 12.081. $\mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta}$. 12.082. $2\,\mathrm{arctg}(\cos\alpha)$. 12.083. $2\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{n}\times\right.$ $\left.\times\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.084. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 12.085. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. 12.086. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

12.087. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12.088. $\arcsin\frac{\sqrt{12cV}}{c^2}$. 12.089. $\frac{1}{8}(P^2-4l^2\sin^2\alpha)l\times$ $\times\cos\alpha$. 12.090. $\frac{\pi l^3\sin 2\beta\cos\beta}{8\cos^2\alpha}$. 12.091. $2\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. 12.092. $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$. 12.093. $\cos 2\alpha$ skaičiuojant nuo pagrindo. 12.094. $V\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. 12.095. $\mathrm{arctg}(2\times$ $\times\mathrm{ctg}\,\alpha)$. 12.096. $\frac{\pi l^3}{12}\sin^3 2\alpha$. 12.097. $\frac{n(a^2-b^2)\mathrm{ctg}(\pi/n)}{4\cos\alpha}$. 12.098. $\frac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}$. 12.099. $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\beta/2)}{\cos\beta}$. 12.100. $\frac{a^3\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2}$. 12.101. $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. 12.102. $\frac{2V\cos^2(\alpha/2)\sin\alpha}{\pi}$. 12.103. $\frac{\sin\beta}{4\pi\cos\beta\cos^2(\beta/2)}$. 12.104. $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$. 12.105. $\frac{\pi h^3}{3\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.106. $\frac{3H^2\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin^2(\alpha/2)}$. 12.107. $\arccos\frac{1}{3}$. 12.108. $\mathrm{arctg}\frac{2m}{m+n}$. 12.109. $\frac{H^2\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha}$. 12.110. $\frac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$. 12.111. $\frac{a^3\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sin\alpha\sin\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. 12.112. $\frac{\pi d^2}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}$. 12.113. $\arccos\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, $\arcsin\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$. 12.114. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. 12.115. $\frac{7}{25}$. 12.116. $\frac{aS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. 12.117. $\frac{2\sin\alpha}{\pi}$. 12.118. $-\frac{1}{3}$. 12.119. $\frac{\pi r^3\,\mathrm{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. 12.120. $\frac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$. 12.121. $\frac{a}{3\sin(\alpha/2)}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 12.122. $\frac{\pi a^3\,\mathrm{ctg}\,\beta}{24\sin^3(\alpha/2)}$. 12.123. $\frac{\pi a^3\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{6\cos^4(\alpha/2)}$. 12.124. $\frac{d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2(\alpha/2)}$. 12.125. $\frac{4S\sqrt[4]{3}}{2}\sin\alpha\times$ $\times\sqrt{S\cos\alpha}$. 12.126. $2\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$. 12.127. $\frac{d^2\sin\alpha}{2}$. 12.128. $\frac{3l^3\sin^2 2\alpha}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. 12.129. $\frac{a^3}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 12.130. $\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. 12.131. $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. 12.132. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, kai $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 12.133. $\frac{\sin\alpha}{2\alpha-\sin\alpha}$. 12.134. $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha}}$. 12.135. $\frac{2\alpha\cos^4\frac{\pi-\alpha}{4}}{\pi\sin^2(\alpha/2)}$. 12.136. $\frac{p^2+ap-q^2}{p}$. 12.137. $\sqrt{S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.138. $-\cos 2\alpha$. 12.139. $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. 12.140. $\frac{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}$ skaičiuojant nuo viršūnės. 12.141. $\frac{h\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.142. $\frac{R^2}{4}$. 12.143. $\frac{1}{13}$. 12.144. $\frac{72}{97}$. 12.145. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$. 12.146. $\mathrm{arctg}\frac{n\sqrt{3}}{2m+n}$. 12.147. $\frac{7}{18}$. 12.148. $\mathrm{arctg}\frac{3k}{2}$. 12.149. $\frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. 12.150. $\frac{1}{k-1}$; $k>2$. 12.151. $\frac{\pi}{4}\pm\arcsin\frac{\sqrt{2}(k-1)}{2(k+1)}$. 12.152. $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$; $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$, $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$; $k\geqslant\frac{2}{\pi-2}$. 12.153. $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$. 12.154. $2\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ir $\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. 12.155. $\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}$. 12.156. $\mathrm{arctg}\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$. 12.157. $\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}$. 12.158. $\frac{3}{5}$ ir $\frac{4}{5}$. 12.159. $\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ ir $\pi-\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$. 12,160. $\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ ir $\pi-\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$; $\sqrt{2}\leqslant k<2$. 12.161. $\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 12.162. $\frac{R}{2\cos^2\frac{(\pi+2)R-l}{4R}}$. 12.164. $\frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 12.165. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4S}{a^2}$, $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4S}{a^2}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{4S}{a^2}$. 12.166. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$ ir $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$; $0<k\leqslant\frac{3}{4}$. 12.167. $\frac{R^2\sin\alpha}{8}\left(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha\right)$. 12.168. $\sqrt{a^2+2ah\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.169. $3-\sqrt{5}$. 12.170. $\frac{S\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)}$. 12.171. $\frac{3\,\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}$. 12.172. $\frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$. 12.173. $\frac{a\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\beta}$. 12.174. $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$. 12.175. $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$. 12.176. $\frac{a}{2}\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. 12.177. $\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha-b\cos\alpha$. 12.178. $\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 12.179. $\frac{4}{5}$. 12.180. $\frac{5}{13}$. 12.181. $\arcsin\frac{\mathrm{tg}(\alpha/2)}{\sqrt{3}}$, $\alpha\leqslant 120^\circ$. 12.182. $\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$. 12.183. $-\frac{3}{5}$. 12.184. $\frac{m}{4\sin^2(\alpha/2)}$. 12.185. $\sqrt{a^2+4S\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.186. $\frac{\pi}{6}$. 12.187. $-\frac{1}{2}S\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sin 4\alpha$. 12.188. $P_a>P_b>P_c$. 12.189. $\pi-\arcsin\left(\frac{m+n}{2}\times\right.$ $\left.\times\sqrt{\frac{3}{m^2-mn+n^2}}\right)$. 12.190. $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$ ir $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}$. 12.191. $a(\pi-\alpha-$

$-\beta)\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.192.** $2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$. **12.194.** 2. **12.196.** $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **12.197.** $\frac{1}{4}\times$
$\times\sin2\alpha\sin2\beta$. **12.198.** $\frac{h}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}$. **12.199.** $\frac{\pi a^2}{18}(2-\sqrt{3})$. **12.200.** $\frac{a\sin\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.
12.201. $\frac{S}{\cos(\alpha/2)\sin^3 15^\circ}\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.202.** $\frac{4}{3}\times$
$\times\pi R^3\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$. **12.203.** $\frac{1}{12}a^3\operatorname{tg}\varphi$ ir $\frac{a^2}{4}\sqrt{3(4\operatorname{tg}^2\varphi+1)}$.
12.204. $\frac{a^3\sqrt{\cos2\alpha}}{\sin\alpha}$. **12.205.** $\frac{a\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$. **12.206.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$ ir $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{48}$.
12.207. $\frac{9p^3\operatorname{tg}^3(\alpha/2)}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. **12.208.** $\frac{\sqrt{3}p^3\sqrt{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}$. **12.209.** $2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$
ir $\frac{h^3}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **12.210.** $\frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **12.211.** $\frac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^3(\beta/2)}$. **12.212.** $\frac{b\sin\alpha}{4\cos^2(\alpha/4)}$.
12.213. $\frac{\sqrt{3}a^3\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$. **12.214.** $\frac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$ ir $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}$.
12.215. $\frac{16}{3}S\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{\frac{2S\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin2\alpha}}$. **12.216.** $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
12.217. $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. **12.218.** $\frac{a^3\sin^2\beta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{6\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.219.** $\frac{4}{5}$. **12.220.** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$.
12.221. $\frac{l}{3}\sqrt{5-4\cos2\alpha}$. **12.222.** $2\sqrt{\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}$. **12.223.** $\frac{2S}{3\cos(\alpha/2)}\times$
$\times\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.224.** $\frac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$. **12.225.** $\frac{1}{2}H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\times$
$\times\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **12.226.** $\frac{S\sqrt{2S\sin\alpha}\operatorname{ctg}\beta}{6\sin\alpha\cos(\alpha/2)}$. **12.227.** $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2(\beta/2)}{\cos\beta}$.
12.228. $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$. **12.229.** $\frac{4na^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}$. **12.230.** $\frac{1}{3}\pi R^3\times$
$\times\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha$. **12.231.** $\frac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$. **12.232.** $\frac{2\pi}{\sin2\alpha}$.
12.233. $\frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. **12.234.** $\frac{a(3+\cos2\alpha)}{4\sin2\alpha}$. **12.235.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{5}+1}$.
12.236. $\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.237.** $\frac{\pi c^3}{6}\sin2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **12.238.** $\arcsin\frac{4}{5}$.
12.239. $\frac{4-k}{4+k}$, $0<k<4$. **12.240.** $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$; $0<k\leqslant\frac{1}{8}$.

12.241. $\frac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\operatorname{ctg}\alpha)^2}$. **12.242.** $2\sin^2 2\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.
12.243. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(4\operatorname{ctg}^2\alpha+3)$. **12.244.** $-\frac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$. **12.245.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$;
$k\geqslant2$. **12.246.** $2\operatorname{arcctg}\pi$. **12.247.** $\frac{9\sin2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$. **12.248.** $2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$.
12.249. $\frac{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$. **12.250.** $\frac{\pi\operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{4\sin\alpha\cos^3(\alpha/2)}$. **12.251.** $\pi-\arccos\frac{n^2}{m^2}$.
12.252. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{k}{2\sin(\pi/n)}$; $0<k\leqslant2\sin\frac{\pi}{n}$. **12.253.** $\frac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$.
12.254. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **12.255.** $\frac{l}{2\cos^2(\alpha/2)}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.
12.256. $\frac{2}{3}R^3\sin2\beta\cos\beta\sin\alpha$. **12.257.** $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. **12.258.** $\frac{a^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\varphi}{(\operatorname{ctg}\varphi+2\operatorname{ctg}\alpha)^3}$.
12.259. $\frac{a(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{3a-b}$. **12.260.** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos(\beta/2)}$. **12.261.** $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\times\right.$
$\left.\times\sin\frac{\alpha}{4}\right)$. **12.262.** $\sin(\alpha\pm\beta)\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin2\beta}}$. **12.263.** $\frac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}$.
12.264. $\frac{2(m+n)H^2}{m-n}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **12.265.** $\frac{2\pi a^3}{3\cos\alpha\sin2\alpha\cos^2\frac{\pi q}{p+q}}$.
12.266. $\arccos(\sqrt{3}-1)$ ir $\frac{\pi}{2}-\arccos(\sqrt{3}-1)$. **12.267.** $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{k}$;
$k>\pi$. **12.268.** $\frac{H^3\cos\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\sin^2\alpha}$. **12.269.** $\frac{1}{4}\pi a^2(3\sin^2\alpha+1)\times$
$\times\operatorname{ctg}\alpha$. **12.270.** $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **12.271.** $\frac{l}{2}\sqrt{-\cos2\alpha}$. **12.272.** $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\times$
$\times\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **12.273.** $\frac{\pi l^3\sin2\alpha\cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.
12.274. $\operatorname{arctg}(\sqrt{2(k-1)})$. **12.275.** $\frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$,
12.276. $\frac{2V\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. **12.277.** $\frac{l^3\sin\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\beta}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}$.
12.278. $\frac{S\operatorname{tg}\beta}{6}\sqrt{S\sin\alpha}$. **12.279.** $\sqrt{-k}$; $-1<k<0$.
12.280. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$. **12.281.** $16k^2-1$. **12.282.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{30}$.
12.283. $\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. **12.284.** $2\operatorname{arctg}(2k\sqrt{3})$. **12.285.** $\frac{\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}{\pi-\arccos(\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha)}$.
12.286. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$. **12.287.** $\frac{24}{65}$. **12.288.** $\frac{3k}{k^2-2}$. **12.289.** $\arccos\frac{1}{k-1}$;

$k>2$. **12.290.** $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-2t}\cos\frac{\pi}{n}\right)$. **12.291.** $\frac{1+k}{2}$. **12.292.** $2\times\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$. **12.293.** $\frac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\pi-\alpha}{4}}$. **12.294.** $2a^3\cos^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

12.295. $2r^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.296.** $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$.

12.297. $\frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.298.** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.

12.299. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$ ir $\arcsin(\cos\alpha\sin\beta)$. **12.300.** $\frac{1}{4}$.

12.301. $\frac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.302.** $S\operatorname{tg}\varphi\times\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$. **12.303.** $\frac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$. **12.304.** $l^3\sin\alpha\times\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **12.305.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$. **12.306.** $\frac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$. **12.307.** $l^3\times\sin2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **12.308.** $\frac{a^2b}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$, $\alpha>\frac{\pi}{6}$.

12.309. $\arccos\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$. **12.310.** $\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.

12.311. $\frac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. **12.312.** $\frac{a\sqrt{3}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$.

12.313. $2H\sin^2\frac{\alpha}{4}$. **12.314.** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-8}}{2}$. **12.315.** $\frac{\pi a^3}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times\operatorname{ctg}\alpha$. **12.316.** $\arcsin\frac{6}{\pi k}$ ir $\pi-\arcsin\frac{6}{\pi k}$; $k\geqslant\frac{6}{\pi}$. **12.317.** $\frac{\pi a^3}{12}\sin^5\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

12.318. $\frac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}$. **12.319.** $\frac{n\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha\sin\frac{2\pi}{n}}{4\pi}$.

12.320. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.321.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3 2\alpha}{128\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. **12.322.** $\frac{\pi l^3\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$.

12.323. $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3V^2}}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}$. **12.324.** $\frac{a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$. **12.325.** $-\frac{b^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos3\alpha}$.

12.326. $\pi n^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}$. **12.327.** $\frac{\pi l^3\sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.328.** $\frac{\pi a^3}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\times$

$\times\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-3\operatorname{ctg}\alpha\right)$. **12.329.** $8\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.330.** $\frac{\sqrt{2}}{12}r^3\operatorname{tg}\beta\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.331.** $\frac{\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

12.332. $2\sqrt{\frac{2S}{\sin2\alpha}}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$. **12.333.** $p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\times\operatorname{tg}\beta$. **12.334.** $8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. **12.335.** $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\times\sin^2\beta\sin\alpha$. **12.336.** $\frac{l\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

12.337. $\operatorname{arctg}\left(\frac{3V\cos\frac{\alpha}{2}}{S}\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{S}}\right)$. **12.338.** $\frac{V^2}{V^2+a^6}$. **12.339.** $\frac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$.

12.340. $\frac{a}{2}\sqrt{2\cos\alpha}$. **12.341.** $\frac{4k^2}{4k^2+1}$. **12.342.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **12.343.** $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

12.344. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ ir $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$. **12.345.** $\frac{V}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$.

12.346. $\frac{1}{2}\arcsin(2(\sqrt{2}-1))$ ir $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(2\sqrt{2}-1))$.

12.347. $\arccos\left(-\frac{a^4}{S^2}\right)$. **12.348.** $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$. **12.349.** $\frac{23}{26}$.

12.350. $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$. **12.351.** $\operatorname{arctg}\frac{2(4+\sqrt{6})}{5}$.

12.352. $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.353.** arctg 2. **12.354.** $\frac{a^3}{12}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

12.355. $\frac{8\pi S\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{4}\right)}{\alpha-\sin\alpha}$. **12.356.** $\arccos\frac{3}{5}$. **12.357.** $\arcsin\frac{S}{l^2}\pm\frac{\pi}{3}$, $\arcsin\frac{S}{l^2}$. **12.358.** $4R^2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **12.359.** $\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{3}$.

12.360. $\frac{18\sqrt{7}}{49}l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. **12.361.** $\frac{nR^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\cos\beta}$.

12.362. $\frac{2a^2\sin\beta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. **12.363.** $\frac{2\pi d^2}{\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **12.364.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

12.365. $\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 2\alpha$. 12.366. $\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$.
12.367. $\frac{2\pi l^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$. 12.368. $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$. 12.369. $\frac{h^2\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin^2\beta}$.
12.370. $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sin\alpha}$ ir $\operatorname{arctg}\frac{2}{\cos\alpha}$. 12.371. $\frac{Ha\sin\alpha}{\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}}$.
12.372. $2\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{4k}}$. 12.373. $\frac{3\sqrt{3}H^3\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{8\sin\beta}$. 12.374. $\frac{7}{15}$.
12.375. $\frac{a^3\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$. 12.376. $\frac{\pi a^3\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. 12.377. $\frac{a^3}{3}\sin\alpha\times$
$\times\sin^4\frac{\alpha}{2}$. 12.378. $\frac{2}{3}R^3\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)$. 12.379. $\frac{2}{3}\pi R^3\sin 2\alpha\sin 4\alpha$.
12.380. $\arccos\frac{2}{\sqrt{8+\sin^2\alpha}}$. 12.381. $-\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. 12.382. $\sin\beta\sqrt{-\frac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$.
12.383. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. 12.384. $\frac{c^3}{36}\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 12.385. $\frac{1}{2}\pi a^3\cos\left(\frac{\pi}{3}-\right.$
$\left.-\alpha\right)$, kai $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 12.386. $\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k+3}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 12.387. $\frac{V}{3\pi}\sin\alpha\times$
$\times\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 12.388. $2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$ ir $\pi-2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$. 12.389. $\pi\frac{a^3}{3}\times$
$\times\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.] 12.390. $\frac{R\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$.
12.391. $\sqrt{a^2+b^2+2b(\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}\cos\alpha+b\sin^2\alpha)}$.
12.392. $\frac{4R^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2}$. 12.393. $\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$. 12.394. $4R\times$
$\times\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$. 12.395. $2\arcsin\frac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$ ir $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$, $0<$
$<m\leqslant\frac{1}{2}$. 12.396. $\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$ ir $\pi-\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$.
12.397. $\frac{h}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$. 12.398. $\frac{d^2}{8}\left(4\cos\frac{\alpha}{2}-\pi\times\right.$
$\left.\times\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.399. $\operatorname{arctg}\frac{2ah}{a^2-b^2}$. 12.400. $\frac{H^2}{2}\sin B\times$
$\times\cos(A-C)$. 12.401. $\frac{4a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. 12.402. $\operatorname{arctg}\frac{a^2-b^2}{4S}$. 12.403. $\arcsin\left(\frac{1}{k}\times\right.$
$\left.\times\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$ ir $\pi-\arcsin\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$; $k>\sqrt{2}$.
12.404. $3\arccos\frac{2+k}{2k}$ ir $\pi-3\arccos\frac{2+k}{2k}$. 12.405. $\frac{4\sqrt{3}\pm 3}{10}$. 12.406. $\frac{3}{5}$

arba 1. 12.407. $-\frac{23}{27}$. 12.408. $b^2\operatorname{ctg}\beta(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta))/4$.
12.409. $\frac{\cos A}{\cos B\cos C}$. 12.410. $0{,}5a\operatorname{ctg}\alpha$. 12.413. $R^2\sqrt{2}/4$. 12.414. $\operatorname{arcctg}(\sin\beta\times$
$\times\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\gamma))$ ir $\operatorname{arcctg}(\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\beta))$.
12.415. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ ir $\frac{\pi}{3}$. 12.416. $\frac{\pi}{3}$. 12.417. $\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{m+n}{m}}-\frac{\pi}{4}$. 12.418. $2\times$
$\times\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\sin\alpha)$. 12.419. $4\pi S\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. 12.420. $\frac{a\sqrt{3}}{3}\times$
$\times(\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha+1}-2\operatorname{ctg}\alpha)$. 12.421. $\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$. 12.422. $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.
12.423. $\frac{\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 12.424. $\frac{1}{12}(ab+b^2)^{3/2}\operatorname{ctg}\alpha$.
12.425. $\operatorname{arctg}\frac{2}{2k-3}$, $k>\frac{3}{2}$. 12.426. $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4b^2}{a^2}\right)$. 12.427. $\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}$.
12.428. $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$ ir $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$. 12.429. $\frac{\pi}{3}$.
12.430. arctg 2. 12.431. $2\arcsin\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$. 12.432. $\operatorname{arctg}\sqrt{9+3\sqrt{10}}$.
12.433. $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 12.434. $\frac{H^3\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\operatorname{tg}\alpha}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}$.
12.435. $\frac{a^2b}{4}\sqrt{3-4(\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)}$. 12.436. $\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\times$
$\times\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 12.437. $\frac{ab^2\sin\alpha}{2\cos\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$.
12.438. $\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{128\cos^5\frac{\alpha}{2}}$. 12.439. $\frac{a^3\sin 2\alpha\cos\alpha\sin\beta}{4\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$. 12.440. $2\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$
ir $3\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant k<\frac{3}{2}$. 12.441. $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.
12.442. $\arccos\frac{3}{4}$. 12.443. $\arccos\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{b}$. 12.444. $-\frac{1+3\cos 2\alpha}{4}$. 12.445. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha\times$
$\times\operatorname{tg}\beta)$. 12.446. $\operatorname{arctg}\frac{4V\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\sin\beta\sin\gamma}$. 12.447. $\frac{1}{3}$. 12.448. $\frac{1}{24}(a+b)^2\times$
$\times\sqrt{a(a-2b)}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. 12.449. $\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. 12.450. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$.
12.451. $\arccos(8k^2-1)$; $0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$. 12.452. $\frac{h^3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

12.453. $\frac{5}{12}$. **12.454.** $\frac{a^2}{8}\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha$. **12.455.** $\frac{2R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$. **12.456.** $\frac{3\sqrt{3}H^3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\alpha}{8}$. **12.457.** $\frac{H^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin 2\beta\sin\beta}$. **12.458.** $\frac{7a+3b}{144\cos\alpha}\times$ $\times\sqrt{3(a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha)}$. **12.459.** $\frac{H}{4}\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha(\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}-1)$. **12.460.** $\frac{\pi}{4}$ ir $\mathrm{arctg}\,2$. **12.461.** $\mathrm{arcctg}(4\pm2\sqrt{2})$. **12.462.** $\frac{2}{3}l^3\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin 2\beta$. **12.463.** $\frac{3\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$. **12.464.** $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{5}}{2}$. **12.465.** $\mathrm{arcctg}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}k\pi-27}{6}}$; $k>\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

13 skyrius

13.001. 48; 80; 12; 12. **13.002.** 200 kg. **13.003.** 40 l ir 30 l. **13.004.** 20 h ir 30 h. **13.005.** 48. **13.006.** 136 ha. **13.007.** 38,8%. **13.008.** 70 kg. **13.009.** 500. **13.010.** 125 m³. **13.011.** 6%. **13.012.** 20%. **13.013.** 7,1%. **13.014.** 80; 100; 90. **13.015.** 400 km. **13.016.** $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{12}{35}$. **13.017.** 520. **13.018.** 240 rb. **13.019.** 10 min. **13.020.** 12. **13.021.** 3. **13.022.** 240. **13.023.** 420 ir 400. **13.024.** 68 ha. **13.025.** 60 km. **13.026.** 6 h ir 2 h. **13.027.** 32. **13.028.** $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{20}{49}$. **13.029.** 5. **13.030.** 1260 rb, 1050 rb ir 945 rb. **13.031.** 150 km. **13.032.** Per 3 h 45 min. **13.033.** 8 ir 9,6. **13.034.** 720 ir 150. **13.035.** 5000 porų. **13.036.** 2,5 kg. **13.037.** 475 cnt, 480 cnt ir 375 cnt. **13.038.** 40; 32; 24. **13.039.** 13,2%. **13.040.** 900 rb, 360 rb ir 150 rb. **13.041.** 150 g ir 450 g. **13.042.** 26 ha. **13.043.** 105 km, 135 km ir 175 km. **13.044.** 1,8 t ir 3 t. **13.045.** 13,5 kg. **13.046.** Sieros 3 kg, salietros 19,5 kg, anglies 2,5 kg. **13.047.** 20 smuikininkų, 8 violončelininkai ir 4 trimitininkai. **13.048.** 2850 km, 2250 km ir 1950 km. **13.049.** 280; 200; 220. **13.050.** 49 rb 80 kp. **13.051.** Galima padidinti 2 dm. **13.052.** 3×4 km. **13.053.** 100 g ir 60 g. **13.054.** 3150 cnt ir 3450 cnt. **13.055.** 33. **13.056.** $\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ l ir $\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ l. **13.057.** 12 N, 16 N ir 20 N. **13.058.** $\frac{3l}{2(b-a)}$ m/s; turi prasmę, kai $b>a$. **13.059.** 45. **13.060.** 15 dm². **13.061.** 40 kp; 60 kp; 80 kp; 1 rb. **13.062.** 15. **13.063.** 21. **13.064.** 8. **13.065.** 48 ir 60. **13.066.** 175 kg ir 450 kg. **13.067.** 72 ir 98 žmonės. **13.068.** 75 rb ir 100 rb. **13.069.** Per 4 h. **13.070.** 450 m³. **13.071.** 20. **13.072.** 100 km. **13.073.** 5 m ir 8 m arba 19,5 m ir 22,5 m. **13.074.** Iš 1,25 m. **13.075.** 46 ir 40. **13.076.** 124 ha; 35 cnt iš 1 ha. **13.077.** 20 km ir 60 km. **13.078.** Automobilio greitis lygus 100 km/h arba 80 km/h; katerio greitis lygus 80 km/h arba 60 km/h. **13.079.** 56 km. **13.080.** 14 km/h ir 28 km/h. **13.081.** 48 km/h. **13.082.** 5 km/h ir 3 km/h. **13.083.** 60 km/h. **13.084.** 1 h 40 min ir 2 h 5 min. **13.085.** 3 h 20 min. **13.086.** 7. **13.087.** 5. **13.088.** $A(40;\ 0)$, $B(0;\ 30)$, $P(16;\ 18)$. **13.089.** 415 km. **13.090.** 1,5 kg. **13.091.** 120 kg ir 162 rb; 180 kg ir 252 rb. **13.092.** 950 rb; 400 rb, 250 rb ir 300 rb. **13.093.** 3165 g; ≈79,1%. **13.094.** 187,5 kg. **13.095.** 2,7 m. **13.096.** 30 km/h ir 60 km/h.

13.097. 88 km/h. **13.098.** 4 km/h ir 16 km/h. **13.099.** $\frac{-nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ km/h ir $\frac{nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ km/h. **13.100.** 32. **13.101.** 84 km; 6 km/h ir 4 km/h. **13.102.** 21 ir 12. **13.103.** 8 km; 4 km/h. **13.104.** 48 km/h. **13.105.** 48 min; 25 km/h. **13.106.** 850 km/h. **13.107.** Per 45 ir 30 dienų. **13.108.** 10,26 cnt ir 11,6 cnt. **13.109.** 12 km/h ir 10,5 km/h. **13.110.** 4 h ir 8 h. **13.111.** $\frac{\sqrt{tm(4s+tm)}-tm}{2t}$ km/h. **13.112.** Po 10 s. **13.113.** Po 17 min. **13.114.** $\frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$ km/h ir $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{4t}$ km/h. **13.115.** 140 km. **13.116.** 80 km/h. **13.117.** 20 km/h. **13.118.** 32 km/h ir 36 km/h. **13.119.** 24. **13.120.** 75 km/h. **13.121.** $v=\frac{s(t_2+t_1)}{2t_1t_2}$ km/h; $v_v=\frac{s(t_2-t_1)}{2t_1t_2}$ km/h; $s_{tikr}=\frac{s(t_2-t_1)^2}{2t_1t_2}$ km. **13.122.** Pusiaukelėje; 3 h. **13.123.** 40 km/h. **13.124.** 60 km/h ir 63 km/h. **13.125.** $\frac{s(a-b)}{b}$ km/h ir $\frac{s(a-b)}{a}$ km/h. **13.126.** 4 ir 6. **13.127.** ≈11 m. **13.128.** $\sqrt{v(v-s)}$ km/h; turi būti $v>s$. **13.129.** 14 h. **13.130.** $\frac{5}{12}$ km/h; 2 h ir 3 h. **13.131.** $\frac{5}{6}$ km/h; 5 h. **13.132.** $\frac{56}{3}$ min, 14 min ir 24 min. **13.133.** Per $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$ min, $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ min ir $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ min. **13.134.** $\frac{bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$ ir $\frac{-bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$. **13.135.** 45 h. **13.136.** 3 km/h. **13.137.** Per 6 min, 8 min ir 12 min. **13.138.** Per 14 ir 11 dienų. **13.139.** 64. **13.140.** 15 ir 12. **13.141.** 85 714. **13.142.** Per 132 min ir 110 min. **13.143.** $b+\sqrt{b(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b(b-a)}$; $\sqrt{b(b-a)}$ dienų; uždavinys turi sprendinį, kai $b>a$. **13.144.** 54. **13.145.** $\frac{3a-c+\sqrt{9a^2+2ac+c^2}}{2}$ km/h. **13.146.** 8; 4; 2 arba −6,4; 11,2; −19,6. **13.147.** 10×20 cm. **13.148.** 3 cm. **13.149.** −220 ir 264. **13.150.** 3·3−4. **13.151.** $\frac{l(a+b)}{2ab}$ m/s ir $\frac{l(a-b)}{2ab}$ m/s. **13.152.** 40×50 m. **13.153.** 149 m ir 100 m. **13.154.** 12 kp ir 80 kp. **13.155.** 120 rb. **13.156.** 4 km/h. **13.157.** 32. **13.158.** 85 kg. **13.159.** 2160 rb. **13.160.** 23. **13.161.** $\frac{\sqrt{b^2k^2+400abk}-bk}{2b}$. **13.162.** 1 rb; 900 kg. **13.163.** 21 cnt ir 20 cnt. **13.164.** 2 rb. **13.165.** 20 ir 120. **13.166.** 1632. **13.167.** 18 km/h ir 12 km/h. **13.168.** 2. **13.169.** 35 : 12. **13.170.** 24 ha ir 27 ha. **13.171.** 38, 31, 5, 7 ir 9. **13.172.** 18 ir 24. **13.173.** 71. **13.174.** 12 kg. **13.175.** $\frac{68}{3}$ km/h. **13.176.** 540 l, 450 l ir 630 l. **13.177.** Per dešimt mėnesių. **13.178.** 50 ha ir 60 ha. **13.179.** 3 sūnus ir 2 dukteris. **13.180.** $\frac{5}{9}$ ir $\frac{10}{9}$. **13.181.** 9. **13.182.** 50 g, 150 g ir 200 g. **13.183.** 20 eilių, po 25 kėdes kiekvienoje eilėje. **13.184.** 75 ir 60. **13.185.** 24 g ir 30 g. **13.186.** 16. **13.187.** Per 40 dienų; 25%.

13.188. $\frac{-kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$ ir $\frac{kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$. **13.189.** $\pm0,5$. **13.190.** ≈85 g. **13.191.** 2 N ir 26 N. **13.192.** 12 l, 8 l ir 7 l. **13.193.** Per 3 h 20 min. **13.194.** 4 m ir 5 m. **13.195.** 96 m; per 14 h. **13.196.** 56 km/h ir 84 km/h. **13.197.** 6 min ir 10 min. **13.198.** 280% ir 175%. **13.199.** 600 m. **13.200.** 90 rb ir 135 rb. **13.201.** $\frac{\sqrt{b^2+32a^2}-b+4a}{2}$ m ir $\frac{\sqrt{b^2+32a^2}+b+4a}{2}$ m. **13.202.** 3 h. **13.203.** 2 km/h ir 5 km/h. **13.204.** 12 h ir 24 h. **13.205.** 37. **13.206.** 202. **13.207.** 65 km/h ir 100 km/h. **13.208.** 24. **13.209.** Po 4 min. **13.210.** 40%. **13.211.** 842. **13.212.** $\frac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$; $a>0$, $b>0$, $n>0$. **13.213.** Per 50 h ir 75 h. **13.214.** 4 : 1. **13.215.** Po 50 min. **13.216.** 40 km/h ir 50 km/h. **13.217.** $\frac{4b\pm3at+\sqrt{16b^2+9a^2t^2}}{6t}$ km/h; $4b>3at$. **13.218.** 16 ir 52. **13.219.** ≈55 metus. **13.220.** 3 km/h. **13.221.** 80 km. **13.222.** 80 km/h. **13.223.** 1 km/h. **13.224.** Prieš 4 dienas. **13.225.** 1 h ilgiau. **13.226.** 16 h ir 10 h. **13.227.** 10 h ir 8 h. **13.228.** 12 h ir 15 h. **13.229.** 12, 8, 3, 2. **13.230.** 13 ir 63. **13.231.** 5% ir 11%. **13.232.** 3 km/h ir 45 km/h. **13.233.** Prieš 4 dienas. **13.234.** 20% ir 60%. **13.235.** $\frac{2}{3}$. **13.236.** Prie 20 lentų. **13.237.** Prirašytas skaitmuo yra arba 0, arba 3, arba 8; pirmuoju atveju sugalvotas skaičius 2, antruoju — skaičius 3, trečiuoju — skaičius 4. **13.238.** Iš 16 šūvių 6 taiklūs. **13.239.** 50. **13.242.** 60 m^3 ir 90 m^3. **13.243.** 120, 90 ir 70 kibirų. **13.244.** Bus truputį neapsemti. **13.245.** 62 m^3. **13.246.** 1225 skritulių kiekvienai figūrai. **13.247.** 300 kg. **13.248.** 6,75 rb ir 4,5 rb; kiekviename rietime buvo po 5,6 m. **13.249.** 18. **13.250.** 24. **13.251.** 1 h 5 $\frac{5}{11}$ min. **13.252.** Per 56 s. **13.253.** 65 m^3 ir 20 m^3. **13.254.** Po $\frac{45v_2(v_3-v_1)}{v_3(v_2-v_1)}$ min. **13.255.** $\frac{22}{15}$ m/s. **13.256.** $D=\frac{L^2+H^2-Hd}{H}$. **13.257.** 30 km/h. **13.258.** $\frac{b(n-1)}{a-c}$ km/h; $n>1$, $a>c$. **13.259.** 270 km. **13.260.** 60°. **13.261.** 6 km/h, 9 km/h ir 12 km/h; 42 km. **13.262.** Po 7 s nuo to momento, kai pradeda kristi pirmas kūnas. **13.263.** 360 km. **13.264.** 3 m/s. **13.265.** $a+2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. **13.266.** 500 m. **13.267.** 100 km/h. **13.268.** $\frac{vd}{a-b}$ m/s; $a>b$. **13.269.** 1 h 21 min; 1 h 20 min; 6 km. **13.270.** $\frac{60v_1v_2}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}$ km/h. **13.271.** 24 km. **13.272.** 45 km/h. **13.273.** Per 5 s; likus 0,5 m iki aikštės linijos. **13.274.** 100 km/h. **13.275.** 8 h 15 min; 8 h 53 min; 9 h 16 min; 10 h 01 min. **13.276.** 12 km, 40 km ir 50 km. **13.277.** 1375 km. **13.278.** 50 km/h. **13.279.** $\frac{2ab}{a+b}$ m/min, $\frac{2ab}{3b-a}$ m/min, $\frac{2ab}{a+b}$ m/min, $\frac{2ab}{3a-b}$ m/min; čia $\frac{b}{3}<a<3b$. **13.280.** Per 58,5 min. **13.281.** $\frac{a+3b+\sqrt{a^2-10ab+9b^2}}{4}$ km/h. **13.282.** $\frac{v+\sqrt{9v^2+6sv}}{v}$ h. **13.283.** Iš

pradžių abu ėjo vienodu 3 km/h greičiu. **13.284.** 75,6 km/h; 147 m. **13.285.** 24 min. **13.286.** $AB=\frac{3c\beta}{4}$ km; $BC=\frac{\beta c(4\alpha-3\beta)}{4(2\alpha-\beta)}$ km ($\alpha>\beta$). **13.287.** $2a$. **13.288.** Per 24 h. **13.289.** 170 kg. **13.290.** 4 h ir 6 h. **13.291.** 20 h, 30 h ir 24 h. **13.292.** Per 15 ir 7,5 dienos. **13.293.** Per 6 h ir 8 h. **13.294.** $\frac{0,4an}{11-n}$; $\frac{0,24an}{n-9}$; $n=10$. **13.295.** Per $\frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n-n^2}}{2a}$ h. **13.296.** Per 20 h ir 30 h. **13.297.** $\frac{c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ ir $\frac{-c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ km/h. **13.298.** $\frac{1}{80}$ ir $\frac{1}{90}$. **13.299.** 12° arba 60°. **13.300.** 12 m/s ir 3 m/s; 360 m. **13.301.** 10, 20 ir 30 krumplių. **13.302.** 3 m/s ir 4 m/s. **13.303.** 300 ir 600. **13.304.** 20 ir 30. **13.305.** 42 ir 35. **13.306.** 196 km; 84 km/h. **13.307.** 964. **13.308.** 15 arba 95. **13.309.** 9 g ir 10 g. **13.310.** 40 t ir 100 t. **13.311.** 100 km/h ir 60 km/h. **13.312.** Per 14,4 h. **13.313.** $\frac{4}{15}$. **13.314.** 9 ir 2. **13.315.** 20%. **13.316.** $\approx41,4$%. **13.317.** 3 h 40 min ir 2 h 12 min. **13.318.** ≈28. **13.319.** 2 l. **13.320.** 5. **13.321.** 824 ir 428. **13.322.** $\approx2,77$ kg. **13.323.** 35 kg ir 45 kg. **13.324.** 116 rb. **13.325.** 5. **13.326.** 30 km/h. **13.327.** 13 l, 7 l ir 4 l. **13.328.** 100 cnt. **13.329.** $\frac{a(\sqrt{s}+\sqrt{r})}{\sqrt{s}-\sqrt{r}}$ dienų; čia $s>r$. **13.330.** 10 h ir 15 h arba po 12 h. **13.331.** 25 rutuliukai ir 16 žiedų arba 16 rutuliukų ir 25 žiedai. **13.332.** 200 h ir 140 h. **13.333.** Po 5 smūgių. **13.334.** 45 m, 36 m ir 30 m. **13.335.** 53. **13.336.** Birželio 28 dieną. **13.337.** Per 15 darbo dienų, arba birželio 17 dieną. **13.338.** 285 714. **13.339.** $a°+b°-c°$. **13.340.** 3. **13.341.** Pirmąją vietą — trečias darbininkas, antrąją — antras, trečiąją — pirmas. Jų pagamintos produkcijos kiekių santykis lygus 5 : 4 : 3. **13.342.** Išvykusio iš *B*. **13.343.** $p=5a$, $q=5$. **13.344.** 3 : 4 : 5. **13.345.** Po 43 $\frac{7}{11}$ min. **13.346.** 1. **13.347.** 12 ir 1232. **13.348.** $\frac{a+2b+\sqrt{a^2+4bc}}{2}$ h ir $\frac{2c-a+\sqrt{a^2+4bc}}{2}$ h. **13.349.** 4 km. **13.350.** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ kartų. **13.351.** a) 3 km/h; b) 4 km/h; c) 5 km/h. **13.352.** 88 s. **13.353.** 159 ir 234. **13.354.** 31 ir 41. **13.355.** 60 km/h. **13.356.** 105 m. **13.357.** 16 km/h. **13.358.** 142 857. **13.359.** 21 ir 10. **13.360.** $0<v\leqslant20$ km/h. **13.361.** 14 raudonų ir 19 mėlynų. **13.362.** 9 ir 35. **13.363.** $\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$; $\frac{1}{2}-\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$. **13.364.** $\sqrt[k-1]{k}$. **13.365.** 240 km. **13.366.** $5<v\leqslant15$. **13.367.** 180 rb. **13.368.** 2,5 t. **13.369.** 11 liepų ir 5 beržai. **13.370.** 12. **13.371.** $1\leqslant h\leqslant b$; čia $b\approx1,4$ m. **13.372.** 18. **13.373.** 8 uždaviniai; 127,5 min. **13.374.** 16 h. **13.375.** 421. **13.376.** 211. **13.377.** 421. **13.378.** 2,4 kg ir 4,8 kg. **13.379.** $\frac{kp\pm\sqrt{2kp^2-k^2p^2}}{2k}$, $k\leqslant2$; labiausiai vertė sumažėja 2 kartus. **13.380.** $\frac{25-a\pm\sqrt{D}}{2a}$ kg ir $\frac{25+a\pm\sqrt{D}}{2a}$ kg; čia $D=a^2-130a+625$, be to, kai $a>5$, sprendinių nėra; kai $0<a<5$,— du sprendiniai, kai $a=5$,— vienas sprendinys (3 ir 2 kg). **13.381.** Kai $s\geqslant\frac{pq}{100r}$,

30. Užsak. Nr. 1941.

tai vartotojai nutolę nuo B atstumu, ne didesniu kaip $\frac{s}{2}-\frac{pq}{200r}$. O jeigu $s<\frac{pq}{100r}$, tai bet kuriai įmonei, esančiai kelyje AB, pigiau pirkti anglis iš A. **13.382.** $R\pm\sqrt{2a^2-3R^2}$; $\frac{3R^2}{2}\leqslant a^2<2R^2$. **13.383.** 20; 6 h. **13.384.** Per 3 h. **13.385.** Kai $c<\frac{h}{m}$, pirmasis modelis; kai $c>\frac{h}{m}$, antrasis modelis; kai $c=\frac{h}{m}$, tai abu vienodai. **13.386.** $\frac{a(3\pm\sqrt{3(4m-1)})}{6}$; $\frac{1}{4}<m<1$. **13.387.** $a+a\sqrt{2}$h. **13.388.** $\frac{100s-r(50+s)}{(3s-r)a}$ m/s ir $\frac{100s-r(50+s)}{(r-s)a}$ m/s; čia $s<r<\frac{100s}{50+s}$. **13.389.** 2 kartus. **13.390.** $5+5\sqrt{2}\approx12$ km. **13.391.** 10 valandą 29 minutės. **13.392.** 6,4 km. **13.393.** $\frac{d(k-1)}{2Tk}\pm\frac{d}{2t}\left(1-\sqrt{1+\frac{t^2(k-1)^2}{T^2k^2}}\right)$. **13.394.** 1 h. **13.395.** Kas 4 min; 3 kartus. **13.396.** $\frac{3(-a+\sqrt{a^2+240a})}{2a}$ h ir $\frac{-3(3a-\sqrt{a^2+240a})}{2a}$ h; čia $a<30$. **13.397.** $\frac{4p-2q}{t}$ km/h ir $\frac{2p}{t}$ km/h; $3p-q$ km; čia $0\leqslant q<2p$, $p>0$, $t>0$. **13.398.** 60 km/h. **13.399.** 10 h. **13.400.** 340 km. **13.401.** $\frac{s(-a+\sqrt{a^2+240at})}{120t}$ m. **13.402.** 500 l, 1000 l ir 1500 l. **13.403.** Trečia. **13.404.** 120. **13.405.** 8 km. **13.406.** Per 80 s. **13.407.** $\frac{31b}{130v}$ h. **13.408.** 11 cm/s ir 7 cm/s. **13.409.** Nuo 2,5 km/h iki 3 km/h. **13.410.** 1 cm/s ir 4 cm/s. **13.411.** $\frac{vt+\sqrt{2a^2-v^2t^2}}{2v}$; $a=\frac{vt}{\sqrt{2}}$. **13.412.** $0<a<68$. Kai $a=5$, atstumas tarp ūkių lygus 60 km, 40 km ir 25 km. **13.413.** 40%, 50% ir 10%. **13.414.** $\frac{\sqrt{b^2c^2+4abc}-bc}{2c}$ km, a, b, c — bet kurie teigiamieji skaičiai. **13.415.** 10 h ir 15 h. **13.416.** 6400 l ir 600 l. **13.417.** Praėjus $\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ min nuo skrydžio pradžios. **13.418.** $2ak$ km. **13.419.** 36 km/h ir 54 km/h. **13.420.** $\frac{3m+\sqrt{9m^2+2500t^2v^2}}{50t}$ km/h. **13.421.** 53. **13.422.** Per $b+\sqrt{b(b-a)}$ dienų. **13.423.** 21; 6 h. **13.424.** $a+\frac{-(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$; $b+\frac{-(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$; $\frac{-c(a+b)+c\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$; $c>1$. **13.425.** Pirmoje $\frac{an(n-2)}{(n-1)^2}$ cm³; antroje $\frac{a(n^2-2n+2)}{(n-1)^2}$ cm³; visose kitose po a cm³. **13.426.** Per 4 h ir 12 h. **13.427.** Per 96 min arba per 5 min. **13.428.** 4 kartus. **13.429.** $\frac{3a+2c+\sqrt{4c^2-20ac+9a^2}}{4}$ km/h. **13.430.** 10 kartų. **13.432.** Po

$\frac{ab}{\sqrt{a^2+4ab}}$ s. **13.433.** $\frac{1000(2,5a+sp)}{2000-sn}$ rb. Uždavinys turi sprendinį, kai $sn<2000$. **13.435.** 423. **13.436.** 7,7 h. **13.437.** Iš 11. **13.438.** 4 g/cm³. **13.439.** 77 arba 86. **13.440.** $M(a\sqrt{3}-a;\ 0)$; $P(0;\ a\sqrt{3}-a)$. **13.441.** $\frac{l(3k+1)}{k+3}$ m. **13.442.** 300 rb ir 150 rb. **13.443.** $\frac{p(n+1)}{n-1}$; $\frac{1}{3}$. **13.444.** 3; 4; 5. **13.445.** $r_1=\frac{-r+\sqrt{6R^2-3r^2}}{2}$; $r<r_1\leqslant R$, kai $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leqslant\frac{r}{R}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $r_1<r<R$, kai $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{r}{R}\leqslant1$. **13.446.** $\frac{24+s-\sqrt{s^2+288}}{2}$ km ir $\frac{24-s-\sqrt{s^2+288}}{2}$ km; $s<6$. **13.447.** 22 cm². **13.448.** 70 km/h. **13.449.** 121. **13.450.** 10 metų ir 5 metai.

14 skyrius

14.001. $\frac{1}{2}$, kai $m>0$; $-\frac{1}{2}$, kai $m<0$. **14.002.** $\sqrt[4]{b-a}$; čia $b>a$. **14.003.** ctg 33°. **14.004.** $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$. **14.005.** $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$. **14.006.** $\frac{1}{3}$. **14.007.** 35. **14.008.** 0; $-\frac{1}{3}$. **14.009.** 2. **14.010.** $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **14.011.** 64. **14.012.** $2^{-\sqrt{6}/2}$; $2^{\sqrt{6}/2}$. **14.013.** 4,5; 6. **14.014.** 10^{-6}; 10^{3}. **14.015.** $\sqrt{26}$. **14.016.** 3; $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **14.017.** 6; $\frac{1}{6}$. **14.018.** 5. **14.019.** $\frac{1}{16}$; 4. **14.020.** 3. **14.021.** 0,01; 100. **14.022.** 2. **14.023.** 1. **14.024.** $\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **14.025.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. **14.026.** $(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **14.027.** (3; 2). **14.028.** (2; 1); (−2; −1). **14.029.** (0; 2); (2; 0). **14.030.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. **14.031.** (1; 1); (4; 2). **14.032.** $(2^{\sqrt[3]{4}};\ 2^{2\sqrt[3]{2}})$. **14.033.** 6. **14.034.** Su $p=\pm12$. **14.035.** 117. **14.036.** Ne. **14.037.** Vieną. **14.039.** −2; −1; 3. **14.040.** 2. **14.042.** Tris. **14.044.** Keturis. **14.045.** $\frac{-(3+\sqrt{16m-7})}{4}$; $\frac{-3+\sqrt{16m-7}}{4}$, kai $m\geqslant\frac{7}{16}$; $x_1=x_2=-\frac{3}{4}$, kai $m=\frac{7}{16}$. **14.046.** 55. **14.047.** $-\frac{2}{3}$; 1. **14.048.** 1. **14.049.** 0. **14.051.** Ne. **14.053.** Kai $m=3$, neturi sprendinių; kai $m=-3$, turi be galo daug sprendinių. **14.054.** Minusas. **14.055.** Minusas. **14.056.** Minusas. **14.057.** $a^{1/a}$; čia $a>0$, $a\neq1$. **14.058.** 12,5. **14.059.** 4. **14.060.** 3. **14.061.** $-\frac{1+2a}{a}$. **14.062.** $\frac{1}{a^2}$. **14.063.** $\frac{b+3a-2}{2a}$. **14.064.** 0. **14.065.** 0. **14.066.** 0. **14.067.** 0. **14.068.** 0,3010. **14.069.** $\frac{2(2+m)}{2-m}$. **14.070.** Minusas. **14.071.** Pliusas. **14.073.** Teisinga, kai $a=$

$=\frac{b}{b-1}$, čia $b>1$. **14.076.** $[-2; 1]\cup[2; \infty)$. **14.077.** $(-3; 0)\cup(2; \infty)$. **14.078.** $(-4; 0)\cup(0; 4)$. **14.079.** $(-1; 1)\cup(2; \infty)$. **14.080.** $(-\infty; -3)\cup(-1; 1)\cup(3; \infty)$. **14.081.** $(-3; -2)\cup(2; 3)$. **14.082.** $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right]\cup(3; \infty)$. **14.083.** $(2; 3)$. **14.084.** $(2; 4)\cup(4; 6)$. **14.085.** $(0; \infty)$. **14.086.** $(-2; 0)\cup(2; \infty)$. **14.087.** $(-2; 1)\cup(3; \infty)$. **14.088.** $(-3; -2)\cup(0; 1)$. **14.089.** $(-3; 2)$. **14.090.** $(0; 1)\cup(100; \infty)$. **14.091.** $(0; 1)$. **14.092.** $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. **14.093.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)\cup[\sqrt{2}; \infty)$. **14.094.** $(0; 0{,}04]$. **14.095.** $(1; \sqrt{3})$. **14.096.** $(-2; 2)$. **14.097.** $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$. **14.098.** $(0; 1)$. **14.099.** $[2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **14.100.** $\left(\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{5\pi}{12}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **14.101.** a) $\left(2\pi n-\frac{7\pi}{6}; 2\pi n+\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; b) $\left(\pi n-\frac{\pi}{6}; \pi n+\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **14.104.** $(0; 1)$. **14.105.** $3^{400}>4^{300}$. **14.106.** $\left(-\frac{1}{3}; 4\right)$. **14.107.** $(1{,}2; 2)$. **14.108.** $[-3; -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2}; 3]$. **14.135.** Ne. **14.137.** $-b$. **14.142.** $[2; 3)\cup(3; 4]$. **14.143.** $(-\infty; -1)\cup(-1; 1)\cup(1; \infty)$. **14.144.** $\left(-3; -\frac{2}{3}\right]$. **14.145.** $(0; 1)$. **14.146.** $(-\infty; 0]$. **14.147.** $(0; 1)$. **14.148.** $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. **14.149.** $[0; 2]$. **14.150.** $[-13; 13]$. **14.161.** $y_{min}=2$. **14.162.** $y_{min}=4$. **14.163.** $y_{max}=2$. **14.166.** $\frac{1}{n}$. **14.167.** $\frac{n+3}{n+1}$. **14.168.** $\frac{n+2}{n+1}$. **14.169.** $\frac{1}{n+2}$. **14.171.** Ne; taip. **14.173.** $\frac{1}{2}$. **14.174.** a) ir b) Didėjanti; c) nemonotoninė; d) mažėjanti. **14.175.** $-6; -5; -4; -2; -1; 0$. **14.177.** Ne. **14.179.** 66. **14.180.** $\frac{n(m+1)}{n+1}$. **14.184.** 32%. **14.185.** 1000^q. **14.186.** 4,56. **14.188.** $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{2}+2+\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{4}}{2}$. **14.189.** a) $0{,}8^{-1{,}4}$; b) $\log_{1/3}0{,}5$. **14.190.** 31. **14.192.** $2^{14}+2^{12}+\ldots+2^2+2^0$. **14.193.** 1,875 h. **14.194.** 7,5 h. **14.195.** a) $a_n=2n-1$, $n\in \boldsymbol{N}$; b) ne. **14.196.** $a-b$. **14.198.** $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. **14.199.** $0{,}5(2a^2\pm\sqrt{2(a^4+b^4)})$. **14.200.** $(x^4+\sqrt{2}x^2y^2+y^4)(x^4-\sqrt{2}x^2y^2+y^4)$. **14.201.** $(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$. **14.202.** $y=-4x^2-6x+1$. **14.203.** Aibė keturkampių, kurių įstrižainės viena kitai statmenos. **14.205.** $(-\infty; 1)\cup(1; \infty)$. **14.208.** $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-2\sqrt{y})$. **14.209.** $\left(2; 1+\frac{\sqrt{12}}{3}\right]$. **14.210.** Sudėtinis. **14.215.** Ne. **14.216.** $(-5; 3)$. **14.222.** Ne. **14.227.** Taip. **14.241.** $\lg^2 x+\lg^2 y=1$. **14.242.** $\lg^{2/3}u+\lg^{2/3}v=1$. **14.243.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$; čia $n\in \boldsymbol{Z}$. **14.244.** $\mathrm{arcctg}\frac{1-q}{p}$; čia $1<q\leqslant\frac{p^2}{4}$. **14.245.** $\mathrm{tg}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$. **14.249.** $y>1$, kai $k=0$; $y\geqslant1$, kai $k=1$, $y=1$, kai $k=2$, $0<y\leqslant1$, kai $k=3$. **14.251.** $\sin^2 6°=0{,}5(1-\sqrt{1-\sin^2 12°})$. **14.252.** a) Ne; b) ne. **14.253.** Taip. **14.254.** a) 6π;

b) 30π. **14.255.** $\frac{\pi}{3}$. **14.257.** $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **14.259.** Su $\alpha+\beta=2\pi n$, arba su $\alpha=2\pi n$ ir su bet kuriuo β, arba su $\beta=2\pi n$ ir su bet kuriuo α $(n\in \boldsymbol{Z})$. **14.260.** $y_{max}=\frac{3}{4}$. **14.261.** $y_{max}=\sin 1$. **14.262.** $y_{min}=2$, $y_{max}=3$. **14.263.** tg 1. **14.264.** $\frac{m-1}{m+1}$, kai $m\neq1$, $m\neq-1$. **14.265.** $-\frac{23}{36}$. **14.266.** Minusas. **14.267.** $\frac{\pi}{4}$. **14.268.** $\frac{\pi}{4}$. **14.269.** $m=-\frac{1}{4}$, $M=\frac{1}{4}$. **14.271.** $(3; 1)$. **14.272.** Ne. **14.273.** a) „$<$"; b) „$<$"; c) „$>$"; d) „$<$". **14.302.** $-\frac{7}{24}$. **14.303.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.304.** $\frac{3+8\sqrt{2}}{15}$. **14.306.** $\sqrt[512]{a^{511}}$. **14.309.** Ne. **14.310.** $y=x$; čia $x>0$, $x\neq1$. **14.311.** 0, $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$. **14.313.** $[-6; -5]\cup[0; 1]$. **14.316.** Apibrėžimo sritis $(2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; reikšmių sritis $(-\infty; 0]$. **14.317.** $2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **14.318.** Nė su viena x reikšme. **14.319.** $y_{min}=2$, kai $1\leqslant x\leqslant3$. **14.320.** Suprastinama tik tada, kai skaičiai $a+b$ ir $a-b$ dalijasi iš 4 arba turi didžiausią bendrą daliklį $k>2$. **14.321.** Ne. **14.322.** $(a-1)(a+3)(a^2+3)$. **14.323.** $(0; 1)\cup(1; \infty)$. **14.324.** $(0; \infty)$. **14.327.** $(-\infty; \infty)$. **14.328.** $\frac{1}{b_1^{-1}+b_2^{-1}+\ldots+b_k^{-1}}$. **14.329.** a) 9×10^n; b) 0. **14.330.** $x=a$, $y\neq b$, kai $c=0$; $(a+c; b+1)$, $(a-c; b-1)$, kai $c\neq0$. **14.331.** 2 kv. vnt. **14.332.** $y_{max}=\frac{1}{10}$. **14.333.** $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **14.335.** Minusas. **14.336.** Ne. **14.337.** $-\frac{31}{11}$; 3. **14.338.** $(2; 9)$. **14.339.** $(1; 2; 3)$. **14.340.** -1. **14.341.** $(k+1)^3(k-1)^2$. **14.342.** 0. **14.343.** $y_{max}=6$. **14.344.** $y_{max}=2$. **14.345.** 2, 4. **14.346.** $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\pm\sqrt{2n+\frac{2}{3}}$; $\pm\sqrt{2n-\frac{2}{3}}$, $n\in \boldsymbol{N}$. **14.347.** $4n^2$; čia $n\in Z$, $n\geqslant0$. **14.348.** $x=0$, kai $a\in \boldsymbol{R}$. **14.349.** 2. **14.350.** $\frac{1}{1-2^x}$. **14.353.** Ne. **14.354.** 2; $-\frac{2}{9}$. **14.355.** $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$. **14.356.** $x^4-8x^2+4=0$. **14.357.** 2. **14.358.** $y_{min}=4$. **14.359.** a) Ne; b) taip; c) ne. **14.361.** $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. **14.362.** $x=17$. **14.363.** -2; 1; 2. **14.364.** $(-1{,}25; -1)\cup(9; \infty)$. **14.365.** $[-9; -1]\cup[0; 1]$. **14.367.** $\frac{5\sqrt[3]{5}}{3}$. **14.368.** $a=1$. **14.369.** $y=-2x^2-x+3$. **14.370.** $(0; 1)$. **14.371.** -1; 0; 1; 4; 5; 6. **14.372.** $[0; 3)$. **14.373.** $(-\infty; 2]\cup[6; \infty)$. **14.374.** $(-\infty; 2]\cup(4; 6)\cup[8; \infty)$. **14.375.** $(-\infty; -1)\cup[0; 1)$. **14.376.** $[-1; 0{,}11]$. **14.377.** $k=7$. **14.378.** -3; -2; 0; 1. **14.379.** a) 1; b) ±3; ±2; ±1; 0. **14.380.** $\left(-3; -\frac{5}{3}\right)$. **14.381.** $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)\cup(3; \infty)$. **14.382.** $(0; 1)$. **14.383.** $(3; 4)\cup(5; \infty)$. **14.384.** $\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$; $\pi n-\frac{\pi}{6}<x<\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **14.386.** 2; 3. **14.387.** $(2; 1)$. **14.389.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $y_{min}=4$. **14.390.** $y_{max}=$

$=\sqrt{2}$, kai $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. **14.392.** (3; 6). **14.394.** $(-\sqrt{3};\ 4)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ 2)$, $(\sqrt{3};\ 4)$. **14.395.** $(-3;\ 57)$, $(2;\ 2)$. **14.396.** $(-\infty;\ -7]$. **14.397.** $k=4$. **14.398.** $(-\infty;\ -2)$, $(2;\ \infty)$, 0. **14.399.** $[1;\ 4-2\sqrt{2})\cup(4+2\sqrt{2};\ 7]$. **14.400.** $[-1;\ 0)\cup(8;\ 9]$. **14.401.** $(-2;\ 0)$, $(2;\ 0)$. **14.402.** $(0;\ 25)$. **14.403.** $(2;\ 4)$. **14.404.** 16. **14.405.** $(10^5;\ 0)$, $(10^{-1};\ 0)$. **14.406.** 1; 2. **14.407.** $(-\infty;\ -3)\cup[-2;\ 0)\cup(0;\ 3)\cup[5;\ \infty)$. **14.408.** $(0;\ 0{,}5)\cup[1;\ 2]$. **14.409.** $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)\cup[3;\ \infty)$. **14.410.** $(1;\ 4]$.

15 skyrius

15.001. -3. **15.002.** $\frac{4}{5}$. **15.003.** 0. **15.004.** $-\frac{145}{42}$. **15.005.** -5. **15.006.** 1. **15.007.** 0,25. **15.008.** -1. **15.009.** 1,5. **15.010.** 4. **15.034.** e^{-1}. **15.035.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2{,}5)$. **15.036.** $[-4;\ -3]$. **15.037.** 3; 4. **15.038.** 1. **15.039.** $\frac{4}{9}$. **15.040.** $\frac{2}{3}$. **15.041.** -2. **15.042.** $\frac{1}{8}$. **15.043.** $\frac{1}{8}$. **15.044.** -2. **15.045.** 0. **15.046.** $-0{,}5$. **15.047.** 1. **15.048.** $\frac{1}{30}$. **15.049.** 39. **15.050.** $\frac{7}{6}$. **15.051.** 1. **15.052.** $-0{,}5$. **15.053.** $3\ln 2$. **15.054.** $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. **15.055.** $0{,}5\ln 2$. **15.056.** -3. **15.057.** -1. **15.058.** $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. **15.059.** 1. **15.060.** a) $f''(1)=3-4\cos 2$; $f''(\pi)=2\ln\pi-1$; b) $f''(3)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\sin 1$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{18}$. **15.061.** $y'(0)<0$. **15.062.** Mažėja nuo 1,5 iki 0,25. **15.063.** $y=x-e$. **15.064.** -8; 72. **15.065.** $[-8;\ 8]$. **15.066.** $y=3x-\pi$. **15.068.** Didėja nuo 0 iki $\ln 9$. **15.069.** $[-1;\ 4]$ ir $(-1;\ 4)$. **15.071.** $a=-1$, $b=1$. **15.072.** 45°. **15.073.** $x_1=2\pi k$, $x_2=2\pi k-2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, $k\in Z$. **15.074.** $x_1=0$, $x_2=-\frac{7}{3}$. **15.075.** Ne.

15.076. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C, \text{ kai } x\geqslant 0,\\ -\frac{x^2}{2}+C, \text{ kai } x<0.\end{cases}$ **15.077.** a) $y''+4y=0$; b) $y''+0{,}36y=0$. **15.078.** a) $y=Ce^{-36x}$; b) $y=A\cos(6x+\varphi)$. **15.083.** Pirmoji — ne, antroji — taip. **15.084.** $a>3$. **15.085.** $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. **15.086.** $y=x+1$. **15.087.** $(4;\ 0)$, $(1;\ -27)$. **15.089.** $\frac{\pi}{3}$. **15.091.** $(3;\ -2)$, $\left(-1;\ \frac{2}{3}\right)$. **15.092.** $\left(2;\ \frac{8}{3}\right)$, $\left(3;\ \frac{7}{2}\right)$. **15.093.** $\frac{3\pi}{4}$. **15.094.** $\frac{\pi}{4}$. **15.095.** $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{15}{32}\right)$. **15.096.** $y=\frac{1}{e}x$. **15.097.** Per tašką $(-5;\ 45)$: $y=-20x-55$ ir $y=-13x-20$; per tašką $(2;\ 3)$: $y=8x-13$ ir $y=x+1$. **15.098.** $\beta=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}3$. **15.099.** $y=4x-13$; $y=-4x+3$. **15.100.** $x+ey-2e=0$. **15.101.** $8x-y+14=0$. **15.102.** $(1;\ 0)$; $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{44}{27}\right)$. **15.103.** $(0;\ -1)$; $(4;\ 3)$. **15.104.** a) $y=x-0{,}09$; b) $\frac{\pi}{24}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{13\pi}{24}$; $\frac{5\pi}{8}$. **15.105.** a) $\frac{3\pi}{4}$; b) $\frac{7\pi}{18}$. **15.106.** $\frac{\pi}{6}$. **15.107.** $5\sqrt{5}$. **15.108.** 5 kv. vnt. **15.109.** $S_1=S_2=S_3=8$ kv. vnt. **15.112.** $\frac{1}{13}$ m/s. **15.113.** 21 m/s, 24 m/s². **15.114.** 1; 4. **15.115.** $v(2)=70$ m/s. **15.116.** $v_1=8$ m/s, $v_2=10$ m/s ir $v_1=24$ m/s, $v_2=22$ m/s. **15.117.** $a_1=14$ m/s², $a_2=18$ m/s². **15.118.** $v_1=36$ m/s, $v_2=35$ m/s. **15.119.** $v=-12$ m/s. **15.122.** 160π cm²/s, 800π cm³/s. **15.123.** $\omega=12$ rad/s, $t=2$ s. **15.124.** 30 g/cm, 98,2 g/cm. **15.126.** $a>4$. **15.127.** $x=e$ — minimumo taškas. **15.128.** $x=\frac{1}{e}$ — maksimumo taškas. **15.129.** $x=0$ — minimumo taškas, $x=2$ — maksimumo taškas. **15.130.** $x=3$ — maksimumo taškas. **15.131.** $x=0{,}5$ — minimumo taškas; $y_{\min}=0{,}25-\ln 2$. **15.132.** $x=\ln 2$ — maksimumo taškas; $\frac{\pi}{4}$. **15.133.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ — maksimumo taškai, kai $k=2n+1$, ir maksimumo taškai, kai $k=2n$, $n\in Z$; $\frac{\pi}{4}$. **15.134.** $x=0$ — minimumo taškas; $(-0{,}25;\ -0{,}25-\ln 75)$. **15.135.** $x=-1$ — maksimumo taškas; $x=1$ — minimumo taškas; $y=11{,}25x+13$. **15.136.** $x=0$ — maksimumo taškas; 0; 9. **15.138.** $p>1$. **15.141.** Didėja intervale $\left(2\pi n-\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, mažėja intervale $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$. **15.142.** Didėja intervale $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$, mažėja intervale $\left(-\frac{1}{2};\ \infty\right)$. **15.143.** Didėja intervale $(1;\ 3)$, mažėja intervaluose $(-\infty;\ 1)$ ir $(3;\ \infty)$. **15.144.** Didėja intervaluose $(-6;\ 0)$ ir $(0;\ 2)$, mažėja intervaluose $(-\infty;\ -6)$ ir $(2;\ \infty)$. **15.145.** Didėja intervaluose $(-\infty;\ 1)$ ir $(2;\ \infty)$, mažėja intervale $(1;\ 2)$. **15.146.** $y_{\text{maž}}=-24$, $y_{\text{didž}}=4$. **15.147.** $y_{\text{maž}}=0$, $y_{\text{didž}}=17$. **15.148.** $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=3$. **15.149.** $y_{\text{maž}}=-\frac{10}{3}$, $y_{\text{didž}}=-2$. **15.150.** $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=2{,}125$. **15.151.** $y_{\text{maž}}=0$, $y_{\text{didž}}=1$. **15.152.** $y_{\text{maž}}=0$, $y_{\text{didž}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **15.153.** a) $y_{\text{maž}}=0{,}8$, $y_{\text{didž}}=1$; b) $y_{\text{maž}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y_{\text{didž}}=\frac{2}{3}$. **15.154.** $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=\frac{\pi}{2}$. **15.155.** $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **15.156.** $y_{\text{maž}}=0{,}5$, $y_{\text{didž}}=\frac{3}{4}$. **15.157.** $y_{\text{maž}}=-\frac{\pi}{4}$, $y_{\text{didž}}=\frac{\pi}{4}$. **15.158.** a) $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=1{,}25$; b) $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=1{,}25$. **15.159.** a) $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$; b) $y_{\text{maž}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$, $y_{\text{didž}}=\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$. **15.160.** a) $y_{\text{maž}}=-1{,}5$, $y_{\text{didž}}=7$; b) $y_{\text{maž}}=2{,}5$, $y_{\text{didž}}=9$. **15.161.** a) $y_{\text{maž}}=5$, $y_{\text{didž}}=12$; b) $y_{\text{maž}}=-\frac{1}{64}$, $y_{\text{didž}}=0$. **15.162.** a) $y_{\text{maž}}=2$, $y_{\text{didž}}=16$; b) $y_{\text{maž}}=1$, $y_{\text{didž}}=2$. **15.163.** a) $y_{\text{maž}}=3$, $y_{\text{didž}}=5$, b) $y_{\text{maž}}=1$,

$y_{didž}=5$. **15.164.** $y_{maž}=2$, $y_{didž}=2e^2-1$. **15.165.** $2^{1/2}\cdot 3^{-3/4}$. **15.166.** Didėja intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; \infty)$, mažėja intervaluose $(-1; 0)$ ir $(0; 1)$; $f(x_1)<f(x_2)$. **15.167.** Didėja intervale $(1; \infty)$, mažėja intervale $(0; 1)$; $f(e^{-2})>f(e^{-1})$. **15.168.** 3. **15.169.** $f(0)=2$. **15.170.** $(e; \infty)$; $\pi^e<e^\pi$. **15.171.** $y_{max}=0{,}25$, kai $x=\ln 2$; didėja intervale $(-\infty; \ln 2)$, mažėja intervale $(\ln 2; \infty)$. **15.172.** $y_{min}=0$, kai $x=0$, $y_{max}=4e^{-2}$, kai $x=2$; didėja intervale $(0; 2)$, mažėja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; \infty)$. **15.173.** $y_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2e^{\pi/4}}$, kai $x=\frac{\pi}{4}$; didėja intervale $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, mažėja intervale $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$. **15.174.** $y_{max}=\ln 2-0{,}5$, kai $x=-0{,}5$; didėja intervale $(-\infty; -0{,}5)$, mažėja intervale $(-0{,}5; 0{,}5)$. **15.175.** $y_{min}=-\frac{25}{96}$, kai $x=\frac{7}{11}$; didėja intervale $\left(\frac{7}{11}; 5\right)$, mažėja intervaluose $\left(-\infty; \frac{7}{11}\right)$ ir $(5; \infty)$. **15.176.** 9 ir 9. **15.177.** 40; 60; 80. **15.178.** 0,5. **15.179.** 14×21 m. **15.180.** 18 dm^2. **15.181.** 12 cm ir $3\sqrt{3}$ cm. **15.182.** Kai dvi lygiagretainio kraštinės yra duotojo trikampio vidurinės linijos. **15.183.** Statusis trikampis, kurio įžambinės ilgis lygus $a\sqrt{2}$. **15.184.** 100 cm. **15.185.** 12 cm ir 9 cm. **15.186.** 12 cm ir 9 cm. **15.187.** 6 km/h. **15.188.** 9 cm ir 7,5 cm. **15.189.** $14\sqrt{2}$ cm. **15.190.** 60°. **15.191.** $\angle BAC_{didž}=\frac{\pi}{6}$, kai $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. **15.192.** $\frac{4}{5}$. **15.193.** Kai $\alpha=\frac{\pi}{3}$, didžiausia reikšmė lygi 0,5. **15.194.** $H=R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **15.195.** arctg 2. **15.196.** $\frac{a}{2}$, $\frac{H}{2}$. **15.197.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **15.198.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **15.199.** $\frac{\pi}{3}$. **15.200.** $\frac{\pi}{4}$. **15.201.** $k=29{,}28$; $x\approx5{,}4$; $y\approx5{,}4$. **15.202.** $R=r$. **15.203.** $x=-1$ — maksimumo taškas, $x=0$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(0; \infty)$; mažėja intervale $(-1; 0)$. **15.204.** $x=\pm2$ — minimumo taškai, $x=0$ — maksimumo taškas; didėja intervaluose $(-2; 0)$ ir $(2; \infty)$, mažėja intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(0; 2)$. **15.205.** $x=\pm\sqrt{5}$ — minimumo taškai, $x=0$ — maksimumo taškas; didėja intervaluose $(-\sqrt{5}; 0)$ ir $(\sqrt{5}; \infty)$, mažėja intervaluose $(-\infty; -\sqrt{5})$ ir $(0; \sqrt{5})$. **15.206.** $x=-1$ — maksimumo taškas, $x=2$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(2; \infty)$, mažėja intervale $(-1; 2)$. **15.207.** $x=0$ — maksimumo taškas, $x=2$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; \infty)$, mažėja intervale $(0; 2)$. **15.208.** $x=2$ — maksimumo taškas, $x=3$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; 2)$ ir $(3; \infty)$, mažėja intervale $(2; 3)$. **15.209.** $x=\pm1$ — maksimumo taškai, $x=0$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(0; 1)$, mažėja intervaluose $(-1; 0)$ ir $(1; \infty)$. **15.210.** $x=\pm2$ — minimumo taškai, $x=0$ — maksimumo taškas; didėja intervaluose $(-2; 0)$ ir $(2; \infty)$, mažėja intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(0; 2)$. **15.211.** $x=0$ — maksimumo taškas, $x=2$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; \infty)$, mažėja intervale $(0; 2)$. **15.212.** $x=0$ — maksimumo taškas; didėja intervale $(-\infty; 0)$, mažėja intervale $(0; \infty)$. **15.213.** $x=-1$ — minimumo taškas, $x=1$ — maksimumo taškas; didėja intervale $(-1; 1)$, mažėja intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; \infty)$. **15.214.** $x=2$ — minimumo taškas; mažėja intervale $(-\infty; 2)$, didėja intervale $(2; \infty)$. **15.215.** $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ — minimumo taškas; mažėja

intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $\left(0; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, didėja intervale $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; \infty\right)$. **15.216.** $x=2$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; \infty)$, mažėja intervale $(0; 2)$. **15.217.** $x=0$ — minimumo taškas, mažėja intervale $(-\infty; 0)$, didėja intervale $(0; \infty)$. **15.218.** $x=2$ — minimumo taškas, $x=-2$ — maksimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(2; \infty)$, mažėja intervale $(-2; 2)$. **15.219.** $x=2$ — minimumo taškas; mažėja intervale $(-\infty; 2)$, didėja intervale $(2; \infty)$. **15.220.** $x=-4$ — maksimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; -8)$ ir $(-8; -4)$, mažėja intervaluose $(-4; 0)$ ir $(0; \infty)$. **15.221.** Mažėja intervaluose $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ ir $(3; \infty)$. **15.222.** $x=21$ — maksimumo taškas; didėja intervale $(-\infty; 1)$, mažėja intervale $(1; \infty)$. **15.223.** $x=\frac{1}{2}$ — minimumo taškas; mažėja intervale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; didėja intervaluose $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ ir $(2; \infty)$. **15.224.** $x=2$ — maksimumo taškas; mažėja intervaluose $(-\infty; -2)$ ir $(2; \infty)$, didėja intervale $(-2; 2)$. **15.225.** $x=1-\sqrt{3}$ — maksimumo taškas, $x=1+\sqrt{3}$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; 1-\sqrt{3})$ ir $(1+\sqrt{3}; \infty)$, mažėja intervaluose $(1-\sqrt{3}; 1)$ ir $(1; 1+\sqrt{3})$. **15.226.** $x=0$ — minimumo taškas, $x=2$ — maksimumo taškas; mažėja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(2; \infty)$, didėja intervale $(0; 2)$. **15.227.** $x=-1$ — minimumo taškas, $x=1$ — maksimumo taškas; mažėja intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(1; \infty)$, didėja intervale $(-1; 1)$. **15.228.** $x=-\sqrt[3]{2}$ — minimumo taškas, $x=0$ — maksimumo taškas; mažėja intervaluose $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$, $(0; 1)$ ir $(1; \infty)$, didėja intervale $(-\sqrt[3]{2}; 0)$. **15.229.** $x=3$ — minimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $(3; \infty)$, mažėja intervale $(0; 3)$. **15.230.** $x=2{,}5$ — maksimumo taškas; didėja intervaluose $(-\infty; 1)$ ir $(1; 2{,}5)$, mažėja intervaluose $(2{,}5; 4)$ ir $(4; \infty)$. **15.232.** a) $\frac{4x^3}{3}-\frac{9}{x}-35$; b) $\frac{x^4}{12}-2x^2+\frac{1}{3}x+7$. **15.233.** $F(x)=\frac{x^5+11}{5}$. **15.234.** $F(x)=\frac{3-\cos 2x}{2}$. **15.235.** $F(x)=-\frac{\operatorname{ctg} 3x+2}{3}$. **15.236.** $F(x)=-\frac{71x^3+8}{24x^3}$. **15.237.** $F(x)=x^4-x^3+3$. **15.238.** $F(x)=\frac{2\sin 4x-9}{8}$. **15.239.** $S(x)=7-4\sqrt{5-x}$. **15.240.** $\frac{\pi}{2}$. **15.241.** $\frac{3\pi}{4}$. **15.242.** 3. **15.243.** $\frac{\pi-2}{4}$. **15.244.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **15.245.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **15.246.** 2. **15.247.** $\frac{1}{2}$. **15.248.** 0. **15.249.** 1120,4. **15.250.** −101,25. **15.251.** $\frac{46}{15}$. **15.252.** $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **15.253.** 2. **15.254.** $0{,}5\ln 2-1{,}5$. **15.255.** $\frac{3(\sqrt[3]{9}-1)}{4}$. **15.256.** $\frac{1}{8}$. **15.257.** $\frac{3\pi}{8}$. **15.258.** $\frac{3\pi}{16}$. **15.259.** $\frac{11}{96}$. **15.260.** $\frac{1}{8}$. **15.261.** 12. **15.262.** $-\frac{4}{5}$. **15.263.** $\frac{4}{9}$. **15.264.** $\frac{3}{5}$. **15.265.** $\approx4{,}89$. **15.266.** $\frac{11}{4}$ kv. vnt.

15.267. $\sqrt{2}$ kv. vnt. **15.268.** $\frac{8}{3}$ kv. vnt. **15.269.** $\frac{5}{12}$ kv. vnt. **15.270.** $\frac{1}{6}$ kv. vnt. **15.271.** $\frac{3}{10}$ kv. vnt. **15.272.** 1,6 kv. vnt. **15.273.** ≈ 4 kv. vnt. **15.274.** 64,5 m; 11 m/s^2. **15.275.** 11,25 m; $\frac{1}{12}$ m/s^2.

16 skyrius

16.001. $\frac{n^2+m^2}{n-m}$. **16.003.** $\frac{c \sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$. **16.006.** $-\frac{1}{k}$. **16.007.** 20. **16.008.** 12. **16.009.** Dalys lygiaplotės. **16.010.** $3R^2$. **16.014.** Penkiakampio. **16.023.** $4S$. **16.025.** $\frac{R^2(4\pi-3\sqrt{3})}{6}$. **16.027.** 0,2. **16.029.** $\left[\frac{s}{\sqrt{2}};\ s\right]$. **16.032.** 3. **16.034.** $0{,}2R\sqrt{10}$. **16.037.** $4\sqrt{2}$ m. **16.038.** *a*. **16.040.** 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm ir 8 cm. **16.041.** 3 ir 4. **16.044.** 16 cm. **16.045.** 4 cm ir 11 cm. **16.046.** 12 cm. **16.047.** 12 cm, 15 cm ir 18 cm. **16.048.** 7,2 cm^2. **16.049.** $600\sqrt{3}$ cm^2. **16.050.** 1,5 cm. **16.052.** $4\frac{8}{21}$ cm ir $5\frac{20}{21}$ cm. **16.053.** $\frac{c^2}{4}$, **16.054.** a) Bukasis; b) statusis; c) neegzistuoja; d) bukasis. **16.056.** $(\sqrt{5}+1):4$. **16.057.** $2(S_1+S_2)$. **16.060.** $\frac{p}{4}$. **16.063.** $\frac{h}{3}$. **16.064.** 1,2 cm. **16.065.** 7 : 2. **16.067.** 180°. **16.070.** $\arccos\frac{4}{5}$. **16.073.** *a*. **16.074.** $\arccos\frac{4}{5}$. **16.075.** 1) 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm ir 30 cm; 2) 6 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm ir 30 cm; 3) 7 cm, 9 cm, 11 cm, 13 cm ir 30 cm. **16.076.** 25. **16.077.** 36° ir 108°. **16.078.** 2α; π; $2\pi-2\alpha$. **16.081.** Negali. **16.084.** 60°. **16.085.** $\arccos\frac{1}{3}$. **16.086.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; arctg 2. **16.087.** 1 : 4. **16.088.** $\frac{6}{13}$. **16.089.** $-\frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. **16.090.** $\frac{1}{2}H\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **16.091.** $l\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ir $l\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\times\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **16.093.** $\frac{\pi}{3}$. **16.096.** 51°. **16.097.** $\frac{\pi}{2}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$; $k\geqslant 2$. **16.098.** $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\sqrt{2k-k^2}}{k-1}}$; $0<k<2$. **16.099.** $\pi\sqrt{3}:2$. **16.100.** 20. **16.105.** $6\sqrt{435}$ cm^3. **16.106.** 60°. **16.107.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **16.108.** Ne. **16.114.** 1 : 7. **16.115.** 1 cm. **16.117.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}$. **16.119.** 1 : 11. **16.120.** 5040 cm^2. **16.121.** $\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$.

17 skyrius

17.001. $y\pm 0{,}5\sqrt{15}=0$. **17.002.** $D(-1{,}4;\ -5{,}2)$. **17.003.** $5x-y+7=0$. **17.004.** $y=0$; $y=2\sqrt{3}$; $y=\sqrt{3}x$; $y=-\sqrt{3}(x-10)$. **17.005.** $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-\sqrt{10})^2=\frac{49}{4}$. **17.006.** $y=-\sqrt{3}x+(3+2\sqrt{3})$; $6+3{,}5\sqrt{3}$ kv. vnt. **17.007.** 13; $B(12;\ 5)$; $C(-5;\ 12)$; $D(-12;\ -5)$. **17.008.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}$ arba $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}$. **17.009.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ arba $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **17.010.** $(-1;\ 2)$; 13 kv. vnt. **17.011.** $8x+15y\pm 60=0$ ir $8x-15y\pm 60=0$; $\frac{60}{17}$ cm. **17.012.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **17.013.** $\frac{4\sqrt{17}}{11}$; $y=4x$. **17.014.** $C(5;\ 2)$, $D(3;\ 3)$ arba $C(3;\ -2)$; $D(1;\ -1)$. **17.015.** $\frac{24}{25}$. **17.016.** $\sqrt{33}$ ir $\sqrt{105}$. **17.017.** $(-2+3\sqrt{3};\ -1)$ arba $(-2-3\sqrt{3};\ -1)$; $9\sqrt{3}$ kv. vnt. **17.018.** $4\sqrt{2}$. **17.019.** $\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$. **17.020.** $C(4;\ -1)$. **17.021.** $\frac{3}{2}\sqrt{34}$. **17.022.** $3x+4y-15=0$ ir $3x-4y-15=0$. **17.023.** $(x+1)^2+(y-3)^2=10$. **17.024.** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$. **17.025.** $(1{,}5;\ 1;\ 1)$. **17.026.** $\alpha=\arccos\frac{31}{5\sqrt{41}}$. **17.027.** $\cos A=-\frac{5}{\sqrt{34}}$. **17.028.** $\alpha=-4$, $\beta=2$ arba $\alpha=-8$; $\beta=-2$. **17.031.** $\overline{M_1M_2}(1{,}5;\ 1;\ -0{,}5)$; $|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{\frac{7}{2}}$. **17.033.** $\overline{AB}=3\bar{a}-\bar{b}$; $\overline{BC}=2\bar{b}-3\bar{a}$. **17.034.** $(-\infty;\ 0)$ ir $(1;\ \infty)$. **17.035.** $(-\infty;\ -1)$ ir $(0;\ 2)$. **17.036.** $[2;\ 5)$. **17.037.** $\left(\frac{2}{3};\ 3\right)$. **17.038.** $x=-\frac{5}{4}$, $y=\frac{8}{5}$. **17.039.** $(-\infty;\ -1)$ ir $(5;\ \infty)$. **17.040.** $\overline{BD}=2(\bar{b}-\bar{a})$; $\overline{AD}=\frac{4}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{a}$. **17.041.** $\overline{AB}=\frac{9}{8}\bar{a}-\frac{3}{8}\bar{b}$; $\overline{AD}=-\frac{3}{8}\bar{a}+\frac{9}{8}\bar{b}$; $\overline{MN}=\bar{b}-\bar{a}$; $\overline{BD}=-\frac{3}{2}\bar{a}+\frac{3}{2}\bar{b}$. **17.042.** $\overline{CM}=\frac{3}{20}\overline{CA}+\frac{3}{20}\overline{CB}+\frac{7}{10}\overline{CD}$. **17.043.** $\arccos\frac{5}{14}$. **17.046.** $\overline{A_1O}=-\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{c}$. **17.047.** $\frac{8}{5\sqrt{17}}$. **17.048.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{19}}$. **17.049.** $\arccos\frac{13}{14}$. **17.050.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{a}+\bar{b})$. **17.051.** $\bar{p}(2;\ -1;\ 1)$. **17.052.** $\bar{a}=-\frac{3}{2}\bar{b}-3\bar{c}$. **17.054.** 5 kv. vnt. **17.055.** 120°. **17.056.** $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ kub. vnt. **17.057.** $\overline{CD}=\frac{CB^2\overline{CA}+CA^2\overline{CB}}{CA^2+CB^2}$. **17.059.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **17.060.** $M\left(0;\ 0;\ \frac{2}{3}\right)$; $N\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. **17.061.** $\sqrt{13}$. **17.062.** $-11{,}5$. **17.063.** $4\sqrt{7}$. **17.064.** 120°. **17.065.** $\frac{7}{5\sqrt{33}}$. **17.066.** 4. **17.067.** $(-4;\ -2;\ 0)$ arba $(4;\ 2;\ 0)$. **17.068.** $\frac{6}{7}$; $-\frac{2}{7}$; $-\frac{3}{7}$. **17.069.** π. **17.070.** 7. **17.071.** $\overline{A_1A_3}=0{,}5(\sqrt{5}+1)\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_5}$. **17.072.** Su $x=0$. **17.073.** $\overline{MO}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}(\overline{MA}+\overline{MB})$. **17.074.** $\overline{DK}=\frac{7}{8}\overline{AB}-\overline{AD}$; $|\overline{DK}|:|\overline{AB}|=\frac{\sqrt{337}}{24}$

17.077. 4; $\frac{1}{2}$. **17.078.** —29; 14 kv. vnt. **17.079.** 1 : 3. **17.080.** $\frac{\pi}{4}$. **17.081.** 0. **17.083.** Lygiašonis smailusis. **17.085.** 8. **17.086.** $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. **17.087.** $\overline{AB}+\overline{CB}=2(\bar{a}-\bar{b})$. **17.089.** $\arccos\frac{13}{14}$. **17.090.** $\arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **17.091.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{14}}$. **17.092.** —1,5. **17.095.** $\cos x=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ef}$; čia $|\overline{BC}|=a$, $|\overline{AC}|=b$, $|\overline{AB}|=c$, $|\overline{DA}|=d$, $|\overline{DB}|=e$, $|\overline{DC}|=f$. **17.096.** $\left(\frac{1}{\sqrt{11}};\ -\frac{3}{\sqrt{11}};\ \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$. **17.097.** $(a+b):c$; $(b+c):a$; $(c+a):b$. **17.098.** $\sqrt{43}$. **17.099.** $\overline{OH}=\frac{b^2c^2\overline{OA}+a^2c^2\overline{OB}+a^2b^2\overline{OC}}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$. **17.100.** $\frac{\pi}{6}$. **17.101.** 6. **17.102.** $\sqrt{6}$. **17.103.** 12,5 kub. vnt. **17.104.** 5 kv. vnt. **17.105.** $\sqrt{\frac{442}{19}}$; bukasis. **17.106.** (2; 3; —2). **17.107** (—4; —6; 12). **17.108.** $AB=5$; $S_{\triangle AOB}=5$ kv. vnt., $|\overline{OM}|=2{,}5$. **17.109.** $(4\sqrt{2};\ -2;\ 8)$ arba $(-4\sqrt{2};\ 2;\ -8)$. **17.111.** $-\frac{S\sqrt{3}}{6}$. **17.112.** 3 : 1. **17.113.** $\overline{AB}=\overline{AC}+k\overline{AD}$, $\overline{AE}=\overline{AD}+k\overline{AC}$; čia $k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **17.114.** $8a^2$; čia a — kubo briaunos ilgis. **17.115.** $3a^2$; čia a — kvadrato kraštinės ilgis. **17.116.** $4a^2$; čia a — kvadrato kraštinės ilgis. **17.119.** $\frac{13}{2\sqrt{43}}$. **17.120.** $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$. **17.125.** $\frac{16S^2c^2(c^4-16S^2)}{(16S^2+c^4)^2}$. **17.127.** Į lygias dalis po 45°. **17.129.** 4 : 1.

Savikontrolės užduočių variantai

I variantas. **1.** 1. **2.** 4,3. **3.** 3. **4.** 4,1. **5.** 6. **6.** 0. **7.** 30°. **8.** 42 cm. **9.** 3,53. **10.** —1,5. II variantas. **1.** 4. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 5. **5.** 7. **6.** 41. **7.** 3. **8.** 64. **9.** 4. **10.** 1. III variantas. **1.** 8. **2.** 7. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 25. **6.** 2. **7.** 192. **8.** 5. **9.** 10. **10.** 3. VI variantas. **1.** 2. **2.** 1, 2 ir **4.** **3.** 2. **4.** 5. **5.** 6. **6.** 8. **7.** 0,5. **8.** 4 ir 36. **9.** 8. **10.** 0 ir 5. V variantas. **1.** 40. **2.** —25. **3.** 10. **4.** 1. **5.** 0,28. **6.** 90°. **7.** 72 cm^2. **8.** 2,3 cm. **9.** 13 ir 13. **10.** 6. VI variantas. **1.** 1. **2.** 11. **3.** 0; 4. **4.** 48. **5.** 0,8. **6.** 4. **7.** 31,5. **8.** 15. **9.** 2. **10.** 18. VII variantas. **1.** —1,5. **2.** 8. **3.** 0,5. **4.** 6. **5.** 7,2. **6.** 16. **7.** 1. **8.** 190. **9.** —0,5. **10.** 7. VIII variantas. **1.** 2; 0,25. **2.** 225°; 315°. **3.** 4. **4.** 0,3. **5.** 168. **6.** 3 km/h. **7.** 1. **8.** 0,75. **9.** 6 ir 0. **10.** 2,5. IX variantas. **1.** 2. **2.** 9. **3.** 10. **4.** 8 cm. **5.** 0,8. **6.** 0. **7.** 103. **8.** 4 cm. **9.** 6. **10.** 16 kv. vnt. X variantas. **1.** —9. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 11. **5.** —1. **6.** 7. **7.** 4. **8.** 0. **9.** Minimumas, kai $x=\frac{1}{e}$. **10.** 2. XI variantas. **1.** 6. **2.** 0. **3.** 1. **4.** 5. **5.** 0. **6.** —1. **7.** 5. **8.** Vieną kartą. **9.** 20. **10.** 2,25. XII variantas. **1.** 1; 5. **2.** 7,5 cm. **3.** 0,6. **4.** 100. **5.** —1,5. **6.** 3. **7.** 1. **8.** 2,25. **9.** 80. **10.** 1,5. XIII variantas. **1.** $(2x+1)^2$. **2.** $2\,\mathrm{tg}\,2\alpha$. **3.** 1. **4.** —10; 3. **5.** 9. **6.** 2. **7.** 10. **8.** 4. **9.** —3. **10.** 1. XIV variantas. **1.** 3. **2.** 1,6. **3.** 5. **4.** 12 h ir 24 h. **5.** —1; 1. **6.** 4. **7.** 12. **8.** 0,5. **9.** 8. **10.** 120°; 240°. XV variantas. **1.** —4; —3; 4. **2.** 25. **3.** 5. **4.** —58. **5.** 2; 3. **6.** 2,25. **7.** 9,375 kv. vnt. **8.** 12. **9.** 150°; 210°. **10.** 40 l. XVI variantas. **1.** 2. **2.** 0,1. **3.** 83. **4.** 4. **5.** 192 kv. vnt. **6.** 90°; 210°. **7.** 32. **8.** 25 ir 20. **9.** 2; 1; 5. **10.** 2; 4. XVII variantas. **1.** 4. **2.** $\frac{3}{4}$. **3.** 3. **4.** 60 kv. vnt. **5.** 0,8. **6.** 10. **7.** 6. **8.** 6. **9.** 12 kub. vnt. **10.** 8. XVIII variantas. **1.** 5. **2.** 8. **3.** 4. **4.** 2. **5.** 66. **6.** 1. **7.** 12 kub. vnt. **8.** 13. **9.** 2. **10.** 3. XIX variantas. **1.** 4. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 7. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 6 kv. vnt. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 3. XX variantas. **1.** 7. **2.** 8 kv. vnt. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 0,6. **6.** 2. **7.** 51,6. **8.** 3. **9.** 16. **10.** 120°. XXI variantas. **1.** 4. **2.** 48 kv. vnt. **3.** 3. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 7. **7.** 10. **8.** 4. **9.** 5. **10.** 2. XXII variantas. **1.** $(2\log_2 5+1)^2$. **2.** 1. **3.** 10. **4.** 5. **5.** 12. **6.** 0,36. **7.** 0,8. **8.** 3. **9.** 6. **10.** 2. XXIII variantas. **1.** 4. **2.** 5. **3.** 9 kv. vnt. **4.** 5. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 6. **10.** 4. XXIV variantas. **1.** 14. **2.** 0,5. **3.** 5. **4.** 7. **5.** 4. **6.** 250 kub. vnt. **7.** 63. **8.** 0,2. **9.** 5. **10.** 20. XXV variantas. **1.** 1. **2.** 16. **3.** 6. **4.** 0,28. **5.** (9; —1). **6.** 6. **7.** 3. **8.** 12. **9.** 14. **10.** 4 kv. vnt. XXVI variantas. **1.** —2; —1. **2.** 0,5 km/min; 0,6 km/min. **3.** 0,75. **4.** 18 kv. vnt. **5.** 4. **6.** 3 ir 0. **7.** 16. **8.** —2; —1. **9.** 120°; 240°. **10.** 12. XXVII variantas. **1.** 135°; 225°. **2.** 24 cm^2. **3.** 2 ir 22 314. **4.** —5 ir 3. **5.** —5. **6.** 15. **7.** —1,5. **8.** 1,75. **9.** 2. **10.** 4. XXVIII variantas. **1.** 20. **2.** —0,4. **3.** 1. **4.** —1; 2. **5.** 4. **6.** —6 ir —6. **7.** —0,6. **8.** 0,4 ir 0,4. **9.** 5 ir 6. **10.** 39 ir —39.

PRIEDAS

Dviženklių skaičių kvadratų lentelė

Dešimtys	Vienetai								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5819	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

TURINYS

Praktikumas

Jegeriovas Viktoras, **Zaicevas** Vladimiras, **Kordemskis** Borisas, **Maslova** Tamara, **Orlovskaja** Iraida, **Pozoiskis** Romanas, **Riachovskaja** Galina, **Fiodorova** Nina

MATEMATIKOS UŽDAVINYNAS STOJANTIEMS Į AUKŠTĄSIAS TECHNIKOS MOKYKLAS

Redakcijos vedėja *J. Baltušnikienė*
Redaktorės *R. Pateriabienė, N. Ramanauskienė*
Viršelis *A. Gelgoto*. Men. redaktorė *D. Vitkevičienė*
Techn. redaktorė *N. Balanoškienė*. Korektorė *R. Grinkienė*

Duota rinkti 1991 04 04. Pasirašyta spaudai 1992 03 02. SL 259. Formatas 60×90/16. Popierius spaudos Nr. 1. Garnitūra „Literatūrinė",10 punktų. Iškilioji spauda. 30 sąl. sp. l. 34,2 apsk. leid. l. Tir. 5000 egz. Užsakymas 1941. Leid. Nr. 12220.
Kaina ~~65~~ rb
Valstybinė „Šviesos" l-kla, Vytauto pr. 25, 3000 Kaunas
Spausdino valstybinė „Aušros" sp., Vytauto pr. 23, 3000 Kaunas

67,50